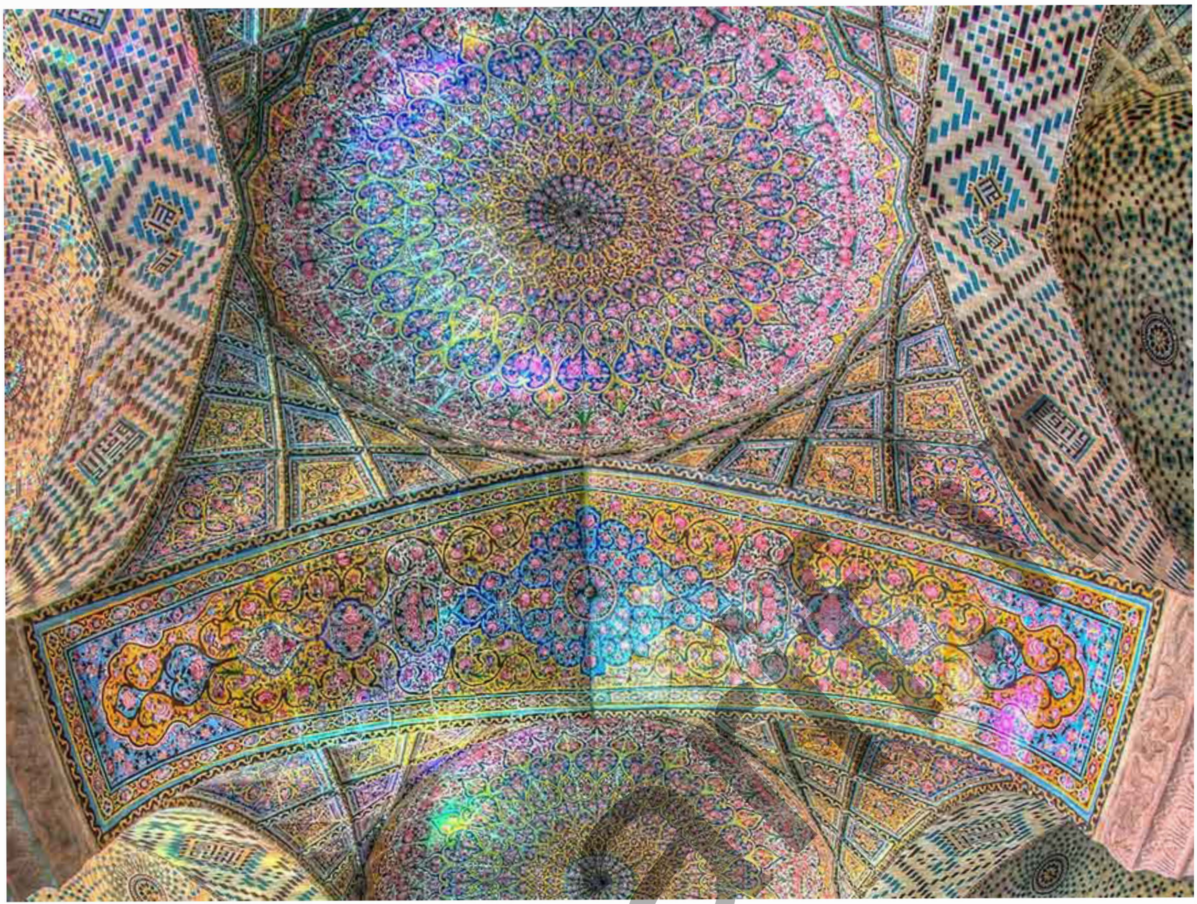


۳ اندازه‌گیری و بردار

۳-۱. اندازه‌گیری

فیزیک را گاهی اوقات، علم اندازه‌گیری می‌نامند. به عبارت دیگر، در این علـم در مـورد چیزهـایی صحبت می‌شود که بتوان تغییرات ایجاد شده در آن‌ها را اندازه‌گیری کرد. بنابراین مواردی شـبیه خوشـحالی، نـاراحتی، عصبانیت و .... موضوع گفتگو در این دانش نیست.

نخستین چیزی که در هر اندازه‌گیری باید مشخّص شود، واحد یا یکایی است که اندازه‌گیری بـه کمـک آن صورت می‌گیرد و سپس باید وسیله‌ای و روشی برای این اندازه‌گیری بیان شود.

یکای هر کمیّت باید به گونه‌ای انتخاب شود که:

- در شرایط فیزیکی تعیین شده تغییر نکند.
- در دسترس باشد.
- با دقّت زیاد قابل اندازه‌گیری باشد.

یکی از مجموعه یکاهای مورد توافق را دستگاه بین المللـی یکاهـا یـا بـه اختصـار، SI مـی‌نامنـد. در ایـن دستگاه، کمیّت‌ها به دو دسته‌ی کمیّت‌های اصلی و کمیّت‌های فرعی تقسیم می‌شوند.

کمیّت‌های اصلی: آن دسته از کمیّت‌هایی که یکای آن‌ها به‌صورت مستقل قرارداد شده‌اند، کمیّت‌های اصلی و یکاهای آنها یکاهای اصلی نامیده می‌شوند. این کمیّت‌ها عبارتند از طول، زمان، جرم، دما، جریان الکتریکی، مقدار ماده و شدّت نور. یکای این کمیّت‌ها نیز در SI به‌ترتیب عبارتست از: متر (m)، ثانیه (s)، کیلوگرم (kg)، دما (K)، آمپر (A)، مول (mol) و شمع (cd).

شکل ۳-۱: کیلوگرم استاندارد که در موزه‌ی سور نگهداری می‌شود.

کمیّت‌های فرعی: سایر کمیّت‌ها که یکای آن‌ها به کمک روابط ریاضی و فیزیکی تعریف می‌شوند، کمیّت‌های فرعی نامیده می‌شوند. کمیّت‌هایی مانند مساحت، حجم، سرعت، شتاب، نیرو، انرژی، فشار و ...، کمیّت‌های فرعی هستند.

مثال ۱

یکای هر کدام از کمیت‌های فرعی را می‌توان برحسب یکاهای اصلی نوشت. در جدول زیر، یکاهای کمیت‌های داده شده را برحسب یکاهای اصلی بنویسید:

ردیف	کمیت	نماد کمیت	یکا	نماد یکا	یکا برحسب یکاهای اصلی
۱	انرژی	K,U,E,Q	ژول	J	
۲	سرعت		-		
۳	شتاب		-		
۴	چگالی		-		
۵	بار الکتریکی				
۶	توان عدسی				
۷	نیرو	$F,f,...$			
۸	ثابت فنر		-		
۹	کار				
۱۰	فشار				
۱۱	گرمای ویژه	c	-		
۱۲	گرمای نهان	L_f,L_v	-		
۱۳	ضریب انبساط	α,β	-		
۱۴	میدان الکتریکی		-		

۱۵	پتانسیل الکتریکی				
۱۶	ظرفیت خازن				
۱۷	مقاومت الکتریکی				
۱۸	توان الکتریکی				
۱۹	میدان مغناطیسی				
۲۰	شار مغناطیسی	Φ	وبر	Wb	
۲۱	ضریب خودالقایی				
۲۲	تکانه		-		
۲۳	دوره‌ی تناوب		-		
۲۴	بسامد				
۲۵	بسامد زاویه‌ای		-		
۲۶	طول موج		-		
۲۷	عدد موج		-		
۲۸	ثابت قانون گرانش				
۲۹	ثابت عمومی گازها				
۳۰	ثابت قانون کولن				
۳۱	ضریب گذردهی الکتریکی				
۳۲	ضریب تراوایی مغناطیسی				
۳۳					
۳۴					

پیشوندهای SI: برای بیان اعداد بسیار کوچک یا اعداد بسیار بزرگ، پیشوندهایی در SI قرارداد شده است. این پیشوندها در بیان اعداد، مورد استفاده قرار می‌گیرد. از آن‌جا که تمامی روابط و فرمول‌هایی که به‌کار خواهیم برد، تنها در صورتی برقرار هستند که یکای به‌کار رفته در آن‌ها بر حسب کمیّت‌های SI باشند، لذا لازم است تبدیل واحد را فرا گیریم.

نام پیشوند	ضریب عددی	نماد	نام پیشوند	ضریب عددی	نماد
دسی	$۱۰^{-۱}$	d	دکا	$۱۰^{+۱}$	da
سانتی	$۱۰^{-۲}$	c	هکتو	$۱۰^{+۲}$	h
میلی	$۱۰^{-۳}$	m	کیلو	$۱۰^{+۳}$	K
میکرو	$۱۰^{-۶}$	μ (مو)	مگا	$۱۰^{+۶}$	M
نانو	$۱۰^{-۹}$	n	گیگا	$۱۰^{+۹}$	G
پیکو	$۱۰^{-۱۲}$	p	ترا	$۱۰^{+۱۲}$	T

جدول ۳-۱: جدول پیشوندهای SI.

تبدیل واحد:

برای انجام تبدیل واحد با پیشوندهای SI، می‌توان از ضریب تبدیل واحد زیر استفاده کرد:

$$\dots \times \left(۱۰^{\text{توان ضریب عددی پیشوند قدیم} - \text{توان ضریب عددی پیشوند جدید}}\right)^{\text{توان یکا}} \qquad (۱-۳)$$

مثال ۲

هر کدام از تبدیل واحدهای زیر را انجام دهید:

الف) $۴/۸۰ \times ۱۰^{-۴}\ \text{mm} = \dots\dots\dots\dots\dots \text{pm}$

ب) $۱/۱ \times ۱۰^{۱۰}\ \text{cm}^۲ = \dots\dots\dots\dots\dots \text{Mm}^۲$

ج) $۱۳/۶\ \dfrac{\text{g}}{\text{cm}^۳} = \dots\dots\dots\dots\dots \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^۳}$

د) $۹ \times ۱۰^{۹}\ \dfrac{\text{N.m}^۲}{\text{C}^۲} = \dots\dots\dots\dots\dots \dfrac{\text{N.cm}^۲}{\mu\text{C}^۲}$

نکته: گاهی اوقات، برای یک کمیّت به همراه ضریبی از آن، یک نام جدید قرار داده می‌شود. موارد زیر، از این جمله هستند:

$$۱\text{ton} = ۱۰۰۰\text{kg}$$

$$\begin{cases} ۱\text{lit} = ۱\text{dm}^۳ \\ ۱\text{cc} = ۱\text{cm}^۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱\text{m}^۳ = ۱۰۰۰\text{lit} \\ ۱\text{lit} = ۱۰۰۰\ \text{cc} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۱h = ۶۰min \\ ۱min = ۶۰\,s \end{cases} \Rightarrow ۱h = ۳۶۰۰s$$

میکرون : $۱\mu = ۱\mu m = ۱۰^{-۶} m \Rightarrow ۱m = ۱۰^{+۶}\,\mu$

آنگستروم : $۱Å = ۱۰^{-۱۰} m \Rightarrow ۱۰^{۱۰}\,Å = ۱m$

مثال ۳

هر کدام از تبدیل واحدهای زیر ا انجام دهید:

الف) $۷/۸۰\dfrac{g}{cm^۳} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\dfrac{kg}{lit}$

ب) $۹۰\dfrac{km}{h} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\dfrac{m}{s}$

ج) $۳۰\dfrac{cm}{min} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\dfrac{km}{h}$

د) $۲۵۰۰\,Å = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\mu$

دقّت اندازه‌گیری:

کم‌ترین مقداری که می‌توان با یک وسیله اندازه‌گیری کرد را، دقّت آن وسیله‌ی اندازه‌گیری می‌نامند.

نتیجه‌ی حاصل از یک اندازه‌گیری باید به گونه‌ای گزارش شود که از روی آن بتوان دقّت وسیله‌ی اندازه‌گیری را تعیین کرد.

برای تعیین دقّت وسیله‌ی اندازه‌گیری، کافی است جایگاه رقم سمت راست عدد گزارش شده، به‌همراه توان‌های ۱۰ و پیشوندِ یکا را در نظر بگیریم.

مثال ۴

در هر حالت، دقّت وسیله‌ی اندازه‌گیری را بر حسب یکای خواسته شده بیان نمایید.

الف) $۱/۱۴\times۱۰^{۵} cm$ بر حسب میلی‌متر

ب) $۲/۱\times۱۰^{-۳} m^۲$ بر حسب سانتی‌متر مربع

ج) $۹/۰۱۰\times۱۰^{-۴} kg$ بر حسب میلی گرم

د) $۷/۸\dfrac{g}{cm^۳}$ بر حسب کیلوگرم بر متر مکعب

نکته: هنگامی که با یک وسیله اندازه می‌گیریم، اعداد حاصل از اندازه‌گیری، حتماً باید مضربی از کم‌ترین میزان وسیله‌ی اندازه‌گیری یعنی همان دقت اندازه‌گیری باشد! مثلاً اگر با ظرفی که حجم آن $10cm^3$ است، بخواهیم اندازه‌گیری انجام دهیم، تمامی اعداد ارائه شده، باید مضربی از ۱۰ باشد.

مثال ۵

حجم‌های مختلفی را با استوانه‌ای که حجم آن $15cm^3$ است اندازه گرفته‌ایم. کدام یک از اعداد زیر نمی‌تواند نتیجه‌ی این اندازه‌گیری باشد؟

۱) $15cm^3$ ۲) $180cm^3$ ۳) $105cm^3$ ۴) $140cm^3$

نکته: برای کم کردن خطا در اندازه‌گیری هر کمیت، معمولاً اندازه‌گیری چند بار تکرا می‌شود. اگر عددهای به دست آمده متفاوت باشند، میانگین آن اعداد به عنوان نتیجه‌ی اندازه‌گیری پذیرفته می‌شود. البته اگر در میان عددهای به دست آمده، یک یا دو عدد اختلاف زیادی با بقیه داشته باشند، در میانگین‌گیری به حساب نمی‌آیند.

مثال ۶

دانش‌آموزان یک کلاس، فاصله‌ی کانونی یک عدسی را در گروه خود اندازه گرفته و اعداد زیر را گزارش کرده‌اند:

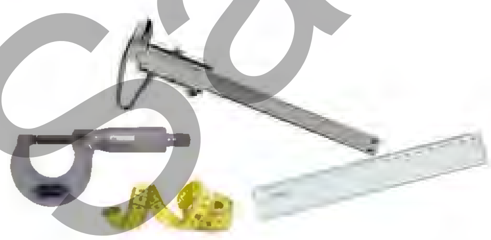
$46cm, 42cm, 61cm, 44cm, 40cm, 39cm$

بهترین عددی که می‌توان برای فاصله‌ی کانونی عدسی گزارش کرد، کدام است؟

۱) $42/2cm$ ۲) $42cm$ ۳) $45/3cm$ ۴) $45cm$

نکته: برای اندازه‌گیری طول‌های نه چندان بزرگ و نه چندان کوچک، از متر نواری یا خط‌کش که برحسب متر یا سانتی‌متر مدرج شده استفاده می‌شود. اما برای اندازه‌گیری‌های دقیق‌تر، از کولیس یا ریزسنج استفاده می‌شود.

دقت اندازه‌گیری کولیس‌های قدیمی، $0/1mm$، کولیس‌های آزمایشگاهی، $0/02mm$ و ریزسنج، $0/01mm$ است.



شکل ۳-۲: ابزارهای گوناگون برای اندازه‌گیری طول.

۳-۲. بردار و کمیت‌های برداری

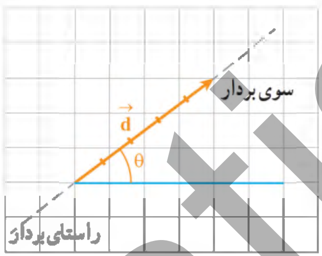
کمیت نرده‌ای و برداری: کمیت‌های فیزیکی را در یک تقسیم‌بندی می‌توان به دو گروه تقسیم کرد: کمیت‌هایی که برای مشخص شدن آنها برحسب یک یکای معین، تنها یک عدد کفایت می‌کند، کمیت نرده‌ای نامیده می‌شود. کمیّت‌هایی مانند زمان، جرم، طول، دما، جریان الکتریکی، انرژی، توان و ... از این دسته‌اند.

دسته‌ی دیگر کمیت‌ها، آنهایی هستند که برای مشخص شدنشان، داشتن اطلاعاتی در مورد اندازه‌ی آن‌ها کفایت نمی‌کند؛ بلکه باید جهت (راستا و سو) نیز در مورد آنها مشخص شود. کمیّت‌هایی مانند جابه‌جایی، سرعت، شتاب، نیرو، میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی و تکانه (اندازه حرکت) که علاوه بر بزرگی (اندازه)، جهت دارند و از قاعده‌ی جمع برداری پیروی می‌کنند، کمیّت‌های برداری نامیده می‌شوند.

روابط و عملیات ریاضی کمیّت‌های برداری: عملیات ریاضی بین کمیّت‌های برداری، مانند تساوی، جمع، تفریق و ... با عملیات ریاضی معمولی که قبلاً خوانده‌ایم، بسیار متفاوت است. در اینج به بررسی برخی از عملیات‌های ریاضی بین کمیت‌های برداری می‌پردازیم:

الف) نمایش بردار: برای مشخص کردن یک بردار، از نماد $\rightarrow$ در بالای آن استفاده می‌شود و به صورت $\vec{a}$، $\vec{b}$ و ... نمایش داده می‌شود.

ب) نمایش هندسی بردار: هر بردار را می‌توان با یک پاره‌خط جهت‌دار (پیکان) نمایش داد. اندازه‌ی این پاره‌خط را متناسب با بزرگی بردار در نظر می‌گیریم. نوک پیکان، جهت بردار و راستای بردار همان راستای پاره‌خط مورد نظر است.



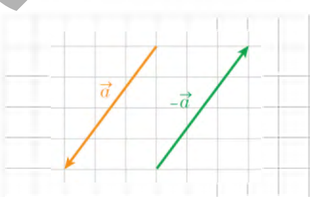
شکل ۳-۳: بردار $\vec{d}$ با اندازه و جهت آن مشخص می‌شود. بزرگی این بردار $d = |\vec{d}| = ۵$ است.

پ) بزرگی بردار: اندازه، بزرگی، طول یا مقدار برداری مانند $\vec{a}$ را به‌صورت‌های a یا $|\vec{a}|$ نمایش می‌دهیم. همان‌گونه که اشاره شد، a عبارتست از طول پاره‌خطی که به عنوان بردار رسم شده است.

ت) تساوی بردارها: دو یا چند بردار را زمانی مساوی می‌نامند که اولاً با هم موازی باشند، ثانیاً هم‌جهت باشند و ثالثاً دارای اندازه‌های برابر باشند. در این‌صورت می‌توان نوشت:

$\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow$ ($\vec{a}||\vec{b}$ و $a=b$ و بردارها هم‌جهت)

ث) قرینه‌ی یک بردار: قرینه‌ی هر بردار، برداری است که اندازه و راستای آن با اندازه و راستای بردار مورد نظر یکسان است، ولی جهت آن در خلاف جهت بردار اصلی است.

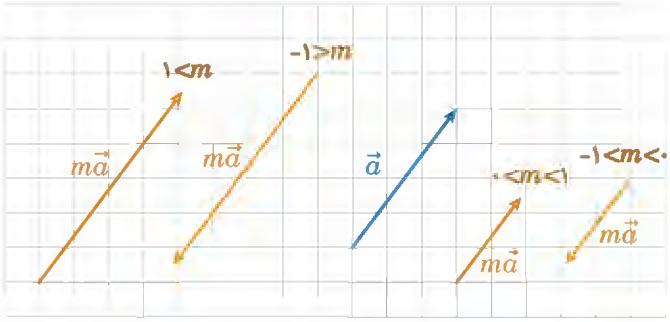


شکل ۳-۴: بردارهای $\vec{a}$ و $-\vec{a}$ قرینه‌ی یکدیگر هستند.

قرینه‌ی بردار $\vec{a}$ را به صورت $-\vec{a}$ نمایش می‌دهند و با توجه با آنچه گفته شد، $|\vec{a}|=|-\vec{a}|$ است.

ج) ضرب عدد در بُردار: اگر عددی مانند m در بردار $\vec{a}$ ضرب شود، برداری مانند $\vec{b}$ به‌دست می‌آید، به گونه‌ای که:

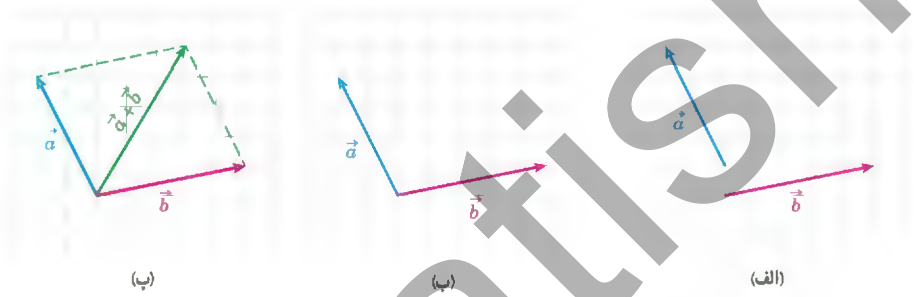
$$\vec{b}=m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \vec{b} \text{ راستای بردار} : \vec{b} \parallel \vec{a} \\ \vec{b} \text{ اندازه ی بردار} : b=|m|a \\ \vec{b} \text{ جهت بردار} : \begin{cases} m>0 \Rightarrow & \text{بردار } \vec{b} \text{ با بردار } \vec{a} \text{ هم جهت است.} \\ m<0 \Rightarrow & \text{بردار } \vec{b} \text{ در خلاف جهت بردار } \vec{a} \text{ است.} \end{cases} \end{cases}$$



شکل ۳-۵: اگر عددی مانند m در یک بردار ضرب شود، راستای بردار را تغییر نمی‌دهد.

چ) جمع بردارها: برای جمع بردارها، معمولاً دو روش بیان می‌شود که کاملاً معادل هستند.

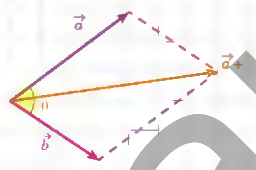
- **روش متوازی الاضلاع:** در این روش، ابتدا دو بردار را از یک نقطه رسم کرده و روی آن‌ها یک متوازی الاضلاع می‌سازیم. قطری از این متوازی الاضلاع که از محل مشترک دو بردار رسم شده است، جمع این دو بردار خواهد بود.



شکل ۳-۶: مراحل جمع دو بردار به روش متوازی الاضلاع.

این روش معمولاً زمانی استفاده می‌شود که بخواهیم جمع دو بردار را به‌دست آوریم. اگر تعداد بردارها بیش‌تر باشد، این روش اصلاً مناسب نیست.

اندازه‌ی جمع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که با یکدیگر زاویه‌ی θ می‌سازند، از رابطه‌ی زیر که از قضیه‌ی کسینوس‌ها در ریاضیات استخراج شده، به‌دست می‌آید:

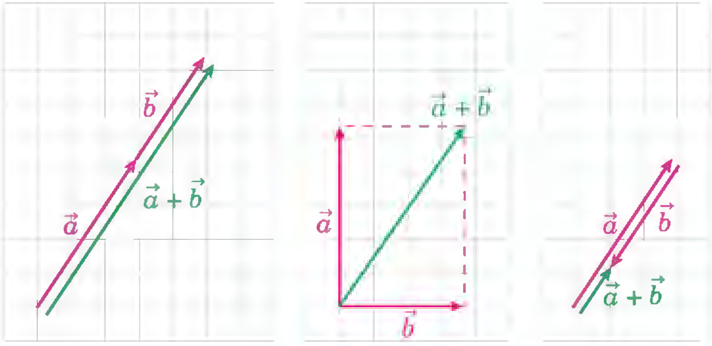


شکل ۳-۷: قضیه‌ی کسینوس‌ها برای اندازه‌ی بزرگی دو بردار.

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta} \qquad (۳-۱)$$

نکته: در حالت‌های خاصی که دو بردار در یک راستا یا برهم عمود باشند، داریم:

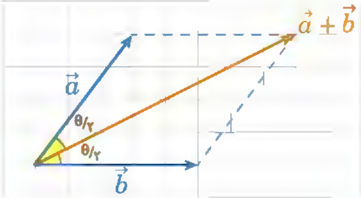
	$\theta=0$	$\theta=90^\circ$	$\theta=180^\circ$
$\lvert\vec{a}+\vec{b}\rvert$	$a+b$	$\sqrt{a^2+b^2}$	$\lvert a-b\rvert$
اندازه‌ی جمع دو بردار	جمع اندازه‌های دو بردار	–	قدر مطلق تفاضل اندازه‌های دو بردار



شکل ۳-۸: تعیین برایند (جمع) دو بردار در حالت‌های خاص.

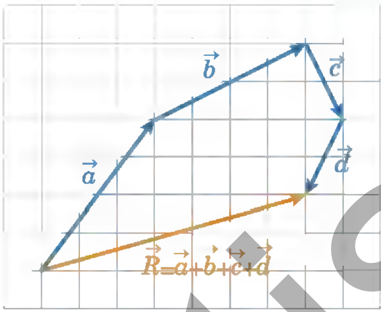
نکته: اگر اندازه‌ی دو بردار با هم برابر باشد ($a=b$)، جمع دو بردار بر روی نیم‌ساز زاویه‌ی میان آن‌ها قرار می‌گیرد و در این‌صورت می‌توان نوشت:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = a\sqrt{2(1+\cos\theta)} = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad (۳-۲)$$



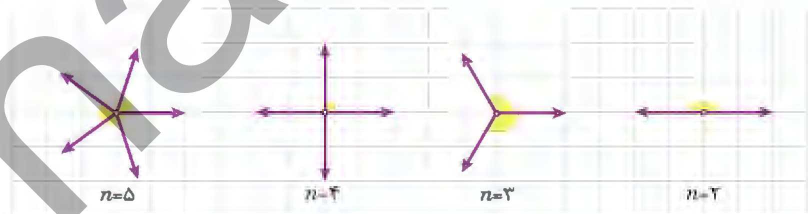
شکل ۳-۹: برایند دو بردار هم‌اندازه، روی نیمساز زاویه‌ی آن دو بردار قرار دارد.

- **روش چند ضلعی:** در این روش، بردارها را یکی پس از دیگری، به دنبال هم رسم می‌نماییم. برداری که ابتدای بردار اوّل را به انتهای بردار آخر متّصل نماید، جمع برداری این بردارها خواهد بود.



شکل ۳-۱۰: برایند چند بردار به کمک روش چند ضلعی.

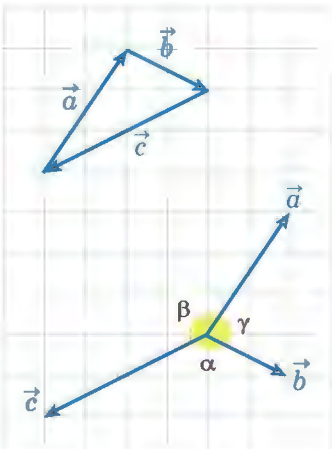
نکته: جمع برداریِ n بردار هم اندازه که زاویه‌ی میان دو بردار متوالی آن‌ها $\alpha=\frac{360^\circ}{n}$ باشد، صفر است.



شکل ۳-۱۱:

نکته (قضیه‌ی سینوس‌ها): اگر جمع سه بردار دلخواه صفر شود، آن‌ها حتماً تشکیل یک مثلث می‌دهند و در این‌صورت رابطه‌ی بسیار مهم زیر بین آن‌ها برقرار است:

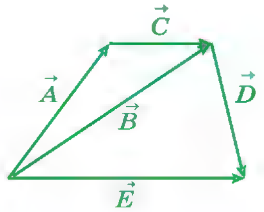
$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma} \qquad (۳-۳)$$



شکل ۳-۱۱: کاربرد قضیه‌ی سینوس‌ها برای حالتی که برایند سه بردار صفر است.

مثال ۷

در شکل مقابل، فرض کنید $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}+\vec{E}=\vec{R}$. بردار $\vec{R}-۲\vec{E}$ کدام است؟



۱) $\vec{B}$ ۲) $-\vec{B}$ ۳) $\vec{E}$ ۴) $-\vec{E}$

مثال ۸

اندازه‌ی برآیند دو بردار عمود بر هم، ۶ واحد است. اگر زاویه‌ی بین برآیند و یکی از بردارها ۳۰° باشد، طول بردار کوچک‌تر چند واحد است؟

مثال ۹

سه نیروی $\vec{F}_۱$، $\vec{F}_۲$ و $\vec{F}_۳$ دو به دو با هم زاویه‌ی ۱۲۰° می‌سازند. اگر اندازه‌ی نیروها به‌ترتیب ۵، ۱۰ و ۱۵ نیوتن باشد، برآیند آن‌ها چند نیوتن است؟

مثال ۱۰

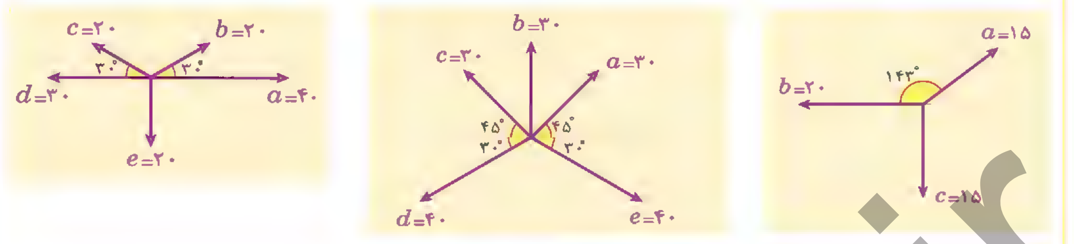
برآیند دو بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ با بردار $\vec{a}$ زاویه‌ی ۶۰° می‌سازد. اگر اندازه‌ی بردار $\vec{a}$، ۱۰ واحد و اندازه‌ی برآیند، ۵ واحد باشد، زاویه‌ی میان دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چند درجه است؟

مثال ۱۱

برآیند نیروی $F_۱=۳\text{N}$ ، $F_۲=۸\text{N}$ و $F_۳=۷\text{N}$ برابر صفر است. زاویه‌ی میان دو نیروی $F_۱$ و $F_۲$ چند رادیان است؟

مثال ۱۲

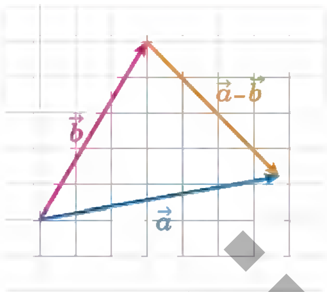
در هر کدام از شکل‌های زیر، اندازه‌ی برآیند بردارهای رسم شده را تعیین نمایید:



تفاضل بردارها: برای تعیین و رسم تفاضل میان دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ($\vec{a}-\vec{b}$) می‌توان از تبدیل آن به جمع استفاده کرد. یعنی می‌توان بردار $\vec{a}$ را با قرینه‌ی بردار $\vec{b}$ جمع کرد:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

علاوه بر این روش، گاهی اوقات مناسب است از روشی که به روش مثلث معروف است، برای این منظور استفاده شود. در این روش، ابتدا دو بردار را از یک نقطه رسم می‌نماییم. برداری‌که انتهای بردار دوّم را به انتهای بردار اوّل متّصل می‌نماید، تفاضل این دو بردار خواهد بود.



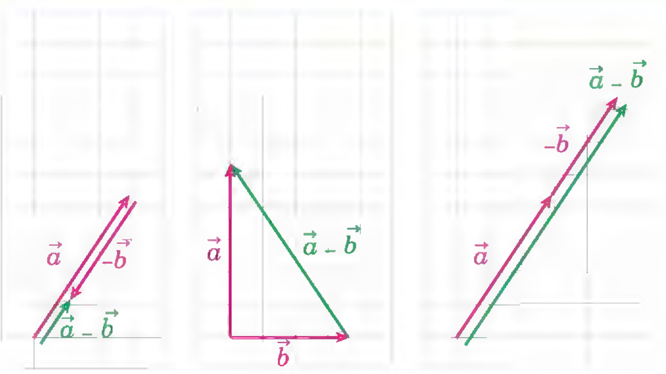
شکل ۳-۱۲: تفریق (تفاضل) بردارها با استفاده از روش مثلث.

اندازه‌ی تفاضل دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که با یکدیگر زاویه‌ی θ می‌سازند، از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

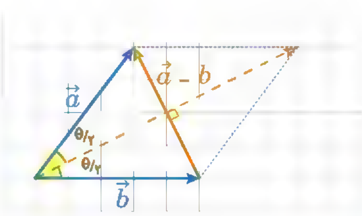
$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{a^۲+b^۲-۲ab\cos\theta} \qquad (۴-۳)$$

نکته: در حالت‌های خاصی که دو بردار در یک راستا یا برهم عمود باشند، داریم:

$\theta=۱۸۰^\circ$	$\theta=۹۰^\circ$	$\theta=۰$	
$a+b$	$\sqrt{a^۲+b^۲}$	$\|a-b\|$	$\|\vec{a}-\vec{b}\|$
جمع اندازه‌های دو بردار	-	قدر مطلق تفاضل اندازه‌های دو بردار	اندازه‌ی تفاضل دو بردار



شکل ۳-۱۳: تعیین تفاضل (تفریق) دو بردار در حالت‌های خاص.



شکل ۳-۱۴: تفاضل دو بردار هم‌اندازه، بر برایند آن دو بردار عمود است.

نکته: اگر اندازه‌ی دو بردار با هم برابر باشد ($a=b$)، در این‌صورت بردار تفاضل آن دو بردار بر بردار برایند آنها عمود است و می‌توان نوشت:

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = a\sqrt{۲(۱-\cos\theta)} = ۲a\sin(\tfrac{\theta}{۲}) \qquad (۵\text{-}۳)$$

نکته: برای دو بردار می‌دانیم:

- اگر دو بردار بر هم عمود باشند، اندازه‌ی جمع آن‌ها با اندازه‌ی تفاضل آن‌ها برابر است و بر عکس.
- اگر دو بردار، هم اندازه باشند، بردارهای مجموع و تفاضل آن‌ها بر هم عمود است و بر عکس.
- اندازه‌ی جمع و تفاضل دو بردار در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$a+b \geq \left|\vec{a}\pm\vec{b}\right| \geq |a-b|$$

مثال ۱۳

اگر اندازه‌ی برایند دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $R=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ و اندازه‌ی تفاضل آن دو بردار $R'=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ باشد، نشان دهید:

$$a^۲+b^۲=\frac{R^۲+R'^۲}{۲}$$

مثال ۱۴

اگر $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ، $a=۱۰$ ، $b=۶$ و $c=۷$ باشد، اندازه‌ی بردارهای $\vec{a}+\vec{b}$ ،$\vec{a}+\vec{c}$ ،$\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ و $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ را بیابید.

مثال ۱۵

زاویه‌ی میان دو بردار هم اندازه ۵۳° است. بزرگی برآیند دو بردار چند برابر بزرگی تفاضل آن‌ها است؟

$(\cos ۵۳^\circ = ۰/۶)$

مثال ۱۶

برآیند دو بردار با اندازه‌های مساوی که با یکدیگر زاویه‌ی α می‌سازند، ۴ واحد و اندازه‌ی تفاضل آن‌ها ۳ واحد است. بزرگی هر بردار را تعیین کنید.

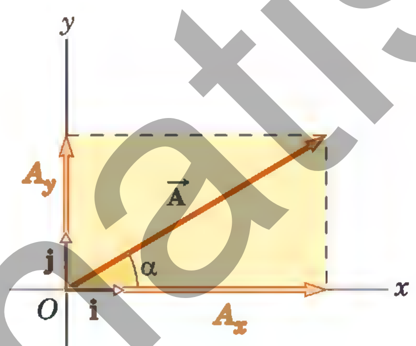
مثال ۱۷

برآیند سه نیرو با اندازه‌های $F_1=12\,N$ ، $F_2=16\,N$ و $F_3=20\,N$ صفر است. بزرگی تفاضل دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ چند نیوتون است؟

بُردارهای یکّه‌ی دستگاه مختصات دکارتی و تجزیه‌ی بردارها:

برای توصیف یک بردار در صفحه، می‌توان از دستگاه مختصات دکارتی استفاده کرد. در ریاضیات، اثبات می‌شود که هر بردار دلخواه در صفحه را می‌توان بر حسب دو بردار مستقل در همین صفحه تجزیه کرد.

برای سهولت در بررسی، دو بردار با طول‌های واحد که یکی از آن‌ها منطبق بر محور افقی و دیگری منطبق بر محور عمودی است را به عنوان بردارهای مستقل صفحه (بردارهای پایه) در نظر می‌گیریم و در این‌صورت می‌توانیم هر بردار دلخواه را بر حسب این دو بردار، که به آن‌ها بردارهای یکّه ($\hat{i}$ منطبق بر محور x و $\hat{j}$ منطبق بر محور y) گفته می‌شود، تجزیه کنیم. در این‌صورت با توجّه به شکل ۳-۱۵، اگر زاویه‌ی بردار با راستای مثبت محور xها را با α نشان دهیم، می‌توان نوشت:



شکل ۳-۱۵: تجزیه‌ی بردار برحسب بردارهای یکه‌ی $\hat{i}$ و $\hat{j}$.

$$\vec{A}=\vec{A}_x+\vec{A}_y=A_x\,\hat{i}+A_y\,\hat{j}$$

$$\cos\alpha=\frac{A_x}{A}\Rightarrow A_x=A\cos\alpha$$: مؤلفه‌ی افقی بردارِ A

$$\sin\alpha=\frac{A_y}{A}\Rightarrow A_y=A\sin\alpha$$: مؤلفه‌ی عمودی بردارِ A

$$\vec{A} = A\cos\alpha\,\hat{\mathbf{i}} + A\sin\alpha\,\hat{\mathbf{j}} \qquad (۶-۳)$$

گاهی اوقات نیز لازم است بتوانیم با معلوم بودن مؤلفه‌های یک بردار، اندازه‌ی بردار و زاویه‌ی آن با راستای مثبت محور xها را (زاویه‌ی α) تعیین نماییم. در این‌صورت با توجّه به شکل ۳-۱۵ می‌توان نوشت:

$$A^۲ = A_x^۲ + A_y^۲ \Rightarrow \left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^۲ + A_y^۲} \qquad (۷-۳)$$

$$\tan\alpha = \frac{A_y}{A_x} \qquad (۸-۳)$$

دقت کنید که این رابطه، دو پاسخ برای α به دست می‌دهد. پاسخ درست را باید با توجه به علامت مؤلفه‌های $\vec{A}$ در راستای دو محور تعیین کرد.

نکته: برای به‌دست آوردن جمع یا تفریق دو بردار، هنگامی که مؤلفه‌های آن‌ها معلوم است، کافی‌است عملیات مورد نظر را روی مؤلفه‌های نظیر، انجام دهیم:

$$\left.\begin{aligned}\vec{a} &= a_x\,\hat{\mathbf{i}} + a_y\,\hat{\mathbf{j}}\\ \vec{b} &= b_x\,\hat{\mathbf{i}} + b_y\,\hat{\mathbf{j}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{a}\pm\vec{b} = (a_x \pm b_x)\hat{\mathbf{i}} + (a_y \pm b_y)\hat{\mathbf{j}}$$

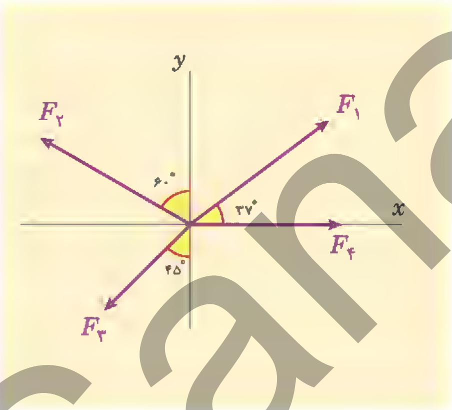
به‌همین ترتیب، اگر عددی مانند m، در بردار $\vec{a}$ ضرب شود، خواهیم داشت:

$$\vec{c} = m\vec{a} = m\left(a_x\,\hat{\mathbf{i}} + a_y\,\hat{\mathbf{j}}\right) = m a_x\,\hat{\mathbf{i}} + m a_y\,\hat{\mathbf{j}}$$

مثال ۱۸

اندازه‌ی برآیند بردارهای نشان داده شده در شکل را تعیین کنید:

$$F_۱ = F_۲ = ۱۰\,\mathrm{N},\ F_۳ = ۵\sqrt{۲}\,\mathrm{N},\ \ F_۴ = ۵\sqrt{۳}\,\mathrm{N}$$



مثال ۱۹

بردار $9\hat{\mathbf{i}}+12\hat{\mathbf{j}}$ را تجزیه کرده‌ایم ، به‌طوری که یکی از آن‌ها در ربع اوّل و با جهت مثبت محور xها زاویه‌ی 45° می‌سازد و دیگری به‌صورت $2\hat{\mathbf{i}}+\beta\hat{\mathbf{j}}$ است. مقدار β چه‌قدر است؟

مثال ۲۰

بردار $\vec{A}=3\hat{\mathbf{i}}+5\hat{\mathbf{j}}$ را به دو بردار $\vec{B}$ و $\vec{C}$ تجزیه کرده‌ایم، به‌طوری‌که بردار $\vec{B}$ با جهت مثبت محور xها زاویه 45° می‌سازد و بردار $\vec{C}$ بر محور xها عمود است. در این‌صورت بردار $\vec{C}$ را بنویسید.