۱ حرکت شناسی

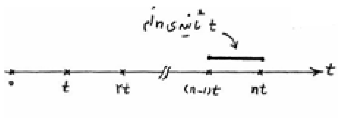
حرکت شناسی یا سینماتیک، شاخه‌ای از مکانیک کلاسیک است که در آن، حرکت اجسام و سیستم‌های متشکل از اجسام، بدون در نظر گرفتن نیروهای عامل حرکت، بررسی می‌شود.

موقعیّت یک ذرّه در فضا، اساسی‌ترین مفهوم در حرکت شناسی است. برای تعیین موقعیّت یک ذرّه، سه مورد باید تعیین شود: نقطه‌ی مرجع، فاصله از نقطه‌ی مرجع و جهت خط مستقیمی که در فضا، نقطه‌ی مرجع و ذرّه را به هم متّصل می‌کند.

زمان، مدّت: در مکانیک، کمیّت مستقلی که تمامی رخدادها در آن اتّفاق می‌افتد، زمان است. بنابراین می‌توان زمان را متغیّر اصلی در مکانیک محسوب کرد. هر اتفاق، در یک لحظه شروع می‌شود و در یک لحظه نیز پایان می‌پذیرد و فاصله‌ی زمانی میان این دو لحظه را مدّت زمان رویداد می‌نامند. گاهی اوقات نیز، می‌خواهیم کمیّتی را در یک لحظه‌ی خاص بشناسیم، لذا باید مراقب بود که این دو مطلب با یکدیگر اشتباه گرفته نشود: لحظه، مدّت!

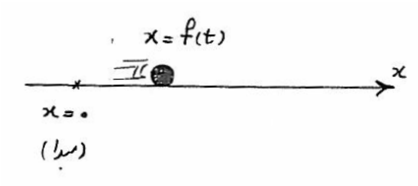
نکته: ثانیه‌ی n اُم حرکت، یعنی بازه‌ی زمانی بین $t=n-۱$ تا $t=n$ که گاهی به صورت $(n-۱,n)$ نمایش داده می‌شود. مثلاً ثانیه‌ی چهارم حرکت یعنی بازه‌ی زمانی $(۳s,۴s)$.

Sanatisharif.ir
مجری طرح توسعه عدالت آموزشی
www.sanatisharif.ir



✍ **نکته:** بازه‌ی زمانیِ t ثانیه‌ی nاُم یعنی بازه‌ای که با لحظه‌ی $(n-1)t$ آغاز شده و با لحظه‌ی nt پایان می‌پذیرد. به عبارت دیگر باید زمان را t ثانیه، t ثانیه تقسیم کرد و بازه‌ی nاُم را از میان آن‌ها در نظر گرفت!!

۱-۱. حرکت یک بُعدی (حرکت روی خط راست)



ساده‌ترین نوع حرکت، حرکت روی خط راست است. در این حالت، دستگاه مختصات را به گونه‌ای انتخاب می‌نماییم که یکی از محورهای آن، بر مسیر حرکت ذرّه‌ی مورد نظر منطبق باشد. انتخاب جهت و مبدأ این دستگاه مختصات، کاملاً دلخواه است.

مکان: در هر لحظه‌ی دلخواه متحرّک مورد نظر در مکان خاصّی قرار دارد. در حالت کلّی، این مکان با زمان تغییر می‌نماید. بنابراین می‌توان آن را به صورت $x = f(t)$ در نظر گرفت. که در این صورت رابطه‌ی مذکور را معادله‌ی مکان ـ زمان یا معادله‌ی حرکت می‌نامند. با معلوم بودن این رابطه، می‌توان مکان متحرّک در هر لحظه‌ی دلخواه را مشخّص کرد. همچنین می‌توان تعیین نمود که متحرّک درچه لحظه (یا لحظاتی) در مکان خاصی قرار دارد.

جابه‌جایی: همانگونه که گفته شد، متحرّک در لحظات مختلف می‌تواند در مکان‌های مختلفی قرار داشته باشد. بنابراین ممکن است این سؤال مطرح شود که در یک بازه‌ی زمانی مشخّص، متحرّک چه‌قدر جابه‌جا شده است؟

اگر متحرّکی در لحظه‌ی t_i در مکان x_i و در لحظه‌ی t_f در مکان x_f قرار داشته باشد، می‌توان نوشت:

جابه‌جایی در بازه‌ی t_i تا t_f: $\Delta x = x_f - x_i$ (۱-۱)

✍ **نکته:** برای تعیین جابه‌جایی در یک بازه‌ی زمانی، فقط و فقط مکان متحرّک در دو لحظه‌ی ابتدایی و انتهایی حرکت اهمیّت دارد.

مثال ۱

معادله‌ی مکان ـ زمان متحرکی در SI به صورت $x = -t^2 + 6t - 5$ است.

الف) این متحرّک در چه لحظه‌ای (یا لحظاتی) از مبدأ گذشته است؟

ب) جابه‌جایی متحرّک در ثانیه‌ی سوّم حرکت چند متر است؟

پ) پس از چه مدّت، متحرّک به محلِ اولیه‌ی خود باز می‌گردد؟

Sanatisharif.ir

سرعت متوسط: بر طبق تعریف، سرعت متوسط یک متحرّک در بازه‌ی زمانی (t_1, t_2) را با نماد $\bar{V}$ یا V_{avg} نشان می‌دهیم و داریم:

$$\bar{V}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_f-x_i}{t_f-t_i} \qquad (۱-۲)$$

یکای سرعت متوسط در SI، متر بر ثانیه ($\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$) است.

نکته: در مواردی که یک متحرّک، در بازه‌های زمانی متفاوت، مسیری را بر روی یک خط راست، با سرعت‌های مختلف می‌پیماید، می‌توان سرعت متوسط را از رابطه‌ی زیر به دست آورد:

$$\bar{V}=\frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}}=\frac{\pm\Delta x_1\pm\Delta x_2\pm\cdots}{\Delta t_1+\Delta t_2+\cdots} \qquad (۱-۳)$$

در این رابطه، علامت‌های $\pm$ در صورت کسر، با در نظر گرفتن جهت حرکت متحرک در بازه‌های زمانی مختلف تعیین می‌شود.

مثال ۲

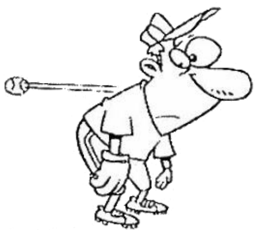
معادله‌ی حرکت متحرّکی در SI، به صورت $x=t^3-6t^2+5t-2$ است.

الف) در چه لحظه‌ای متحرّک از نقطه‌ی $x=-2\mathrm{m}$ می‌گذرد؟

ب) سرعت متوسط حرکت در بازه‌ی زمانی $(0, 2\mathrm{s})$ و بازه‌ی زمانی $(2\mathrm{s}, 4\mathrm{s})$ چه‌قدر است؟

مثال ۳

متحرّکی $\frac{2}{5}$ فاصله‌ی میان دو شهر را با سرعت $10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ و بقیه‌ی مسیر را با سرعت $5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ می‌پیماید. سرعت متوسط متحرّک در کل حرکت چه‌قدر است؟



Sanatisharif.ir

مثال ۴

متحرّکی نیمی از فاصله‌ی میان دو نقطه را با سرعت $5\frac{m}{s}$، نیمی از مسیر باقی مانده را با سرعت $6\frac{m}{s}$ و بقیه‌ی مسیر را با سرعت $2\frac{m}{s}$ طی می‌کند. سرعت متوسط متحرّک در کل مسیر چه‌قدر است؟

مثال ۵

اتومبیلی ابتدا به مدّت $10\ min$ با سرعت $10\frac{m}{s}$ حرکت می‌کند و سپس مسافت $5\,km$ را با سرعت $5\frac{m}{s}$ در همان جهت و در نهایت در مدّت $400\,s$ مسافت $5\,km$ را می‌پیماید. سرعت متحرّک در کلّ حرکت چه‌قدر است؟

مثال ۶

دوچرخه سواری با سرعت $20\frac{m}{s}$ به سمت شهر A که در فاصله‌ی $10\,km$ از نقطه‌ی شروع قرار دارد حرکت می‌کند و پس از رسیدن به این شهر، باز می‌گردد و به مدّت $250\,s$ با سرعت $36\frac{km}{h}$ رکاب می‌زند. سرعت متوسط دوچرخه‌سوار در این مدّت چه‌قدر است؟

سرعت لحظه‌ای: هرگاه بازه‌ی زمانی اندازه‌گیری سرعت متوسط بسیار کوچک باشد ($\Delta t \to 0$)، آنچه به دست می‌آید، عملاً سرعت لحظه‌ای یا سرعت متحرّک نامیده می‌شود. بنابراین به کمک آنچه در ریاضیات خوانده‌ایم، می‌توان نوشت:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} x = x'_t \qquad (۴-۱)$$

Sanatisharif.ir

به عبارت دیگر با مشتق‌گیری از معادله‌ی مکان ـ زمان، می‌توان به معادله‌ی سرعت ـ زمان دست یافت و به کمک آن سرعت متحرّک در لحظات مختلف را به دست آورد.

✍ **نکته:** علامت سرعت، بیانگر جهت حرکت متحرّک است. یعنی اگر $v>0$ باشد، متحرّک در جهت مثبت محور انتخاب شده و اگر $v<0$ باشد، متحرّک در خلاف جهت محور انتخاب شده در حال حرکت است.

◈ مثال ۷

معادله‌ی مکان ـ زمان متحرّکی در SI به صورت $x=2t^3-15t^2+24t+12$ است.

الف) متحرّک در چه لحظاتی متوقّف شده است؟

ب) سرعت متوسط بین دو لحظه‌ی توقّف چه‌قدر است؟

پ) سرعت متحرّک هنگامی‌که از نقطه‌ی $x=23\,\mathrm{m}$ می‌گذرد چه‌قدر است؟

ت) چه مدّت متحرّک در خلاف جهت محور xها حرکت کرده است؟

مسافت طی شده: همانطور که گفته شد، جابه‌جایی یک جسم در یک بازه‌ی زمانی، صرفاً به مکان نقاط ابتدایی و انتهایی بستگی دارد و مستقل از مسیری است که متحرّک در این مدّت پیموده است؛ اما مسافتی که متحرّک طی می‌نماید، کاملاً به مسیر حرکت بستگی دارد. در واقع مسافت طی شده در یک حرکت، برابر است با طول مسیری که متحرّک طی کرده است، تا از نقطه‌ی مبدأ به نقطه‌ی مقصد برسد.

✍ **نکته:** تنها در حالتی که جسم روی یک خط راست حرکت کند و در طول حرکت، جهت حرکت خود را تغییر ندهد، اندازه‌ی جابه‌جایی با مسافت طی شده برابر خواهد بود.

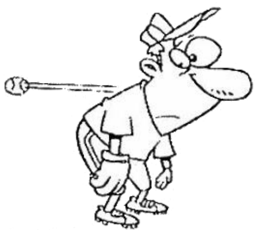
◈ مثال ۸

معادله‌ی حرکت متحرّکی در SI به صورت $x=3t^3-6t^2+4t-1$ است.

الف) متحرّک در طول حرکت خود چند بار تغییر جهت داده است؟

ب) جابه‌جایی متحرّک در ثانیه‌ی سوم حرکت چند متر است؟

پ) سرعت متوسط متحرّک در ۲ ثانیه‌ی دوم حرکت، چند برابر سرعت متحرّک در لحظه‌ی $t=3\mathrm{s}$ است؟



Sanatisharif.ir
مجری طرح توسعه عدالت آموزشی
www.sanatisharif

مثال ۹

معادله مکان ـ زمان متحرّکی در SI به صورت $x=-t^{2}+4t+6$ است.

الف) مسافت طی شده در ۴ ثانیه‌ی اوّل حرکت را بیابید.

ب) سرعت متوسط در ۴ ثانیه‌ی اوّل حرکت چه‌قدر است؟

شتاب متوسط: بر طبق تعریف، آهنگ متوسط تغییر سرعت را شتاب متوسط می‌نامند. یعنی داریم:

$$t_f \text{ تا } t_i \text{ شتاب متوسط در بازه ی }: \bar{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_f-v_i}{t_f-t_i} \qquad (۱-۵)$$

یکای شتاب متوسط در SI، متر بر مجذورثانیه ($\frac{m}{s^{2}}$) است.

مثال ۱۰

در مثال ۹، شتاب متوسط متحرّک را هنگامی که متحرّک در جهت مثبت محور x ها حرکت می‌کند، به دست آورید؟

مثال ۱۱

معادله‌ی مکان متحرّکی در SI به صورت $x=-3t^{2}+2t+1$ است.

الف) شتاب متوسط متحرک در بازه‌ی زمانی $(0\,,\,6\,s)$ چه‌قدر است؟

ب) شتاب متوسط متحرک در ۳ ثانیه‌ی چهارم چه‌قدر است؟

sanatisharif.ir
مجری طرح توسعه عدالت آموزشی
www.sanatisharif.ir

مثال ۱۲

ذرّه‌ای با سرعت $36\,\frac{km}{h}$ در امتداد یک خط راست حرکت می‌کند. این ذرّه به دیواری برخورد می‌کند و در همان امتداد اولیّه به عقب باز می‌گردد. اگر بزرگی سرعت ذرّه، $0/1s$ پس از ابتدای برخورد به دیوار، $18\,\frac{km}{h}$ باشد، بزرگی شتاب متوسط در این مدّت چند متر بر مجذور ثانیه است؟

شتاب لحظه‌ای: هرگاه بازه‌ی زمانی تعیین شتاب متوسط بسیار کوچک باشد، کمیّتی به دست می‌آید که به آن شتاب لحظه‌ای گفته می‌شود:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \Rightarrow a = v'_t = x''_t \qquad (1-6)$$

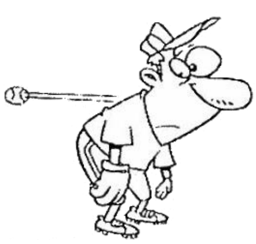
به عبارت دیگر، شتاب، مشتق سرعت و مشتق دوم مکان است، نسبت به زمان!

نکته: هرگاه علامت شتاب در خلاف جهت حرکت متحرّک باشد، به عبارت دیگر $a.v < 0$ باشد، حرکت را کُندشونده می‌نامند. در این حرکت، اندازه‌ی سرعت مرتباً در حال کاهش است و اگر با همین وضعیّت ادامه یابد متحرّک در نهایت متوقّف خواهد شد.

نکته: هرگاه جهت شتاب متحرّک، هم جهت با جهت سرعت آن باشد (یعنی $a.v > 0$)، حرکت را تُندشونده می‌نامند. در حرکت تندشونده، اندازه‌ی سرعت متحرّک مرتّباً در حال افزایش است!

مثال ۱۳

معادله‌ی سرعت ـ زمان متحرّکی در SI به صورت $v = -t^2 + 4t + 3$ است. در چه بازه‌های زمانی، حرکت کند شونده است؟ شتاب متوسط متحرّک در این بازه‌های زمانی را به دست آورید.



Sanatisharif.ir

مثال ۱۴

معادله‌ی حرکت متحرّکی در SI به صورت $x = t^{3} - 7/5t^{2} + 12t - 4$ است. ایـن متحـرّک در مجمـوع، چنـد ثانیه به صورت کُند شونده حرکت کرده است؟

۱-۱-۱. حرکت یکنواخت

حرکت یکنواخت، حرکتی است بر روی خط راست که در آن، سرعت متوسط در تمامی بازه‌های زمانی دلخواه با هم برابر است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که سرعت لحظه‌ای متحرّک همواره ثابت و در نتیجه شتاب در این حرکت صفر است ($a = 0$).

با توجّه به تعریف بالا، می‌توان معادلات زیر را به راحتی استخراج کرد:

$$\overline{V} = v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = v\Delta t$$

$$x = vt + x_{\circ} \qquad (1-7)$$

معادله‌ی اخیر را معادله‌ی حرکتِ یکنواخت می‌نامند. همانگونه که مشاهده می‌شود، این معادله از درجه‌ی اول و یک معادله‌ی خطی نسبت به زمان است.

مثال ۱۵

جسمی‌که با سرعت ثابت بر محور xها حرکت می‌کند. در لحظـه‌ی $t_1 = 5\,s$ در مکـان $x_1 = 16\,m$ و در لحظـه‌ی $t_2 = 7\,s$ در مکان $x_2 = 24\,m$ قرار دارد.

الف) معادله‌ی حرکت جسم در SI را بنویسید.

ب) متحرّک در شروع حرکت، در چه فاصله‌ای از مبدأ قرار دارد؟

مثال ۱۶

۲۰ ثانیه طول می‌کشد تا قطاری به طول $200\,m$ که با سرعت ثابت $30\frac{m}{s}$ در حرکت است، به طور کامل از روی پلی عبور نماید. طول پل چند متر است؟

Sanatisharif.ir

مثال ۱۷

دو اتومبیل با سرعت‌های $10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ و $8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ به طور همزمان از یک نقطه، به سمت مقصد مشترکی حرکت می‌کنند. اگر حداکثر فاصله‌ی میان آن‌ها در طول مسیر و قبل از رسیدن متحرّک سریع‌تر، به مقصد، $160\,\mathrm{m}$ باشد، فاصله‌ی میان مبدأ و مقصد چند متر است؟

مثال ۱۸

دو ترن که سرعت یکی نصف دیگری است، از دو شهر به فاصله‌ی $800\,\mathrm{km}$، در ساعت ۸ صبح رو به هم حرکت می‌کنند و ساعت ۱۲ ظهر به هم می‌رسند. ترن کُندتر، در چه ساعتی به شهر دیگر می‌رسد؟

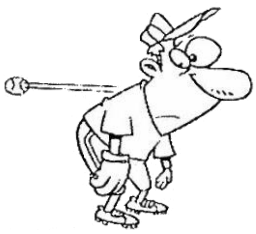
مثال ۱۹

دو متحرّک، هم زمان از نقاط A و B به سمت یکدیگر حرکت می‌کنند و در نقطه‌ی C به هم می‌رسند. ۴۰ ثانیه پس از این، متحرّک اوّل به نقطه‌ی B می‌رسد. چند ثانیه طول می‌کشد تا متحرّک دوّم از C به A برسد؟

۱-۱-۲. حرکت با شتاب ثابت

هرگاه اندازه و جهت شتاب متحرّکی که روی خط راست حرکت می‌کند، تغییر نکند، حرکت را حرکت با شتاب ثابت می‌نامیم. در این صورت حرکت، شتاب متوسط در هر بازه‌ی زمانی، با شتاب لحظه‌ای برابر است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$a = \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta v = a\,\Delta t$$



Sanatisharif.ir

$$v = at + v_0 \qquad (1-8)$$

این معادله را معادله‌ی سرعت ـ زمان می‌نامند. همانگونه که مشاهده می‌شود، در این رابطه، x وجود ندارد. لذا این معادله، به معادله‌ی مستقل از مکان نیز شناخته می‌شود. این معادله معمولاً در مواردی به کار می‌رود که مکان متحرّک جزو معلومات و مجهولات مورد نظر نباشد!

مثال ۲۰

متحرکی با شتاب ثابت در مسیر مستقیم در حرکت است. اگر سرعت آن در دو لحظه $t_1 = 5\,s$ و $t_2 = 6\,s$ به ترتیب $v_1 = 10\frac{m}{s}$ و $v_2 = 34\frac{m}{s}$ باشد، سرعت اولیّه‌ی متحرّک و معادله‌ی سرعت ـ زمان آن را به دست آورید.

برای جسمی که با شتاب ثابت در حرکت است، می‌توان معادله‌ی مکان ـ زمان یا معادله‌ی حرکت را با انتگرال‌گیری[1] از معادله‌ی سرعت ـ زمان به دست آورد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \qquad (1-9)$$

همانگونه که به وضوح دیده می‌شود، در این رابطه، v (سرعت نهایی) وجود ندارد؛ لذا این رابطه‌ها را معادله‌ی مسقل از سرعت نهایی نیز می‌نامند و زمانی از آن استفاده می‌شود که v، جزو معلومات و مجهولات مسأله نباشد!

مثال ۲۱

متحرّکی از حال سکون با شتاب ثابت $2\frac{m}{s^2}$ به حرکت در می‌آید. نسبت زمان لازم برای طی $100\,m$ اول به زمان لازم برای طی $96\,m$ بعدی را بیابید.

---

۱. در مورد نحوه‌ی انتگرال‌گیری و مفهوم آن، در پایان فصل، توضیحات مختصری آورده شده است!

sanatisharif.ir

◈ مثال ۲۲

در یک مسیر مستقیم، اتومبیلی با سرعت $۲۰\frac{m}{s}$ در حرکت است. $۳۶m$ جلوتر، اتومبیل دیگری با شتاب ثابت $۲\frac{m}{s^2}$ از حال سکون در همان جهت به راه می‌افتد. در این حرکت، اتومبیل‌ها دو بار از هم سبقت می‌گیرند. فاصله‌ی زمانی میان این دو سبقت چند ثانیه است؟

◈ مثال ۲۳

اتومبیلی با سرعت ثابت $۴\frac{m}{s}$ بر مسیری مستقیم در حرکت است. ناگهان راننده به مدّت $۶s$ پای خود را روی پدال گاز فشار می‌دهد که در نتیجه‌ی آن، سرعت اتومبیل با آهنگ ثابتی افزایش می‌یابد. اگر اتومبیل در ۲ ثانیه‌ی آخر مدّت یاد شده، $۳۶m$ جابه‌جا شود، شتاب متحرّک را بیابید.

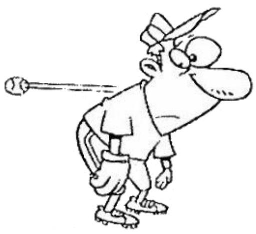
نکته: با توجّه به رابطه‌ی مکان ـ زمان و تعریف سرعت متوسط، می‌توان نوشت:

$$\bar{V}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\frac{۱}{۲}at^{۲}+v_{\circ}t}{t}$$

$$\bar{V}=\frac{۱}{۲}at+v_{\circ} \qquad (۱۰-۱)$$

◈ مثال ۲۴

سرعت متوسط متحرّکی که با شتاب ثابت $۲\frac{m}{s^2}$ در حرکت است، در ۵ ثانیه‌ی اوّل حرکت، $۳۰\frac{m}{s}$ است. سرعت اولیّه‌ی این متحرّک را تعیین کنید.



Sanatisharif.ir
مجری طرح توسعه عدالت آموزشی
www.sanatisharif.ir

نکته: اگر در رابطه‌ی ۱-۱۰، به جای t، مقدار آن را از معادله‌ی سرعت ـ زمان قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} v=at+v_0 \Rightarrow t=\dfrac{v-v_0}{a} \\ \bar{V}=\dfrac{1}{2}at+v_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{V}=\dfrac{1}{2}a\dfrac{v-v_0}{a}+v_0 \Rightarrow \bar{V}=\dfrac{1}{2}v-\dfrac{1}{2}v_0+v_0$$

$$\bar{V}=\frac{v+v_0}{2} \qquad (۱۱-۱)$$

اکنون با توجّه به رابطه‌ی اخیر و تعریف سرعت متوسط داریم:

$$\bar{V}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad , \quad \bar{V}=\frac{v+v_0}{2}$$

$$x-x_0=\frac{v+v_0}{2}t \qquad (۱۲-۱)$$

این رابطه ـ که رابطه‌ای بسیار مفید است! ـ را رابطه‌ی مستقل از شتاب می‌نامند و شبیه رابطه‌های قبلی، زمانی استفاده می‌شود که شتاب، جزو معلومات و مجهولات مسأله نباشد!

مثال ۲۵

متحرّکی با شتاب ثابت بر مسیر مستقیمی در حرکت است. اگر سرعت این متحرّک در مدّت ۱۵ دقیقه از $۶۰\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ به $۱۴۰\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ برسد متحرّک در این مدّت چند کیلومتر را پیموده است؟

مثال ۲۶

متحرّکی با شتاب ثابت، مسافت $۴۸\,\mathrm{m}$ را بر مسیر مستقیم بین دو لحظه‌ی t و $t+۳$ ثانیه طی می‌کند و در پایان این مسیر سرعتش به $۲۰\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ می‌رسد. سرعت این متحرّک در لحظه‌ی t چه‌قدر است؟

Sanatisharif.ir

مثال ۲۷

متحرّکی از حال سکون با شتاب ثابت به حرکت در می‌آید و پس از t ثانیه سرعتش به v می‌رسد. سپس به مدّت $2t$ ثانیه سرعتش به طور یکنواخت کاهش می‌یابد تا به $\frac{v}{2}$ برسد. کلّ مسافتی که متحرّک تا این لحظه پیموده است را بر حسب v و t بیابید.

اکنون با حذف پارامتر t (زمان) از معادلات بیان شده، می‌توان به معادله‌ی مستقل از زمان دست یافت.

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{v+v_0}{2}t \\ t &= \frac{v-v_0}{a} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x - x_0 = \frac{v+v_0}{2} \times \frac{v-v_0}{a}$$

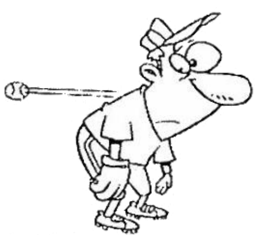
$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \qquad (۱۳-۱)$$

مثال ۲۸

گلوله‌ای با سرعت $80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ به تنه‌ی درختی به ضخامت $20\,\mathrm{cm}$ برخورد کرده و با سرعت $20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ از آن خارج می‌شود. اگر شتاب حرکت گلوله در داخل تنه‌ی درخت ثابت فرض شود، اندازه این شتاب را بیابید.

مثال ۲۹

متحرّکی روی محور x ها از مکان $x_0 = +4\,\mathrm{m}$ با سرعت اولیه‌ی $8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ و شتاب ثابت، به حرکت در می‌آید و در مکان $x = +7/5\,\mathrm{m}$ سرعتش به $6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ می‌رسد. معادله‌ی حرکت این متحرّک در SI را بنویسید.



Sanatisharif.ir

مجری طرح توسعه عدالت آموزشی
www.sanatisharif.ir

مثال ۳۰

جسمی با شتاب ثابت بر روی یک خط راست حرکت می‌کند و با سرعت‌های $۲\frac{m}{s}$ و $۳\frac{m}{s}$ به ترتیب از مکان‌های $x_۱=۱m$ و $x_۲=۱۱m$ عبور می‌کند. این متحرّک با چه سرعتی از مکان $x_۳=۴۳m$ می‌گذرد؟

مثال ۳۱

جسمی با شتاب ثابت بر روی یک خط راست حرکت می‌کند و با سرعت‌های $۱۰\frac{m}{s}$ و $۳۰\frac{m}{s}$ به ترتیب از نقاط A و B عبور می‌کند. سرعت جسم در هنگام عبور از وسط پاره خط AB چه‌قدر است؟

نکته: متحرّکی را در نظر بگیرید که با سرعت $v_۰$ در حال حرکت روی خط راست است که ناگهان حرکت کندشونده‌ی با شتاب a انجام می‌دهد و پس از طی زمان t_s و پیمودن مسافت x_s متوقف می‌شود در این صورت زمان توقّف و مسافت قبل از توقف را می‌توان از روابط زیر به دست آورد:

$$v=at+v_۰ \xRightarrow{v=۰} ۰=at_s+v_۰$$

$$t_s=\frac{v_۰}{|a|} \qquad (۱۴-۱)$$

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x \xRightarrow{v=۰} ۰-v_۰^۲=۲ax_s$$

$$x_s=\frac{v_۰^۲}{|۲a|} \qquad (۱۵-۱)$$

و از ترکیب دو رابطه‌ی اخیر می‌توان به رابطه‌ی $x_s=\frac{۱}{۲}a\,t_s^۲$ دست یافت.

مثال ۳۲

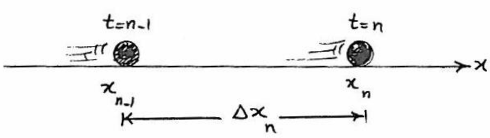
اتومبیلی با سرعت $۴۰\frac{km}{h}$ حرکت می‌کند و پس از ترمز کردن، با طی مسافت $۲۵m$ می‌ایستد. اگر این اتومبیل با سرعت $۸۰\frac{km}{h}$ حرکت کند و با همان شتاب ثابت ترمز نماید پس از طی چه مسافتی خواهد ایستاد؟

sanatisharif.ir
مجری طرح توسعه عدالت آموزشی
www.sanatisharif.ir

مثال ۳۳

متحرّکی با سرعت $v_{\circ}$ در حال حرکت بر روی خط راست است که ناگهان با شتاب $۲\frac{m}{s^۲}$ ترمز می‌نماید و بعد از گذشت $۲۰s$ متوقّف می‌شود. متحرّک در این مدّت چه مسافتی را پیموده است؟

✍ **نکته:** برای تعیین جابه‌جایی متحرّک در ثانیه‌ی nاُم (Δx_n) باید مکان متحرّک در لحظه‌ی $t=n-۱$ را از مکان متحرک در لحظه‌ی $t=n$ کم کنیم. اکنون اگر متحرّک با شتاب ثابت در حال حرکت باشد می‌توان نوشت:



$$\Delta x_n = x_n - x_{n-۱}$$
$$= \left[\frac{۱}{۲}an^۲ + v_{\circ}n + x_{\circ}\right] - \left[\frac{۱}{۲}a(n-۱)^۲ + v_{\circ}(n-۱) + x_{\circ}\right]$$
$$\Rightarrow \Delta x_n = \frac{۱}{۲}a(۲n-۱) + v_{\circ}$$

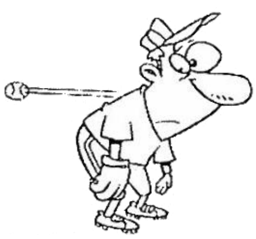
$$\Delta x_n = a(n-۰/۵) + v_{\circ} \qquad (۱۶-۱)$$

مثال ۳۴

متحرّکی از حال سکون با شتاب شروع به حرکت می‌کند. جابه‌جایی متحرّک در ثانیه‌ی پنجم، چند برابر جابه‌جایی متحرّک در ثانیه‌ی سوم حرکت است؟

مثال ۳۵

متحرّکی با شتاب ثابت در حرکت است و جابه‌جایی‌ها آن در ثانیه‌ی هفتم حرکت، $۶m$ بیش از جابه‌جایی آن در ثانیه‌ی چهارم است. شتاب متحرّک را بیابید.



Sanatisharif.ir
مجری طرح توسعه عدالت آموزشی www.sanatisharif.ir

نکته: در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، جابه‌جایی در ثانیه‌های متوالی، یک تصاعد حسابی با قدر نسبت a (شتاب) تشکیل می‌دهند. یعنی اگر به جابه‌جایی در هر ثانیه، مقدار a را اضافه نماییم، جابه‌جایی در ثانیه‌ی بعدی به‌دست می‌آید:

$$\Delta x_n - \Delta x_{n-1} = a \qquad (1-17)$$

با تعمیم نکته‌ی فوق، می‌توان به رابطه‌ی زیبای زیر دست یافت:

$$a = \frac{\Delta x_m - \Delta x_n}{m-n} \qquad (1-18)$$

مثال ۳۶

جسمی با شتاب ثابت بر روی یک خط راست در حرکت است، در ثانیه‌ی سوم $12\,m$ و در ثانیه‌ی هفتم، $20\,m$ جابه‌جا می‌شود. این جسم در ثانیه‌ی پنجم چند متر جابه‌جا می‌شود؟ در ثانیه‌ی دهم چه‌طور؟

مثال ۳۷

جسمی با شتاب ثابت، بر روی خط راست در حرکت است و در ثانیه‌ی پنجم حرکت، $20\,m$ را می‌پیماید. جابه‌جایی متحرّک دربازه‌ی زمانی $(3\,s, 6\,s)$ چند متر است؟

مثال ۳۸

سرعت اولیه‌ی متحرّکی که با شتاب ثابت بر روی خط راست حرکت می‌کند، $15\,\frac{m}{s}$ است. مسافتی که این متحرّک درهر ثانیه می‌پیماید، $3\,m$ کمتر از مسافت ثانیه‌ی قبل است. این متحرّک از مبدأ زمان تا لحظه‌ی توقّف چه مسافتی را می‌پیماید؟

نکته: برای جسمی که با شتاب ثابت بر روی خط راست حرکت می‌کند، می‌توان جابه‌جایی در t ثانیه‌ی nاُم را از رابطه‌ی زیر تعیین کرد:

$$\Delta x_{n,t} = at^2(n-0/5) + v_0 t \qquad (1-19)$$

Sanatisharif.ir

مثال ۳۹

ذرّه‌ای با سرعت اولیه $5\frac{m}{s}$ و با شتاب $2\frac{m}{s^2}$ بر روی خط راست در حرکت است.

الف) جابه‌جایی متحرّک در ۵ ثانیه‌ی سوم حرکت چند متر است؟

ب) جابه‌جایی متحرّک در ۳ ثانیه‌ی پنجم حرکت را بیابید.

نکته: در تمامی روابط حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست، سرعت اولیه (v_0) حضور دارد. مناسب است که رابطه‌ای مستقل از این کمیّت نیز به دست آوریم. برای این کار کافی است v_0 را از میان معادلات حذف نماییم.

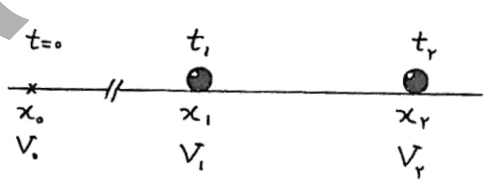
$$\left.\begin{array}{r} v = at + v_0 \Rightarrow \ v_0 = v - at \\ x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{1}{2}at^2 + (v - at)t + x_0$$

$$x = -\frac{1}{2}at^2 + vt + x_0 \qquad (1-20)$$

مثال ۴۰

متحرّکی در مسیر مستقیم و با شتاب ثابت، فاصله‌ی ۸۰ متری از A تا B را در مدّت ۸s طی می‌کند و در لحظه‌ی رسیدن به نقطه‌ی B، سرعتش $15\frac{m}{s}$ است. شتاب متحرّک را بیابید.

نکته: روابط مربوط با شتاب ثابت بر روی خط راست را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد و در هر بازه‌ی زمانی استفاده کرد:

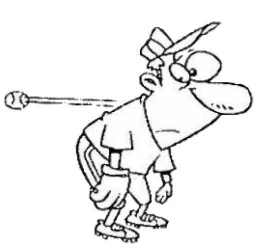


معادله‌ی سرعت ـ زمان : $v_2 = a(t_2 - t_1) + v_1$

معادله‌ی مستقل از زمان : $v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1)$

معادله‌ی مستقل از شتاب : $x_2 - x_1 = \frac{v_2 + v_1}{2}(t_2 - t_1)$

سرعت متوسط : $\overline{V} = \frac{v_1 + v_2}{2}$



Sanatisharif.ir

۱-۱-۳. تحلیل نمودارهای حرکت

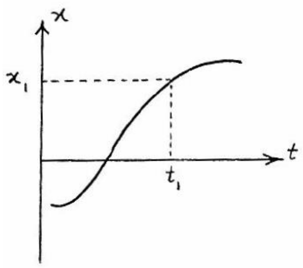
بیان شد که وقتی جسمی بر روی خط راست حرکت می‌کند، مکان آن در حالت کلّی، تابعی از زمان است و به صورت $x=f(t)$ در نظر گرفته می‌شود. اکنون اگر این تابع را در دستگاه مختصات $x-t$ رسم نماییم، نمودار مکان ـ زمانِ حرکت را رسم کرده‌ایم. به همین ترتیب می‌توان نمودارهای سرعت ـ زمان و شتاب ـ زمان را نیز برای متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، رسم کرد.

از این نمودارها اطّلاعات بسیار مفیدی در مورد حرکت را می‌توان استخراج کرد. در ادامه به بررسی نمودارهای حرکت و نحوه‌ی استخراج اطلاعات از آن‌ها می‌پردازیم:

الف. نمودار مکان ــ زمان

از روی نمودار مکان ـ زمان یک جسم، می‌توان اطّلاعات زیر را به دست آورد:

- مکان متحرّک:



ساده‌ترین چیزی که می‌توان از نمودار مکان - زمان به دست آورد، مکان متحرّک در لحظات دلخواه است. برای این منظور کافی است از لحظه‌ی مورد نظر، واقع بر محور زمان، خطی عمود بر محور افقی رسم نماییم تا نمودار را قطع کند و سپس از نقطه‌ی به دست آمده، خطی موازی محور افقی رسم نماییم تا مکان ذره را مشخص کند.

- جابه‌جایی:

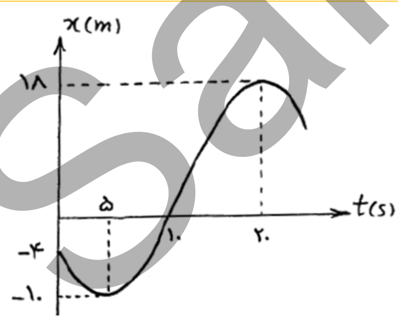
با در دست داشتن مکان متحرّک در لحظات مختلف، به راحتی می‌توان جابه‌جایی جسم را در بازه‌ی زمانی مورد نظر به دست آورد:

$$\Delta x = x_f - x_i$$

- مسافت طی شده:

اگر مجموع جابه‌جایی متحرّک در جهت مثبت را با قدر مطلق مجموع جابه‌جایی‌های آن در جهت منفی جمع نماییم، مسافت طی شده توسط متحرّک به دست می‌آید.

مثال ۴۱



نمودار مکان ـ زمان متحرّکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند. نشان داده شده است.

الف) جابه‌جایی متحرّک در ۲۰ ثانیه‌ی اوّل حرکت چند متر است؟

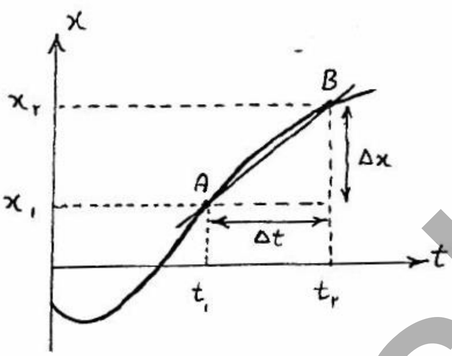
ب) مسافت طی شده در ۱۰ ثانیه‌ی اوّل، چند برابر مسافت طی شده در ۱۰ ثانیه‌ی دوم است؟

پ) مسافت طی شده در ۱۰ثانیه ی اوّل، چند برابر مسافت طی شده در ۱۰ ثانیه ی دوم است؟

Sanatisharif.ir
مجری طرح توسعه عدالت آموزشی
www.sanatisharif.ir

- سرعت متوسط:

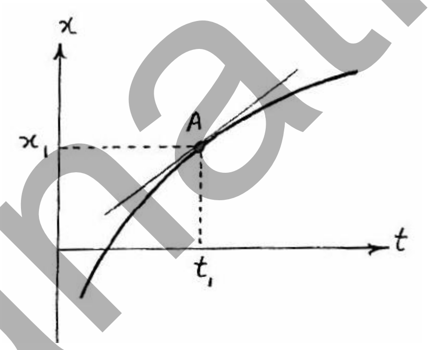
با معلوم بودن جابه‌جایی (Δx) و بازه‌ی زمانی (Δt) به راحتی می‌توان سرعت متوسط را به کمک تعریف آن یعنی رابطه‌ی $\overline{V}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ تعیین کرد. با توجّه به شکل مقابل، تعبیر هندسی سرعت متوسط در یک بازه‌ی زمانی، چنین بیان می‌شود:



سرعت متوسط یک متحرّک در یک بازه‌ی زمانی، برابر شیب پاره‌خطی است که نقاط متناظر با آن دو لحظه روی نمودار را به هم وصل می‌کند.

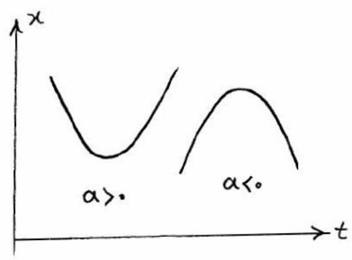
- سرعت لحظه‌ای:

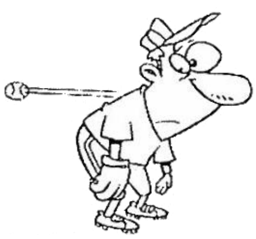
در تعریف سرعت لحظه‌ای دیدیم که $v=\dfrac{dx}{dt}$ است. یعنی سرعت مشتق تابع $x-t$ بر حسب زمان است. از سوی دیگر در ریاضیات خوانده‌ایم که برای به دست آوردن مشتق یک تابع در یک نقطه‌ی مورد نظر کافی است شیب خط مماس بر نمودار نمایش تابع در آن نقطه را به دست آوریم. بنابراین سرعت متحرّک در هر لحظه، برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در آن لحظه است.



- علامت شتاب:

با توجّه به آن‌که مشتق دوّم مکان نسبت به زمان، شتاب متحرّک را تعیین می‌کند و از سوی دیگر مشتق دوّم یک تابع، جهت تقعّر آن تابع است، می‌توان نتیجه گرفت جهت تقعر نمودار مکان ـ زمان، بیان کننده‌ی علامت شتاب است.

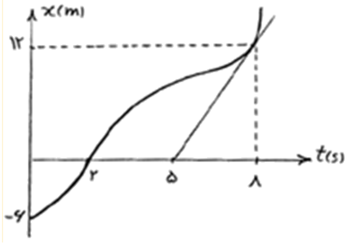




Sanatisharif.ir

مثال ۴۲

با توجّه به نمودار روبه‌رو، سرعت متحـرّک در لحظـه‌ی $t = ۸s$، چنـد برابر سرعت متوسط آن در کل حرکت است؟



مثال ۴۳

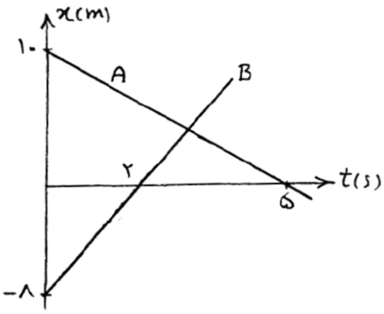
در مثال ۴۲، سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی $(۲s, ۸s)$ چه‌قدر است؟

مثال ۴۴

نمودار مکان ـ زمان دو متحرّک A و B که بر روی یک خط راست در حرکتند، مطابق شکل مقابل است.

الف) دو متحرّک در چه لحظه‌ای به هم می‌رسند؟

ب) در چه لحظاتی فاصله‌ی میان آن‌ها $۱۶m$ می‌شود؟

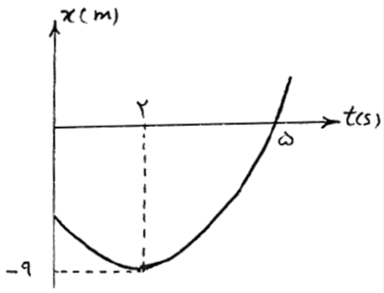


نکته: تنها در صورتی از روی نمـودار مکـان ـ زمـان مـی‌تـوان مقـدار شـتاب متحـرک را تعیـین کرد که حرکت با شتاب ثابت باشـد. در ایـن وضـعیت، نمـودار مکـان ـ زمـان متحـرک یـک سـهمی اسـت و برای تعیـین شـتاب، مـی‌تـوان از معـادلات حرکـت بـا شـتاب ثابـت، بـه ویـژه معـادلات مسـتقل از شـتاب و مستقل از مکان استفاده کرد.

Sanatisharif.ir

◈ مثال ۴۵

نمودار مکان ـ زمان متحرّکی که بر روی خط راست حرکت مـی‌کنـد، سهمی نشان داده شده در شکل مقابل است.



الف) سرعت اولیه و شتاب متحرّک را بیابید.

ب) در لحظه‌ای که متحرّک از مبدأ زمان می‌گذرد، سرعتش چند متر بر ثانیه است؟

ج) معادله‌ی حرکت را برای آن بنویسید.

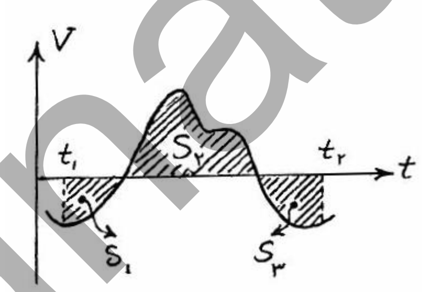
د) سرعت متوسط متحرّک در ۵ ثانیه‌ی اوّل حرکت چه‌قدر است؟

ب. نمودار سرعت ـ زمان

شاید بتوان مهم‌ترین و پرکاربردترین نمودار حرکت را نمودار سرعت ـ زمان به حساب آورد. تمامی اطلاعات حرکت، به جز مکان متحرّک را می‌توان از این نمودار استخراج کرد:

- جابه‌جایی:

از آنجا که سرعت، مشتق مکان نسبت به زمان است (و در نتیجه مکان، انتگرال سرعت نسبت به زمان می‌باشد!) می‌توان نتیجه گرفت:



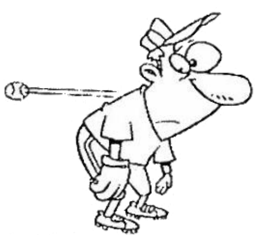
مساحت بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان در یک بازه‌ی زمانی، برابر جابه‌جایی متحرّک در آن بازه‌ی زمانی است. یعنی:

$$\Delta x = -S_1 + S_2 - S_3 \pm \cdots \qquad (۱-؟؟)$$

✍ **نکته:** اگر *فقط* نمودار سرعت ـ زمان را در اختیار داشته باشیم، نمی‌توانیم اطّلاعاتی در مورد مکان ذرّه به دست آوریم. بلکه فقط تغییر مکان را می‌توان به دست آورد.

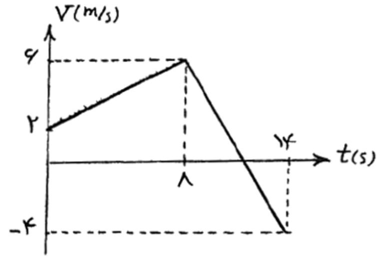
- مسافت طی شده:

با توجّه به تعریف مسافت طی شده، می‌توان گفت: مسافت طی شده توسط متحرّک در یک بازه‌ی زمانی، برابرِ مجموع قدر مطلق مساحت‌های محصور بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان در آن بازه‌ی زمانی است.



Sanatisharif.ir

مثال ۴۶



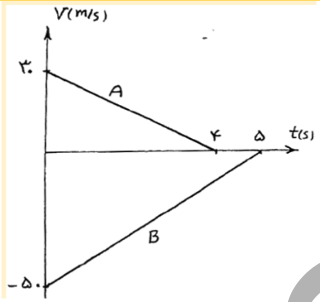
نمودار سرعت ـ زمان متحرّکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل است.

الف) متحرّک در کلّ حرکت (۱۴ثانیه) چه مسافتی پیموده و چند متر جابه‌جا شده است؟

ب) حداکثر فاصله‌ی متحرّک تا نقطه‌ی شروع حرکت چند متر است؟

ج) در ۴ ثانیه‌ی دوم حرکت، متحرّک چند متر جابه‌جا شده است؟

مثال ۴۷



نمودار سرعت ـ زمان دو قطار که بر روی یک ریل، یکدیگر را در فاصله‌ی $300\,\text{m}$ متری از هم می‌بینند و ترمز می‌نمایند، مطابق شکل آمده است.

الف) در لحظه‌ای که قطار A متوقّف شده است، سرعت قطار B چه‌قدر است؟

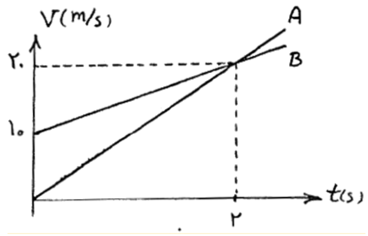
ب) در این لحظه، فاصله‌ی دو قطار از هم چند متر است؟

ج) حداقل فاصله‌ی دو قطار از هم چند متر خواهد شد؟

Sanatisharif.ir
مجری طرح توسعه عدالت آموزشی
www.sanatisharif.ir

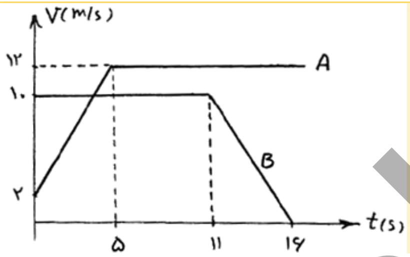
مثال ۴۸

دو متحرّک A و B که نمودار سرعت ـ زمان آن‌ها مطابق شکل است، در $t=0$ از کنار هم عبور می‌کنند. در چه لحظه‌ای مجدّداً دو متحرّک به هم می‌رسند؟



مثال ۴۹

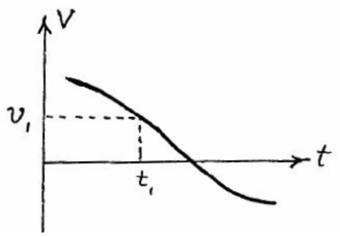
نمودار سرعت ـ زمان دو متحرّک A و B، که روی محور x ها حرکت می‌کنند، مطابق شکل مقابل است. اگر در لحظه‌ی $t=0$، هر دو متحرّک در $x=0$ قرار داشته باشند، چند ثانیه پس از آن، دو متحرّک به هم می‌رسند؟



- سرعت متوسط:

به کمک تعریف سرعت متوسط $\overline{V}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$، می‌توانیم ابتدا Δx و سپس $\overline{V}$ را به سادگی تعیین نماییم.

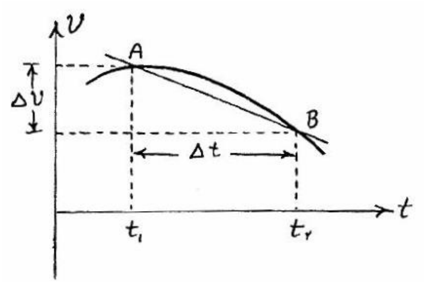
- سرعت لحظه‌ای:



ساده‌ترین چیزی که می‌توان از نمودار سرعت ـ زمان به دست آورد، سرعت متحرک در هر لحظه‌ی دلخواه است. (شبیه به‌دست آوردن مکان متحرّک، از روی نمودار مکان ـ زمان!)

Sanatisharif.ir

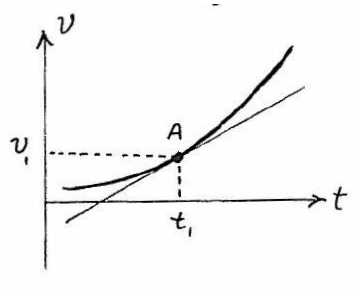
- شتاب متوسط:



با معلوم بودن سرعت متحرّک در هر لحظه‌ی دلخواه، با توجّه به تعریف شتاب متوسط، می‌توانیم مقدار آن را در هر بازه‌ی زمانی، از روی نمودار تعیین نماییم.

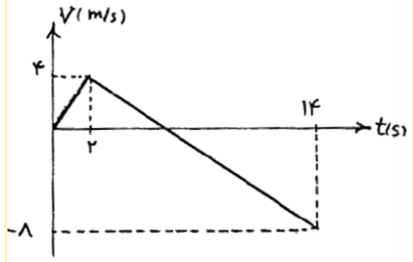
تعبیر هندسی شتاب متوسط در یک بازه‌ی زمانی به صورت شیب پاره‌خطی که نقاط متناظر با آن دو لحظه، روی نمودار را به هم متّصل می‌کند، بیان می‌شود.

- شتاب لحظه‌ای:



در تعریف شتاب لحظه‌ای، دیدیم که $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت: شتاب متحرک در هر لحظه، برابر شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان، در آن لحظه است.

مثال ۵۰

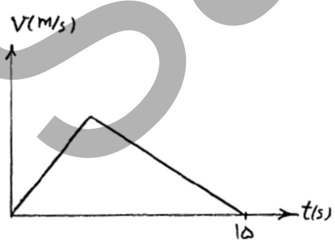


متحرّکی روی محور x حرکت می‌کند و نمودار سرعت ـ زمان آن مطابق شکل مقابل است.

الف) سرعت متوسط متحرّک در کلّ حرکت چه‌قدر است؟

ب) متحرّک در ۱۴ ثانیه‌ی اوّل چه مدّت در خلاف جهت محور xها حرکت کرده است؟ در این مدّت، سرعت متوسط متحرّک چه‌قدر است؟

مثال ۵۱

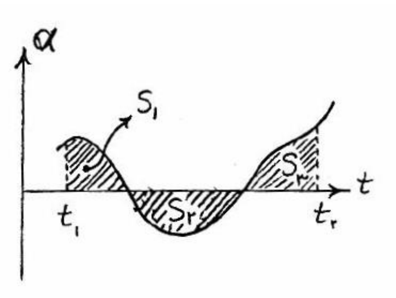


نمودار سرعت ـ زمان متحرّکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. اگر سرعت متوسط متحرّک در کلّ زمان حرکت و اندازه‌ی شتاب در حرکت تند شونده دو برابر شتاب در مرحله‌ی کند شونده باشد، بیشینه‌ی سرعت متحرّک و شتاب حرکت در هر مرحله را بیابید.

Sanatisharif.ir

پ. نمودار شتاب ـ زمان

- تغییرات سرعت:



می‌توان نشان داد مساحت بین نمودار شتاب ـ زمان و محور زمان در یک بازه‌ی زمانی، برابر تغییرات سرعتِ متحرّک در آن بازه‌ی زمانی است. یعنی:

$$\Delta v = S_1 - S_2 + S_3 \pm \cdots \qquad (۱\text{-}؟؟)$$

✍ **نکته:** *فقط* با در اختیار داشتن نمودار شتاب ـ زمان یک متحرّک، نمی‌توان اطّلاعی در مورد مکان و سرعت متحرّک در لحظات مختلف به دست آورد.

- شتاب متوسط:

به کمک تعریف شتاب متوسط، می‌توان مقدار این کمیّت را در هر بازه‌ی زمانی دلخواه و با استفاده از مساحت زیر نمودار شتاب ـ زمان، تعیین کرد.

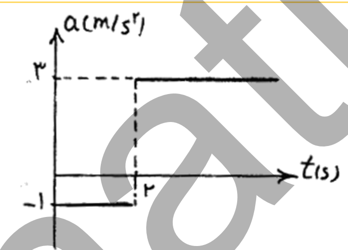
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{S_{a-t}}{\Delta t} \qquad (۱\text{-}۲۳)$$

- شتاب لحظه‌ای:

حداقل انتظاری که از این نمودار می‌رود، تعیین شتاب متحرّک در لحظات مختلف است!

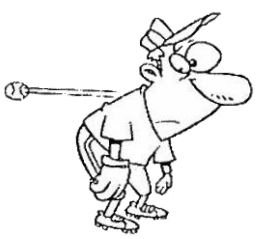
مثال ۵۲

نمودار شتاب ـ زمان متحرّکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. اگر سرعت اولیه‌ی متحرّک $-3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ باشد، نوع حرکت را در لحظات $t_1 = 3\,\mathrm{s}$ و $t_2 = 4\,\mathrm{s}$ تعیین نمایید.



✍ **نکته:** به کمک نمودار مکان ـ زمان، می‌توان نمودار سرعت ـ زمان را برای متحرک رسم نمود. برای این کار کافی است، بتوانیم شیب خطوط مماس بر نمودار مکان ـ زمان را در لحظات مختلف تعیین نماییم. هر چند این کار در حالت کلّی دشوار به نظر می‌رسد، امّا برای حالت‌هایی که در حال بررسی حرکت یکنواخت، یا حرکت با شتاب ثابت هستیم (با توجّه به روابط موجود)، کار دشواری نخواهد بود.

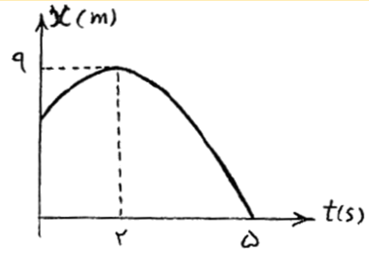
به همین ترتیب، می‌توان نمودار شتاب ـ زمان را از روی نمودار سرعت ـ زمان استخراج کرد.



Sanatisharif.ir
مجری طرح توسعه عدالت آموزشی
www.sanatisharif.ir

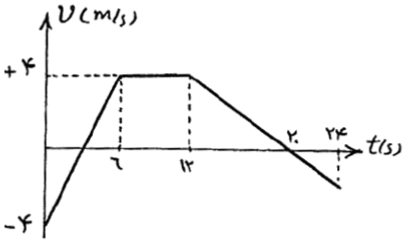
مثال ۵۳

نمودار مکان ـ زمان متحرّکی که با شتاب ثابت، روی محور xها حرکت می‌کند، مطابق شکل است. نمودارهای سرعت – زمان و شتاب ـ زمان را برای آن رسم کنید.



مثال ۵۴

نمودار سرعت ـ زمان متحرّکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. نمودار شتاب ـ زمان را برای آن رسم نمایید.



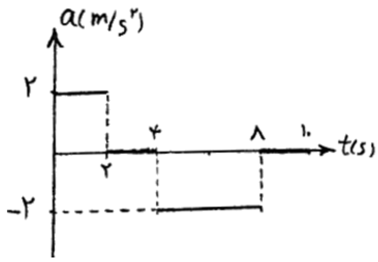
نکته: از روی نمودار شتاب ـ زمان نیز، با معلوم بودن شرایط اولیه، می‌توان نمودار سرعت ـ زمان را رسم کرد. در این حالت، از این نکته استفاده می‌شود که تغییرات سرعت در هر بازه‌ی زمانی دلخواه برابر مساحت زیر نمودار شتاب ـ زمان، در همان بازه‌ی زمانی است.

به همین ترتیب، با معلوم بودن نمودار سرعت ـ زمان و در اختیار داشتن اطّلاعی در مورد مکان متحرّک، در لحظه‌ای خاص، می‌توان نمودار مکان ـ زمان را برای حرکت ترسیم کرد. در این‌جا به یاد می‌آوریم که

Sanatisharif.ir

تغییرات مکان (جابه‌جایی) در هر بازه‌ی زمانی دلخواه، برابر مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان در آن بازه‌ی زمانی است.

مثال ۵۵

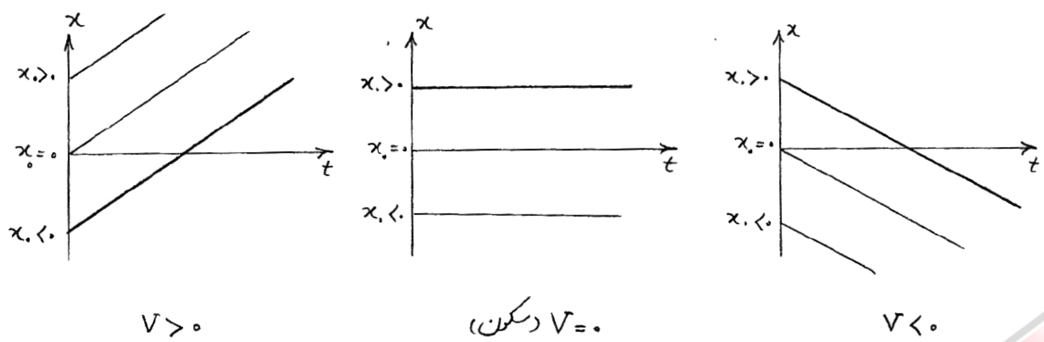


نمودار شتاب ـ زمان متحرّکی که از حال سکون، حرکت خود را از مبدأ مختصّات آغاز کرده، مطابق شکل است.

الف) اگر $v_0 = 0$ و $x_0 = 0$ باشد، نمودارهای سرعت ـ زمان و مکان ـ زمان را برای آن رسم نمایید.

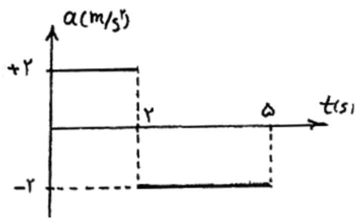
ب) سرعت متوسط متحرک در مدت ۱۰ ثانیه‌ی اول حرکت چقدر است؟

نکته: نمودارهای حرکت، در حرکت یکنواخت به صورت زیر است:

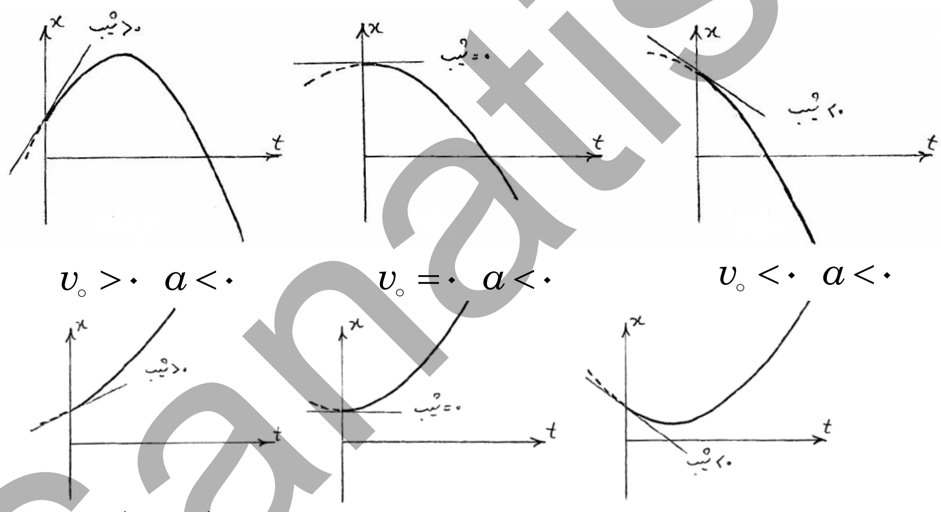


مثال ۵۶

نمودار شتاب ـ زمان متحرّکی در مسیر مستقیم، مطابق شکل است. اگر سرعت متـوسط متحرک در این مدّت $6/4\,\frac{m}{s}$ باشد، سرعت اوّلیه آن چند متر بر ثانیه است؟



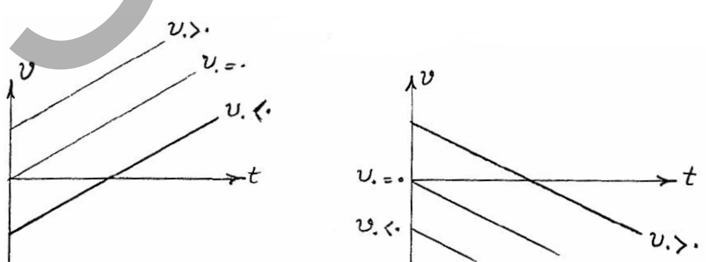
نکته: نمودارهای حرکت، در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، به صورت زیر است:



$v_\circ > 0 \quad a < 0$ $\quad v_\circ = 0 \quad a < 0$ $\quad v_\circ < 0 \quad a < 0$

$v_\circ > 0 \quad a > 0$ $\quad v_\circ = 0 \quad a > 0$ $\quad v_\circ < 0 \quad a > 0$

... و نمودارهای سرعت ـ زمان نیز، به صورت زیر خواهند بود:



$a > 0 \qquad a < 0$

Sanatisharif.ir

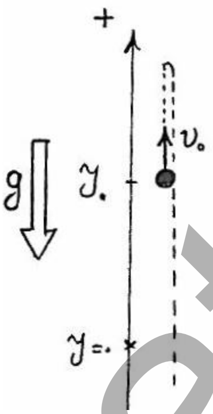
۱-۴. سقوط آزاد

حرکت یک جسم در راستای قائم، فقط تحت تأثیر نیروی وزن جسم را سقوط آزاد می‌نامند. در این حرکت، شتاب همواره ثابت است، یعنی اندازه و جهت آن در حین حرکت تغییر نمی‌کند و اندازه‌ی آن g (شتاب جاذبه‌ی زمین) است. بنابراین تمامی معادلات حرکت روی خط راست با شتاب ثابت را می‌توان برای آن به کار بُرد.

برای استفاده صحیح از معادلات حرکت، توجّه به چند نکته ضروری است:

- انتخاب محور مختصّات، به همراه مبدأ و جهت محور: هر چند انتخاب مبدأ مختصّات و جهت آن کاملاً دلخواه است، امّا این انتخاب باید انجام شود، زیرا بسته به آن‌که مبدأ مختصّات کجا قرار داشته باشد و جهت حرکت به کدام سمت باشد، علامت و مقادیر کمیّت‌ها در معادلات، مختلف خواهد بود.
- در نظر گرفتن علامت برای کمیّت‌ها: کمیّت‌های مورد استفاده در معادلات سقوط آزاد، یعنی مکان، جابه‌جایی، سرعت، سرعت متوسط و شتاب، همگی دارای علامت هستند، که این علامت‌ها با توجّه به جهت دستگاه انتخاب شده تعیین می‌شوند.

بنابراین می‌توان معادلات حرکت را به صورت زیر نوشت:



معادله‌ی سرعت ـ زمان: $v=-gt+v_0$

معادله‌ی مکان ـ زمان: $y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0$

معادله‌ی مستقل از زمان: $v_2^2-v_1^2=-2g(y-y_0)$

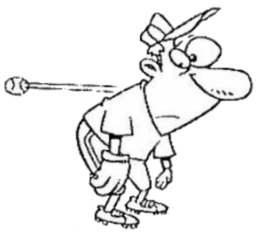
معادله‌ی مستقل از شتاب: $y-y_0=\frac{v+v_0}{2}t$

سرعت متوسط: $\overline{V}=\frac{v+v_0}{2}$

جابه‌جایی در ثانیه‌ی nام: $\Delta y_n=-g(n-0/5)+v_0$

مثال ۵۷

گلوله‌ی کوچکی از ارتفاع ۲۵ متری سطح زمین با سرعت $20\frac{m}{s}$ در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود. این گلوله پس از چه مدّت و با چه سرعتی به زمین برخورد خواهد کرد؟



Sanatisharif.ir

مثال ۵۸

گلوله‌ی کوچکی را از بالای یک بلندی با سرعت $10\frac{m}{s}$ به سمت بالا، در راستای قائم پرتاب می‌کنیم. چه مدّت پس از پرتاب، سرعت گلوله به $20\frac{m}{s}$ می‌رسد؟

مثال ۵۹

از بالای ساختمانی به ارتفاع $60m$، سنگی را با سرعت $20\frac{m}{s}$ در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. سنگ با چه سرعتی به سطح زمین می‌رسد؟

مثال ۶۰

گلوله‌ی کوچکی را با سرعت اولیه‌ی v_0، در راستای قائم به طرف پایین پرتاب می‌کنیم. نشان دهید ارتفاع اوج تا محل پرتاب و زمان اوج، از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$t_{\text{اوج}}=\frac{v_0}{g} \quad \text{و} \quad y_{\text{اوج}}=\frac{v_0^2}{2g}$$

مثال ۶۱

سنگی را در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. سنگ، از نقطه‌ی A با سرعت V از نقطه‌ی B با سرعت $\frac{V}{2}$ می‌گذرد. اگر $AB=10cm$ باشد:

الف) مقدار V را بیابید.

ب) تعیین کنید جسم چند متر بالاتر از نقطه‌ی B بالا خواهد رفت؟

Sanatisharif.ir
مجری طرح توسعه عدالت آموزشی www.sanatisharif.ir

مثال ۶۲

قطره‌های آب از ارتفاع H از یک دوش، در بازه‌های زمانی مساوی T، یکی پس از دیگری می‌چکند. وقتی اولین قطره به زمین می‌رسد، پنجمین قطره در حال جدا شدن از دوش است.

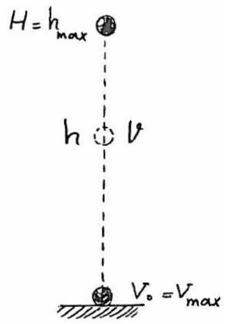
الف) در این لحظه، فاصله‌ی هر قطره تا زمین را بیابید.

ب) فاصله‌ی میان قطرات متوالی را تعیین کنید.

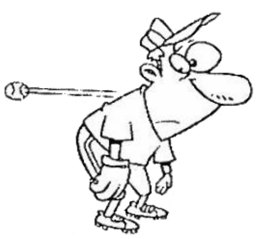
مثال ۶۳

توپی از ارتفاع ۵ متری زمین در شرایط خلاء رها می‌شود. توپ به زمین خورده و تا ارتفاع ۴/۰۵ متری بالا می‌رود. اگر زمان این رفت و برگشت، ۲s باشد، شتاب متوسط توپ و جهت آن در مدتی که توپ با زمین تماس داشته را بیابید.

نکته: هنگامی که جسمی با سرعت اولیه v_0 در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود و یا از ارتفاع H رها می‌گردد، در ارتفاع h از سطح زمین، دارای سرعت v خواهد بود و در این‌صورت:



$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 + \frac{h}{h_{max}} = 1 \qquad (۲۴-۱)$$



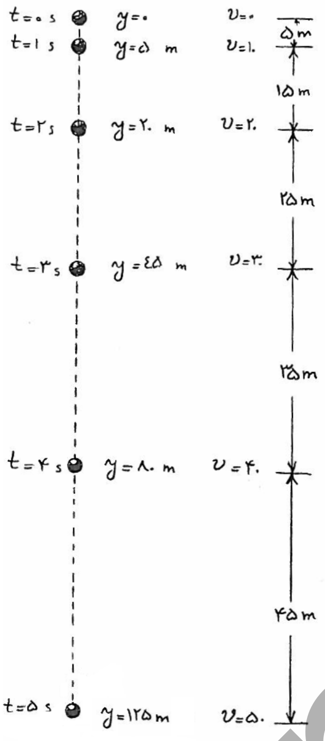
Sanatisharif.ir
مجری طرح توسعه عدالت آموزشی
www.sanatisharif.ir

مثال ۶۴

سنگی را در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. اگر زمان رسیدن به نقطه‌ی اوج، t باشد،

الف) زمان رسیدن به نیمه‌ی ارتفاع اوج، چند برابر t است؟

ب) زمان طی فاصله‌ی میان $\frac{۱}{۴}$ ارتفاع اوج تا $\frac{۳}{۴}$ ارتفاع اوج چند t است؟



✍ **نکته:** اعداد طلایی نشان داده شده در نمودار مقابل را به خـاطر بسپارید!!

مثال ۶۵

جسم کوچکی را از بالای ساختمانی رها می‌کنیم. این جسم در آخرین ثانیه‌ی حرکت خود، $۴۵\,m$ را می‌پیماید.

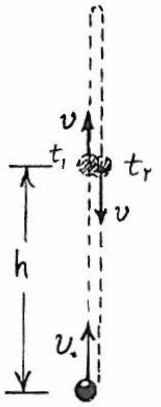
الف) ارتفاع ساختمان چند متر است؟

ب) جسم چه مدّت در راه بوده است؟

پ) سرعت آن هنگام برخورد به زمین چه‌قدر است؟

Sanatisharif.ir

نکته: هنگامی که جسمی با سرعت اولیه‌ی $v_\circ$ در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود، در دو لحظه‌ی مثبت t_1 و t_2 جسم از یک محل در فاصله‌ی h از نقطه‌ی پرتاب می‌گذرد (h از ارتفاع اوج کمتر است). در این‌صورت خواهیم داشت:



$$t_1+t_2=\frac{2v_\circ}{g} \quad ; \quad t_1+t_2=2t_{\text{اوج}}$$

$$t_1\cdot t_2=\frac{2h}{g}$$

$$\left|t_2-t_1\right|=\frac{2v}{g} \quad ; \quad v=h \text{ سرعت جسم هنگام عبور از ارتفاعِ}$$

مثال ۶۶

جسمی را در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم، به طوری که بازه‌ی زمانی دو عبور متوالیِ جسم از بالای درخت، $3\,s$ است.

الف) سرعت جسم در بالای درخت چه‌قدر است؟

ب) بالای درخت از نقطه‌ی اوج جسم چند متر فاصله دارد؟

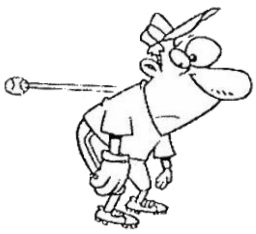
مثال ۶۷

جسمی را در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. $3\,s$ و $7\,s$ پس از پرتاب، جسم از محلی در ارتفاع h از نقطه‌ی پرتاب می‌گذرد.

الف) سرعت اولیه‌ی پرتاب را بیابید.

ب) ارتفاع h را تعیین نمایید.

ج) سرعت جسم هنگام عبور از ارتفاع h چه‌قدر است؟



Sanatisharif.ir

نکته: وقتی حرکت سقوط آزاد چند جسم را با یکدیگر بررسی‌می‌نماییم، مناسب است که معادلات حرکت آن‌ها را در یک دستگاه مختصات بنویسیم.

همچنین اگر زمان‌های شروع حرکت آن‌ها یکسان نیست، باید مبدأ شروع یکی از متحرک‌ها را به عنوان مبدأ زمان در نظر گرفته و زمان سایر متحرک‌ها را نسبت به آن بسنجیم.

مثلاً اگر متحرک دوم، نسبت به متحرک اوّل با تأخیر زمانی T حرکت خود را آغاز کرده است، می‌توانیم از رابطه‌ی $t'=t-T$ برای این حرکت‌ها استفاده نماییم. در این رابطه، t زمان متحرک اول و t' زمان متحرکی است که با تأخیر، حرکت را آغاز کرده است.

مثال ۶۸

دو سنگ را از سطح زمین در راستای قائم به طرف بالا، با اختلاف زمانی $۲\,\mathrm{s}$ پرتاب می‌نماییم. اگر سرعت اولیه‌ی پرتاب سنگ اول $۲۵\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ باشد، سنگ دوّم را با چه سرعتی پرتاب نماییم تا دو جسم در ارتفاع ۲۰ متری سطح زمین به هم برخورد نمایند؟

مثال ۶۹

گلوله‌ی کوچکی را از ارتفاع $۱۳/۷۵\,\mathrm{m}$ از سطح زمین با سرعت اولیه‌ی $۱۰\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. $۱/۵\,\mathrm{s}$ بعد، گلوله‌ی دیگری از سطح زمین با سرعت $۳۰\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود. این دو گلوله پس از چه مدّت و در چه ارتفاعی از سطح زمین به هم می‌رسند؟

Sanatisharif.ir

مثال ۷۰

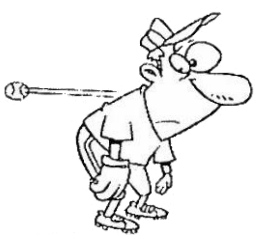
دو گلوله با سرعت‌های اولیه‌ی برابر، از یک نقطه، در راستای قائم و با اختلاف زمانی $3\,\mathrm{s}$ نسبت به هم، به طرف بالا پرتاب می‌شوند. محل برخورد دو گلوله به هم، تا نقطه‌ی اوج گلوله‌ها چند متر فاصله دارد؟

مثال ۷۱

سه گلوله از سطح زمین با سرعت اولیه‌های یکسان از یک نقطه به ترتیب در لحظات $t=0$ و $t=2\,\mathrm{s}$ و $t=4\,\mathrm{s}$ به سمت بالا در راستای قائم پرتاب می‌شوند. محل برخورد گلوله‌ی اوّل و دوّم، چند متر با محل برخورد گلوله‌ی اوّل و سوّم فاصله دارد؟

مثال ۷۲

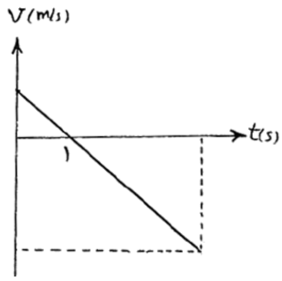
بالنی با سرعت ثابت $10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ در راستای قائم به طرف بالا در حال حرکت است. هنگامی که بالن به ارتفاع ۴۰ متری سطح زمین می‌رسد، جسمی از داخل آن رها می‌شود. این جسم پس از چه مدّت و با چه سرعتی به زمین برخورد می‌کند؟



Sanatisharif.ir

مثال ۷۳

نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که از بالای یک ساختمان، در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود و با سرعت $20\frac{m}{s}$ به زمین برخورد می‌کند، مطابق شکل است.



الف) سرعت اولیه‌ی پرتاب گلوله چه‌قدر است؟

ب) ارتفاع ساختمان چند متر است؟

ج) نمودار مکان ـ زمان را برای این متحرک رسم نمایید.

نکته: در بررسی حرکت دو یا چند جسم، می‌توانیم معادلات حرکت را نسبت به یکی از متحرک‌ها نیز مورد استفاده قرار دهیم. در این‌صورت باید کمیّت‌های نسبی ($a_r, v_r, \Delta x_r, x_r$) را در معادلات حرکت به کار بریم.

برای تعیین کمیّت‌های نسبیِ متحرک B نسبت به متحرکی مانند A، داریم:

$$x_r = x_B - x_A \qquad \Delta x_r = \Delta x_B - \Delta x_A$$
$$v_r = v_B - v_A \qquad a_r = a_B - a_A \qquad (۱-۲۵)$$

باید دقّت داشت که حرکت نسبی فقط زمانی قابل استفاده است که در تمامی لحظات، هر دو متحرک در حال حرکت باشند. به عبارت دیگر اگر یکی ازمتحرک‌ها با تأخیر زمانی حرکت کرده است یا یکی از آن‌ها زودتر از دیگری توقف شده است. نمی‌توان از این روش استفاده کرد.

مثال ۷۴

یک قطار بر روی ریلی با سرعت $10\frac{m}{s}$ در حرکت است. قطار دیگری روی همان ریل با سرعت $40\frac{m}{s}$ به دنبال آن در حرکت است. وقتی فاصله‌ی میان دو قطار به $300m$ می‌رسد، قطار عقبی ترمز می‌کند.

الف) حداقل شتاب ترمز چه‌قدر باشد تا دو قطار به هم برخورد نکنند؟

ب) نمودار مکان ـ زمان آن‌ها را در یک دستگاه مختصات رسم نمایید.

Sanatisharif.ir
مجری طرح توسعه عدالت آموزشی www.sanatisharif.ir

مثال ۷۵

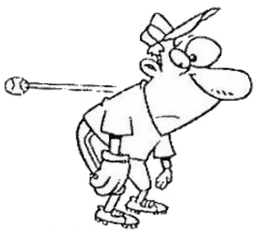
دو توپ را از ارتفاعی در شرایط خلأ، اولی را با سرعت $4\frac{m}{s}$ به طرف بالا و دوّمی را با سرعت $3\frac{m}{s}$ به طرف پایین، در راستای قائم پرتاب می‌کنیم. فاصله‌ی آنها پس از گذشت $5s$ از لحظه‌ی پرتاب چند متر می‌شود؟

مثال ۷۶

متحرک اول با سرعت اولیه‌ی $6\frac{m}{s}$ و شتاب $3\frac{m}{s^2}$ و متحرک دوّم با سرعت اولیه‌ی $10\frac{m}{s}$ و شتاب $5\frac{m}{s^2}$ (هر دو تند شونده) از فاصله‌ی ۸۴ متری به سمت هم حرکت می‌کنند. بعد از چند ثانیه به هم می‌رسند؟

مثال ۷۷

دو توپ را از ارتفاعی در شرایط خلأ، اوّلی را با سرعت $4\frac{m}{s}$ به طرف بالا و دوّمی را با سرعت $3\frac{m}{s}$ به طرف پایین، در راستای قائم پرتاب می‌کنیم. فاصله‌ی آنها پس از گذشت $5s$ از لحظه‌ی پرتاب چند متر می‌شود؟

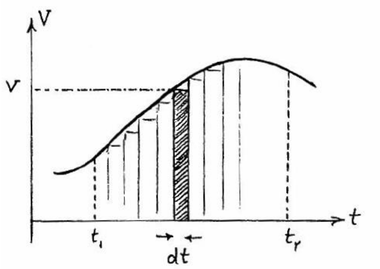


Sanatisharif.ir

دور از چشمان معلّمین ریاضی

متحرکی را در نظر بگیرید که بر روی خط راست حرکت می‌کند و معادله‌ی سرعت ـ زمان آن به صورت $v = v(t)$ است. می‌خواهیم ببینیم چگونه می‌توان معادله‌ی مکان ـ زمان را برای آن به دست آورد.

هر چند سرعت متحرک در لحظات مختلف به طور پیوسته تغییر می‌کند و نمی‌توان از رابطه‌ی $\Delta x = v\,t$ برای آن استفاده کرد، امّا می‌توان فرض نمود که سرعت متحرک در بازه‌ی زمانی بسیار کوچک dt $(dt = \Delta t \to 0\,!)$ ثابت است در اینصورت با توجّه به یکنواخت بودن حرکت در این بازه‌ی زمانی، خواهیم داشت:



$dx = v \cdot dt$: جابه‌جایی در بازه ی زمانی dt

اکنون برای به دست آوردن کل جابه‌جایی در یک بازه‌ی زمانی دلخواه Δt، کافی است این مقادیر dx را با هم جمع کنیم. ابزار ریاضی برای جمع کردن این کمیّت‌های بسیار کوچک پیوسته، انتگرال معیّن است.

بنابراین خواهیم داشت:

$$dx = V \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t V dt \quad \Rightarrow \quad x - x_0 = \int_0^t V dt$$

در درس ریاضی با نحوه‌ی محاسبه‌ی انتگرال (معین و نا معین) آشنا خواهید شد . امّا همین قدر برای ما کفایت می‌کند که بدانیم: اگر $f(t)$ مشتق تابع $F(t)$ باشد ، $F(t)$ را تابع اولیه‌ی $f(t)$ می‌نامند و در اینصورت:

$$\int_b^a f(t)dt = F(b) - F(a)$$

برای تعیین انتگرال یک تابع ، باید عکس عملیات مشتق‌گیری را انجام دهیم ! (هر چند این کار ، گاهی بسیار مشکل و گاهی نیز غیر ممکن است !!!)

شبیه استدلال بالا را می‌توان برای شتاب نیز به کار بُرد و نوشت:

$$V - V_0 = \int_0^t a(t)dt$$

Sanatisharif.ir

مثال ۷۸

معادله‌ی شتاب ـ زمان متحرکی در SI که حرکت خود را از حال سکون و از مبدأ مکان، روی محور xها آغاز کرده، به صورت $a=-2t+4$ است.

الف) معـادلات سرعت ـ زمان و مکان ـ زمان را برای این متحرک به‌دست آورید.

ب) متحرک در چه لحظاتی توقّف کرده است؟ سرعت متوسط متحرک در این مدّت چه‌قدر است؟

ج) سرعت و شتاب متحرک را وقتی از نقطه‌ی $x=9\,\mathrm{m}$ عبور می‌کند، تعیین کنید.

مثال ۷۹

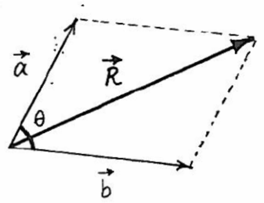
معادله‌ی سرعت – زمان متحرکی در SI به صورت $v=10\sin 5t$ است. اگر $x_0=0$ باشد، معـادلات شـتاب – زمان و مکان – زمان را برای آن به‌دست آورید.

Sanatisharif.ir

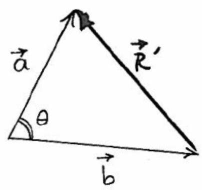
۱-۲. حرکت دو بُعدی (حرکت درصفحه)

اکنون نوبت آن رسیده است که تمامی مفاهیم حرکت در یک بُعد را تعمیم دهیم و خود را برای بررسی حرکت دوبُعدی (و سه بُعدی) آماده نماییم. حرکت دوبُعدی حرکتی است که در صفحه صورت می‌پذیرد و لذا برای توصیف آن، حداقل به یک دستگاه مختصات دوبُعدی نیاز داریم.

قبل از ورود به بحث، لازم است ریاضیات برداری را به صورت بسیار سریع، مرور نماییم.



$\vec R = \vec a + \vec b$



$\vec R' = \vec a - \vec b$

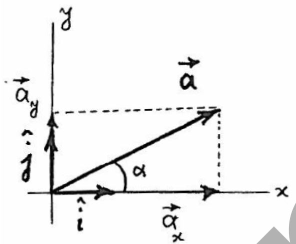
$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta} \qquad R' = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$

$$|\vec a| + |\vec b| \geqslant |\vec a \pm \vec b| \geqslant \left||\vec a| - |\vec b|\right|$$

* اگر بردارهای $\vec a$ و $\vec b$، هم اندازه باشند، می‌توان اندازه‌ی جمع و تفاضل دو بردار را از روابط زیر بدست آورد:

$$R = 2a\cos\frac{\theta}{2} \qquad R' = 2a\sin\frac{\theta}{2}$$

* هر بردار دلخواه را می‌توان برحسب بردارهای یکه‌ی $\hat i$ و $\hat j$، تجزیه کرد.

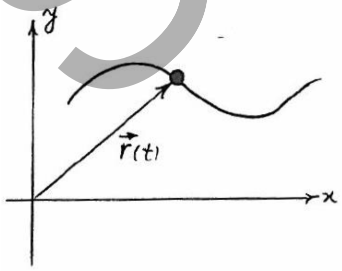


$$\begin{cases} a_x = a.\cos\alpha \\ a_y = a.\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \vec a = a\cos\alpha\,\hat i + a\sin\alpha\,\hat j$$

$$\tan\alpha = \frac{a_y}{a_x} \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

* ضرب عددی دو بردار به صورت‌های زیر قابل استفاده است:

$$\vec a.\vec b = |\vec a|.|\vec b|.\cos\theta \quad , \quad \vec a.\vec b = a_x b_x + a_y b_y + \dots$$



بردار مکان: بردار مکان، برداری است که در هر لحظه، مبدأ مختصات را به مکان جسم وصل می‌کند. این بردار در دستگاه مختصات دکارتی، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\vec r(t) = x(t)\,\vec{\mathbf{i}} + y(t)\,\vec{\mathbf{j}} \qquad (۱-۲۶)$$

Sanatisharif.ir

مثال ۸۰

بردار مکان متحرّکی در SI به صورت $\vec{r} = -۵\ \sin ۱۰\pi t\ \vec{\mathbf{i}} + (۶۰t + ۹)\vec{\mathbf{j}}$ است. فاصله‌ی متحرک تا مبدأ مکان در لحظه‌ی $t = ۵۰\ \text{ms}$ چند متر است؟

مثال ۸۱

بردار مکان برای دو متحرک A و B در SI به صورت $\overrightarrow{r_A} = (t^۲ - ۲t)\vec{\mathbf{i}} + (۴t - ۱۵)\vec{\mathbf{j}}$ و $\overrightarrow{r_B} = (۲t - ۳)\vec{\mathbf{i}} + (t^۲ - ۴t)\vec{\mathbf{j}}$ است.

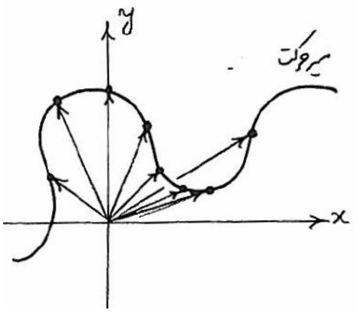
الف) آیا این دو متحرّک به هم برخورد می‌کنند؟

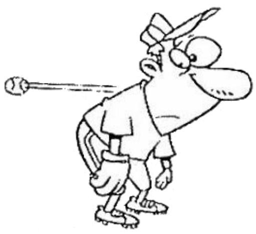
ب) فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد (در صورت وجود) تا مبدأ مختصات چند متر است؟

مثال ۸۲

دو گلوله‌ی A و B در صفحه‌ی xoy قرار دارند و مکان آن‌ها در SI به صورت $\begin{cases} x_A = ۸t - ۶ \\ y_A = ۲t \end{cases}$ و $\begin{cases} x_B = ۱۰ \\ y_B = t + ۲ \end{cases}$ است. یک ثانیه قبل از برخورد، فاصله‌ی میان آن‌ها چند متر است؟

مسیر حرکت: مسیر حرکت یک متحرک، مجموعه‌ی مکان‌هایی است که متحرک مورد نظر در لحظات مختلف در آن‌ها حضور داشته است. به عبارت دیگر، مسیر حرکت، همان ردپای متحرک است. مسیر حرکت یک متحرک دو بعدی، رابطه‌ای است بین x و y که در آن،





Sanatisharif.ir
مجری طرح توسعه عدالت آموزشی
www.sanatisharif.ir

زمان (t) حضور ندارد. بنابراین برای تعیین مسیر حرکت متحرکی که بردار مکان آن معلوم است، باید پارامتر t را بین روابط $x-t$ و $y-t$ حذف نماییم، تا رابطه‌ای بین x و y به دست آید. توجّه به این نکته نیز لازم است که مسیر حرکت می‌تواند تابع نباشد!

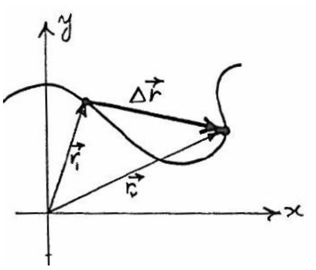
مثال ۸۳

مسیر حرکت را برای حرکت‌های دو بُعدی زیر به‌دست آورید:

الف) $\vec{r}(t)=3t\,\vec{\mathbf{i}}+\left(4t-5t^2\right)\vec{\mathbf{j}}$

ب) $x=2\sin 5\pi t \quad , \quad y=3\cos 5\pi t$

پ) $x=t+\dfrac{1}{t+1} \quad , \quad y=t-\dfrac{1}{t+1}$



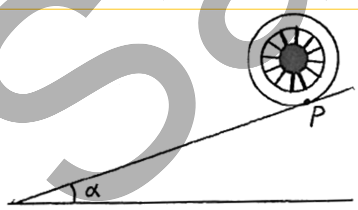
بردار جابه‌جایی: بردار جابه‌جایی متحرکی که در لحظات t_1 و t_2 به ترتیب بردارهای مکان $\vec{r_1}$ و $\vec{r_2}$ برای توصیف آن به کار می‌رود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta\vec{r}=\vec{r_2}-\vec{r_1}$$

نکته: بردار جابه‌جایی در دستگاه مختصات دکارتی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Delta\vec{r}=\vec{r_2}-\vec{r_1}=\left(x_2\vec{\mathbf{i}}+y_2\vec{\mathbf{j}}\right)-\left(x_1\vec{\mathbf{i}}+y_1\vec{\mathbf{j}}\right)$$
$$=\left(x_2-x_1\right)\vec{\mathbf{i}}+\left(y_2-y_1\right)\vec{\mathbf{j}} \Rightarrow \Delta\vec{r}=\Delta x\,\vec{\mathbf{i}}+\Delta y\,\vec{\mathbf{j}}$$

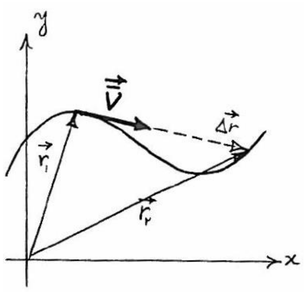
مثال ۸۴



در شکل مقابل، نقطه‌ی P روی محیط چرخ مشخّص شده است. هنگامی که چرخ ۲/۵ دور می‌چرخد، نقطه‌ی P چند متر جابه‌جا می‌شود؟ (شعاع چرخ $r=0/5\,\text{m}$ و $\pi=3$ است.)

◈ مثال ۸۵

متحرکی بر روی دایره‌ای به شعاع $10\,\mathrm{m}$ حرکت می‌کند. اندازه‌ی جابه‌جایی آن را در $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{2}$، $\frac{3}{4}$ و ۱ پیمودن دایره بیابید.



بُردارسرعت متوسط: بر طبق تعریف، نسبت بردار جابه‌جایی به زمان انجام جابه‌جایی را بردار سرعت متوسط می‌نامند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\overline{\vec{V}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{t_2-t_1}$$

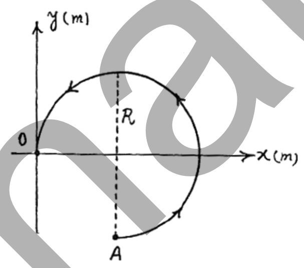
از آن‌جا که $\Delta t>0$ است، لذا می‌توان نتیجه گرفت:

- بردار سرعت متوسط، همواره با بردار جابه‌جایی موازی است.
- بردار سرعت متوسط، همواره با بردار جابه‌جایی هم جهت است.

✍ **نکته:** بردار مکان، تابع انتخاب دستگاه مختصات است، ولی بردارهای جابه‌جایی و سرعت متوسط، با تغییر دستگاه مختصات، تغییر نمی‌نمایند.

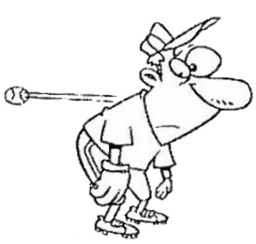
◈ مثال ۸۶

مطابق شکل، ذرّه‌ای در مدّت $20\,\mathrm{s}$ بر روی شعاع دایـره‌ای بـه شـعاع $4\,\mathrm{m}$ از نقطه‌ی A تا O جابه‌جا می‌شود. بردار سرعت متوسط ذرّه در این جابه‌جـایی چنـد سانتی‌متر بر ثانیه است؟



✍ **نکته:** بردار سرعت متوسط در دستگاه مختصات دکارتی به صورت زیر نوشته می‌شود:

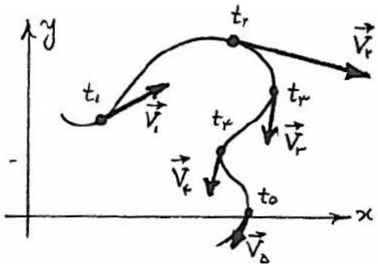
$$\overline{\vec{V}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\Delta x\,\vec{\mathbf{i}}+\Delta y\,\vec{\mathbf{j}}}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{\mathbf{i}}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{\mathbf{j}}=\overline{V_x}\,\vec{\mathbf{i}}+\overline{V_y}\,\vec{\mathbf{j}} \qquad (۲۷-۱)$$



Sanatisharif.ir

مثال ۸۷

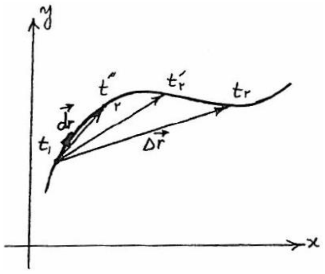
بردار مکان متحرکی در SI به صورت $\vec{r}=\left(2t+3\right)\vec{\mathbf{i}}-t\,\vec{\mathbf{j}}$ است. سرعت متوسط متحرّک در دو ثانیه‌ی چهارم حرکت را تعیین نمایید.



بُردار سرعت لحظه‌ای: اگر بازه‌ی زمانی اندازه‌گیری بردار سرعت متوسط را بسیار کوچک در نظر بگیریم، بردار $\overline{\vec{V}}$ تبدیل به بردار $\vec{V}$ (سرعت لحظه‌ای) می‌شود. یعنی می‌توان نوشت:

$$\vec{V}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

✍ **نکته:** با کمی دقّت معلوم می‌شود از آن‌جا که بردار $d\vec{r}$ برداری مماس بر مسیر حرکت است و بردار سرعت لحظه‌ای نیز با این بردار موازی و هم‌جهت است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت: بردار سرعت لحظه‌ای، برداری است مماس بر مسیر حرکت متحرّک.



اندازه‌ی این بردار نیز، بستگی به اندازه‌ی سرعت متحرّک دارد. این مطلب بدان معنی است که: جسم همواره در جهتِ سرعت لحظه‌ای خود حرکت می‌کند (نه در جهت نیروهای وارد بر آن!)

✍ **نکته:** بردار سرعت لحظه‌ای را در دستگاه مختصات دکارتی، می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(x\,\vec{\mathbf{i}}+y\,\vec{\mathbf{j}}\right)=\frac{dx}{dt}\,\vec{\mathbf{i}}+\frac{dy}{dt}\,\vec{\mathbf{j}}=V_x\vec{\mathbf{i}}+V_y\vec{\mathbf{j}} \qquad (۲۸-۱)$$

مثال ۸۸

معادله‌ی حرکت متحرکی در SI به صورت $\vec{r}=8t^2\,\vec{\mathbf{i}}+6t^2\,\vec{\mathbf{j}}$ است. در لحظه‌ای که سرعت متحرک $60\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ است، فاصله‌ی متحرک تا مبدأ مکان چند متر است؟

Sanatisharif.ir

مثال ۸۹

بردار مکان متحرکی در SI به صورت $\vec{r}=\left(\frac{1}{2}t^{2}-7t\right)\vec{\mathbf{i}}+\left(-t^{2}+4t\right)\vec{\mathbf{j}}$ است.

الف) در چند متری مبدأ مکان، متحرک کمترین سرعت را دارد؟

ب) متحرک با چه سرعتی و با چه زاویه‌ای از روی محور xها عبور می‌کند؟

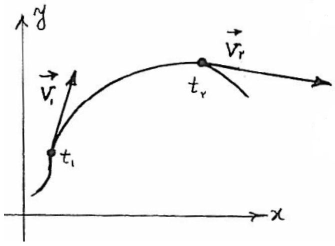
مثال ۹۰

ذرّه‌ای روی مسیری با معادله‌ی $y=x^{3}$ در حال‌حرکت است. اگراندازه‌ی سرعت ذرّه هنگام عبور از نقطه‌ی $(2\mathrm{m}\,,8\mathrm{m})$ برابر $2\sqrt{10}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ باشد، اندازه‌ی سرعت آن در راستای محور xها، در آن نقطه چه‌قدر است؟

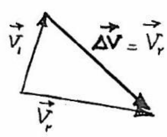
مثال ۹۱

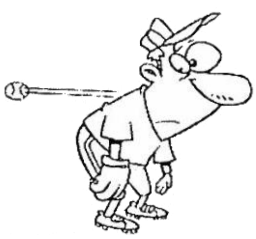
معادله‌ی مسیر ذرّه‌ای که در صفحه‌ی xoy حرکت می‌کند، در SI به صورت $y=x^{2}-x$ است و جسم در لحظه‌ی $t=0$ در مبدأ مکان بوده است. اگر مؤلفه‌ی افقی سرعت جسم، ثابت و برابر $4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ باشد، بردار سرعت جسم در لحظه‌ی $t=2\mathrm{s}$ را به‌دست آورید.

بُردار شتاب متوسط: بر طبق تعریف، شتاب متوسط یک متحرک در یک بازه‌ی زمانی دلخواه عبارتست از تغییر سرعت متحرک، تقسیم بر بازه‌ی زمانی مورد نظر. یعنی:



$$\vec{\bar{a}}=\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}=\frac{\vec{V}_2-\vec{V}_1}{t_2-t_1}$$





sanatisharif.ir

نکته: در حرکت دو بعدی، شتاب می‌تواند اندازه‌ی سرعت و یا جهت سرعت (و یا هر دو را) تغییر دهد. بنابراین در این‌جا اگر متحرکی با سرعت ثابت، روی مسیری منحنی حرکت نماید، از آن‌جا که جهت بُردار سرعت تغییر می‌کند، حرکت شتاب‌دار خواهد بود!

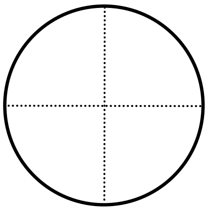
مثال ۹۲

ذرّه‌ای روی دایره‌ای به شعاع ۱۰cm با سرعت ثابت $۲\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ حرکت می‌کند.

اندازه‌ی شتاب متوسط متحرک را در هر کدام از حالت‌های زیر بیابید.

الف) متحرک نصف دایره را پیموده است.

ب) متحرک $\frac{۳}{۴}$ کل مسیر را پیموده است.



بردار شتاب لحظه‌ای: شبیه آنچه در مورد بردار سرعت لحظه ای بیان شد، اگر بازه‌ی زمانی اندازه گیری شتاب متوسط را بسیار بسیار کوچک در نظر بگیریم. بردار $\vec{\bar{a}}$ به بردار $\vec{a}$ (شتاب لحظه‌ای) تبدیل می‌شود. بنابراین:

$$\vec{a} = lim \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

مثال ۹۳

بردار مکانی متحرکی در SI به صورت $\vec{r} = \left(۲t^۲ - ۶t + ۵\right)\vec{\mathbf{i}} + \left(-۴t^۲ + ۱۲t + ۹\right)\vec{\mathbf{j}}$ است.

الف) بردار سرعت وشتاب متحرک را بیابید.

ب) در چه لحظه ای بردارهای سرعت وشتاب متحرک بر هم عمودند؟ دراین لحظه فاصله ی متحرک از مبدا چند متر است؟

پ) در لحظه‌ی $t = ۲\text{s}$ بردارهای سرعت و شتاب متحرک با یکدیگر چه زاویه ای می سازند؟

Sanatisharif.ir
مجری طرح توسعه عدالت آموزشی
www.sanatisharif.ir

✍ **نکته:** می‌توان نشان داد اگر در طول یک حرک دو بعدی (یا سه بعدی) بردار شتاب در تمام لحظات بر بردار سرعت عمود باشد، اندازه ی سرعت متحرک تغییر نمی کند و برعکس. (یعنی اگر اندازه ی سرعت متحرک ثابت باشد، بردار سرعت و شتاب بر یکدیگر عمود هستند).

✍ **نکته:** در حرکت دو بعدی (یا سه بعدی) اگر $\vec{a}.\vec{v}>۰$ باشد. اندازه‌ی سرعت متحرک رو به افزایش است و حرکت را تندشونده می‌نامیم. همچنین اگر $\vec{a}.\vec{v}<۰$ باشد، اندازه‌ی سرعت متحرک رو به کاهش است و حرکت را کندشونده می‌نامیم.

مثال ۹۴

بردار مکانی متحرکی در SI به صورت $\left(۳t^۲-۱۰t+۷\right)\vec{\mathbf{j}}+\left(\frac{۴}{۳}t^۲-۴t\right)\vec{\mathbf{i}}=\vec{r}$ است.

الف) در لحظه‌ای که اندازه‌ی شتاب متحرک $۱۰\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^۲}$ است، حرکت متحرک کند شونده است یا تند شونده؟

ب) در لحظه‌ی $t=۲\mathrm{s}$ حرکت تند شونده است یا کند شونده؟

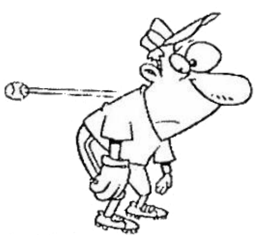
✍ **نکته:** حرکت دو بعدی در اصل ترکیب دو حرکت روی خط راست، یعنی محور x و محور y است. به گونه‌ای که این دو حرکت هیچ گونه تاثیری روی هم ندارند. مثلا اگر سرعت افقی یا شتاب افقی متحرک تغییر کند، سرعت در راستای قائم آن هیچ تغییری نخواهد کرد. همچنین ممکن است سرعت متحرک در راستای افقی در حال کاهش و سرعت آن در راستای قائم در حال افزایش یا .. باشد. بنابراین می‌توان یک حرکت دو بعدی را به دو حرکت یک بعدی تبدیل و هر کدام را جداگانه بررسی کرد.

مثال ۹۵

شخصی با سرعت ثابت $۶۰\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$ درون رودخانه‌ای شنا می‌کند، به گونه‌ای که راستای بدن او در هر لحظه بر کناره-ی رودخانه عمود است. اگر عرض رودخانه $۳۰\mathrm{m}$ باشد، تعیین کنید طی کردن عرض رودخانه توسط این شناگر در هر یک از حالت‌های زیرچه مدت طول می کشد؟

الف) آب رودخانه ساکن باشد.

ب) آب رودخانه با سرعت $۸۰\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$ جریان داشته باشد. دراین حالت، شخص چند متر جابه‌جا شده‌است؟



Sanatisharif.ir

مثال ۹۶

قایقرانی می‌خواهد با قایق خود که سرعتش نسبت به آب ساکن $13\,\frac{m}{s}$ است، عرض رودخانه ۱۲۰ متری را به گونه ای طی کند که درست به نقطه‌ی مقابل خود برسد. اگر سرعت جریان آب $5\,\frac{m}{s}$ باشد.

الف) چه مدت طول می‌کشد تا شخص به سمت دیگر رودخانه برسد؟

ب) قایق با چه زاویه‌ای باید جهت‌گیری کند؟

مثال ۹۷

چتر بازی با سرعت ثابت $8\,\frac{m}{s}$ با چتر باز، به طور قائم به طرف سطح زمین در حرکت است. در لحظه ای که او در فاصله‌ی H از زمین قرار دارد. باد به طور افقی با سرعت $6\,\frac{m}{s}$ می وزد و تا هنگام رسیدن به چتر باز به زمین، وی را $30\,m$ از خط قائم، به طور افقی دور می‌کند.

الف) H چند متر است؟

ب) شخص با چه سرعتی به زمین می‌رسد؟

مثال ۹۸

شخصی به کمک کمان خود، تیری را به سمت نشانه‌ای که دقیقا مقابل او و در فاصله‌ی۶۰ متری وی قرار دارد پرتاب می کند. اگر سرعت حرکت تیر $120\,\frac{m}{s}$ باشد، تیر چند سانتی‌متر پایین تر از هدف، به نشانه برخورد می‌کند؟

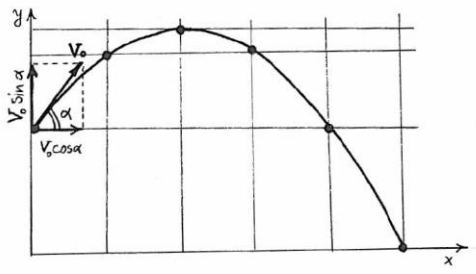
۱-۲-۱. حرکت پرتابی

یکی از حالت‌های خاص حرکت دو بعدی، حالتی است که در آن متحرکی را از ارتفاع مشخصی با سرعت اولیه، تحت زاویه‌ی دلخواهی نسبت به راستای افق، پرتاب می‌کنیم. اگر بتوان از مقاومت هوا صرف نظر کرد، تنها نیروی وارد بر جسم نیروی وزن است. این حرکت را اصطلاحاً حرکت پرتابی می‌نامیم و در ادامه به بررسی آن می‌پردازیم.

Sanatisharif.ir

در اینجا نیز شبیه سایر حرکت‌های دو بعدی، می‌توان حرکت در راستای محور xها و راستای محور yها را به طور کاملا مستقل تحلیل کرد. از آن جا که تنها نیروی وارد بر جسم، وزن جسم است، متحرک در طول حرکت خود، فقط شتاب عمودی دارد یعنی:

$$a_x = 0 \quad , \quad a_y = g \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = -g\,\vec{j}$$



در رابطه‌ی اخیر، جهت مثبت محور y را به سمت بالا فرض کرده ایم. با توجه به آن که شتاب افقی متحرک صفر است ($a_x = 0$). بنابراین می‌توان حرکت در راستای افقی را یک حرکت یکنواخت در نظر گرفت که از مبدا محور xها شروع به حرکت کرده است.

همچنین حرکت روی محور عمودی، یک حرکت با شتاب ثابت (حرکت سقوط آزاد) است و تمامی معادلات حرکت باشتاب ثابت برای آن برقرار است، یعنی داریم:

$$\left.\begin{aligned} V_{0x} &= V_0 \cos\alpha \\ V_{0y} &= V_0 \sin\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{V_0} = V_0 \cos\alpha\,\vec{i} + V_0 \sin\alpha\,\vec{j}$$

همچنین می توانیم سرعت متحرک در هر لحظه را به صورت زیر به دست آوریم.

$$V_x = V_0 \cos\alpha \qquad \vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} \;;\; V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \qquad (۱-۲۹)$$
$$V_y = -gt + V_0 \sin\alpha$$

نکته: می‌دانیم بردار سرعت متحرک در هر لحظه بر مسیر حرکت ذرّه مماس است. بنابراین می‌توانیم زاویه‌ای که متحرک در هر نقطه از مسیر حرکت، ضمن حرکت با راستای مثبت محور xها می سازد را از رابطه‌ی زیر تعیین کنیم:

$$\tan\theta = \frac{V_y}{V_x} \qquad (۱-۳۰)$$

مثال ۹۹

گلوله ای در شرایط خلا با سرعت اولیه ی $20\,\frac{m}{s}$ تحت زاویه ی 37° بالای افق پرتاب می شود.

الف) سرعت گلوله در نقطه اوج آن چقدر است؟

ب) سرعت گلوله، ۲ ثانیه پس از پرتاب چند متر بر ثانیه می شود؟

پ) متحرک در لحظه‌ی $t = 1/6\,s$ با راستای افق چه زاویه‌ای می‌سازد؟

Sanatisharif.ir

مثال ۱۰۰

از ارتفاع ۳۵ متری سطح زمین، گلوله ای را با سرعت اولیه ی $۶۰\frac{m}{s}$ با زاویه‌ی ۳۰° نسبت به افق بـه طـرف بـالا پرتاب می‌کنیم. اگر بتوان از مقاومت هوا چشم پوشی کرد،

الف) گلوله قبل از برخورد به زمین چه مدت در حرکت بوده است؟

ب) جابه‌جایی گلوله در طول حرکت چند متر است؟

مثال ۱۰۱

جسمی در شرایط خلا تحت زاویه‌ی α بالای افق پرتـاب مـی شـود. اگـر بـردار سـرعت اولیـه‌ی پرتـاب در SI $\vec{V}_\circ = ۱۰\vec{i} + ۱۰\sqrt{۳}\,\vec{j}$ باشد، مطلوبست:

الف) زاویه‌ی پرتاب با راستای افق (α).

ب) سرعت متحرک در لحظه‌ی $t = ۲\sqrt{۳}\,s$.

پ) شتاب متحرک در لحظه‌ی $t = ۲s$.

ت) تغییر بردار سرعت متحرک در ثانیه‌ی سوم حرکت.

نکته: تمام روابط مربـوط بـه سـقوط آزاد را مـی‌تـوان بـرای مولفـه‌ی عمـودی حرکـت بـه کـاربرد یعنی می‌توان نوشت:

$v_y^۲ - v_\circ^۲ \sin^۲\alpha = -۲g\Delta y$: معادله‌ی مستقل از زمان

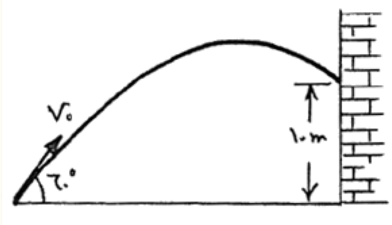
$\Delta y = \frac{v_{۱y} + v_{۲y}}{۲}\Delta t$: معادله‌ی مستقل از شتاب

$\Delta y_n = -g(n - ۰/۵) + v_\circ \sin\alpha$: جابه‌جایی در ثانیه‌ی nام

Sanatisharif.ir

◈ مثال ۱۰۲

مطابق شکل از سطح زمین گلوله‌ی کوچکی با سرعت اولیه‌ی V_0 تحت زاویه‌ی 60° بالای افق پرتاب می‌شود و با زاویه‌ی 45° به ارتفاع ۱۰ متری دیوار مقابل آن برخورد می‌کند.



الف) سرعت اولیه‌ی پرتاب چند متر بر ثانیه است؟

ب) زمان حرکت گلوله و فاصله‌ی دیوار تا محل پرتاب گلوله را تعیین کنید.

◈ مثال ۱۰۳

گلوله‌ی کوچکی‌از ارتفاع ۳۰ متری سطح زمین با سرعت اولیه‌ی $20\frac{m}{s}$ با زاویه 53° بالای افق پرتاب می‌شود.

الف) این گلوله پس از چه مدت به زمین می‌رسد؟

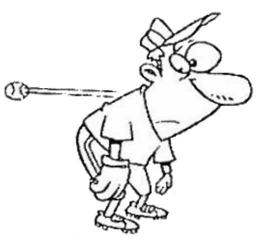
ب) این گلوله در ثانیه‌ی سوم حرکت چند متر جابه‌جا شده است؟

نکته: حداقل سرعت متحرک در حرکت پرتابی، مربوط به نقطه‌ی اوج آن است. در این صورت داریم:

$$V_{\text{اوج}} = V_{\min} = V_{0x} = V_0 \cos\alpha \qquad \vec{V}_{\text{اوج}} = V_0 \cos\alpha\, \hat{i} \qquad (۳۱-۱)$$

همچنین با توجه به آن که در این لحظه $V_y = 0$ است، می توان نوشت:

$$t_{\text{اوج}} = \frac{V_0 \sin\alpha}{g} \qquad y_{\text{اوج}} = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g} + y_0 \qquad (۳۱-۱)$$



Sanatisharif.ir

مثال ۱۰۴

جسمی گلوله ای از ارتفاع ۱۰ متری سطح زمین به طرف بالا پرتاب می شود و حداقل سرعت آن در طول حرکت $\frac{m}{s}$ ۸ می‌شود. اگر ارتفاع اوج گلوله از سطح زمین $11/8\,m$ باشد،

الف) سرعت اولیه و زاویه‌ی پرتاب را بیابید.

ب) زمان کل حرکت چند ثانیه است؟

نکته: در حرکت پرتابه، بیشترین مقدار x یعنی بیشترین مقدار پیشروی جسم در راستای محور xها را بُرد پرتابه می‌نامند و معمولا آن را با R نمایش می‌دهند.

اگر زمان کل حرکت را t فرض کنیم، در این صورت می‌توان نوشت:

$$R = x_{max} = V_0 \cos\alpha \cdot t \qquad (۳۲\text{-}۱)$$

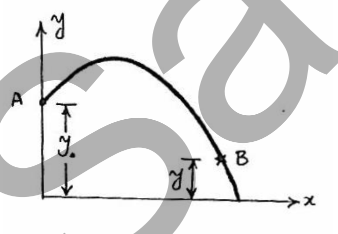
مثال ۱۰۵

گلوله ی کوچکی از ارتفاع ۲۵ متری سطح زمین با سرعت $\frac{m}{s}$ ۴۰ و زاویه‌ی 30° بالای افق پرتاب می‌شود.

الف) گلوله پس از چه مدت به زمین می‌رسد؟

ب) برد پرتابه چند متر است؟

نکته: اندازه‌ی سرعت متحرک در طول حرکت را می‌توان به کمک قانون بایستگی انرژی نیز تعیین کرد:



$$E_A = E_B \Rightarrow \frac{1}{2}mV_0^2 + mgy_0 = \frac{1}{2}mV^2 + mgy$$
$$\Rightarrow V_0^2 + 2gy_0 = V^2 + 2gy$$

$$V^2 = V_0^2 - 2g(y - y_0) \Rightarrow V^2 = V_0^2 - 2g\Delta y \qquad (۳۳\text{-}۱)$$

نکته: انرژی جنبشی ذره در نقطه ی اوج، کمترین مقدار در طول حرکت است و داریم:

$$K_{min} = K_{\text{اوج}} = \frac{1}{2}mV_0^2\cos^2\alpha \qquad (۳۳\text{-}۱)$$

sanatisharif.ir
مجری طرح توسعه عدالت آموزشی
www.sanatisharif.ir

مثال ۱۰۶

گلوله ای از ارتفاع ۵ متری سطح زمین با سرعت $20\frac{m}{s}$ وزاویه ی 53° بالای افق پرتاب می‌شود.

الف) سرعت گلوله در ارتفاع ۱۰ متری زمین چقدر است؟

ب) گلوله با چه سرعتی به زمین برخورد می‌کند؟

مثال ۱۰۷

گلوله‌ای از سطح زمین تحت زاویه‌ی α پرتاب می شود. اگر انرژی جنبشی گلوله در نقطه اوج، نصف انرژی جنبشی گلوله در نقطه‌ی پرتاب باشد. زاویه‌ی پرتاب (α) چند درجه است؟

مثال ۱۰۸

از نقطه‌ای در ارتفاع h از سطح زمین گلوله‌ای با سرعت $10\frac{m}{s}$ تحت زاویه‌ی 60° درجه بالای افق پرتاب می‌شود. اگر از مقاومت هوا صرف نظر کنیم و گلوله با سرعت $20\frac{m}{s}$ به زمین برخورد کند،

الف) ارتفاع h را بیابید.

ب) گلوله قبل از برخورد به زمین چه مدت در راه بوده است؟

۱-۲-۲. معادله‌ی مسیرحرکت پرتابی

می‌دانیم برای به دست آوردن معادله‌ی مسیر، در حرکت دو بعدی کافی است پارامتر زمان را بین معادلات مکان - زمان حذف نماییم. پس:

$$\left.\begin{array}{l} x = V_\circ \cos\alpha \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{x}{V_\circ \cos\alpha} \\ y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + V_\circ \sin\alpha \cdot t + y_\circ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

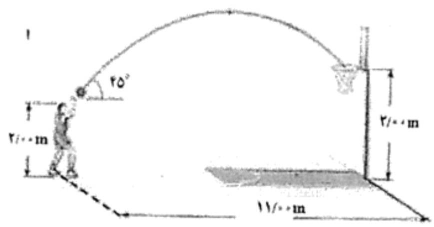
$$y = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{V_\circ^2 \cos^2\alpha} + x\tan\alpha + y_\circ \qquad (1-34)$$

Sanatisharif.ir
مجری طرح توسعه عدالت آموزشی
www.sanatisharif.ir

همان گونه که مشاهده می شود، مسیر حرکت پرتابه، یک سهمی وارونه است. بنابراین در حل و بررسی حرکت پرتابه می‌توان از تمام ویژگی‌های سهمی که در درس ریاضی خوانده ایم، استفاده کرد.

مثال ۱۰۹

در شکل مقابل ورزشکار توپ را با چه سرعت پرتاب کنیم تا توپ داخل سبد بیفتد؟

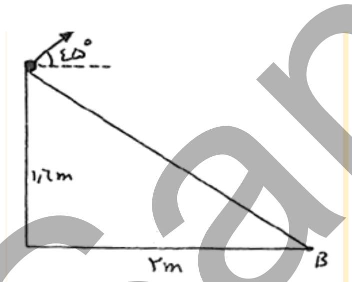


مثال ۱۱۰

جسمی را از بالای برجی به ارتفاع $40\,\mathrm{m}$ با زاویه‌ی 30° نسبت به افق به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. اگر سرعت اولیه‌ی پرتاب $20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد آن با زمین، تا پای برج چند متر است؟

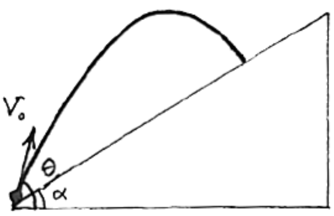
مثال ۱۱۱

مطابق شکل از بالای سطح شیبداری، در شرایط خلاء گلوله ای تحت زاویه‌ی 45° با افق پرتاب می‌شود. سرعت اولیه‌ی پرتاب چقدر باشد تا گلوله درست به پایین سطح شیبدار (نقطه‌ی لوله‌ی B) برخورد کند؟



sanatisharif.ir

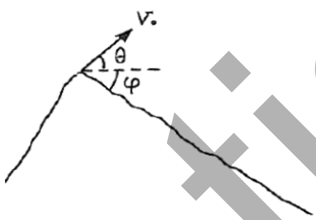
مثال ۱۱۲



مطابق شکل گلوله‌ای از پایین سطح شیبداری با زاویه‌ی شیب θ، تحت زاویه‌ی α نسبت به راستای افق پرتاب می‌شود، فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد گلوله با سطح شیبدار تا پایین سطح را بیابید.

$$R = \frac{2V_0^2 \cos^2\theta}{g\cos\alpha}\cdot\left(\tan\theta - \tan\alpha\right)$$

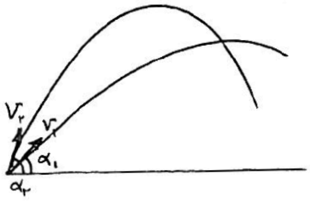
مثال ۱۱۳



مطابق شکل، پسر بچه‌ای در بالای تپه‌ای ایستاده است. این تپه دارای شیب یکنواخت با زاویه‌ی φ به طرف پایین است. او با چه زاویه ای نسبت به افق (θ) باید سنگی را پرتاب کند تا در دورترین نقطه سطح شیبدار را قطع نماید؟

Sanatisharif.ir

نکته: اگر دو گلوله با سرعت‌های اولیه‌ی V_1 و V_2 به ترتیب با زاویه های α_1 و α_2 بالای افق $(\alpha_2 > \alpha_1)$ در شرایط خلا پرتاب شوند، برای آنکه به یکدیگر برخورد نمایند، بازه‌ی زمانی پرتاب دو گلوله از رابطه ی زیر به دست می آید ؛



$$\Delta t = \frac{2V_1 V_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{g(V_1 \cos\alpha_1 + V_2 \cos\alpha_2)} \qquad (۳۵-۱)$$

مثال ۱۱۴

نکته‌ی صفحه‌ی قبل را ثابت کنید.

Sanatisharif.ir

مثال ۱۱۵

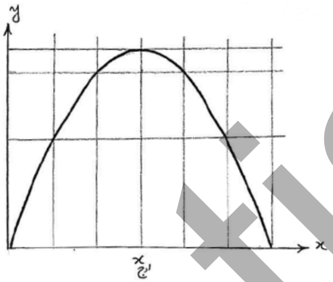
گلوله‌های A و B را به ترتیب با سرعت های اولیه‌ی $10\sqrt{2}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ و $5\sqrt{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ تحت زاویه‌های 45° و 60° به طرف بالا پرتاب می کنیم. بازه‌ی زمانی میان پرتابه ها چقدر باشد وتا دو گلوله در هوا به هم برخورد نمایند؟

$\left(\sin 15^\circ \simeq 0/25\right)$

۱-۲-۳. بررسی حالت‌های خاص

حرکت پرتابه را می‌توان در حالت های خاص زیر بررسی کرد و روابط خاصی برای این حالت‌ها به دست آورد:

الف. پرتابه‌ی افق به افق $\left(y_0 = 0\right)$



تمام روابطی که در مورد حرکت پرتابی گفته شد با اعمال شرط $y_0 = 0$ به روابط حرکت پرتابه‌ی افق به افق تبدیل می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$t_{\text{کل حرکت}} = 2t_{\text{اوج}} = 2\frac{V_0 \sin\alpha}{g} \qquad (۳۶\text{-}۱)$$

$$y_{\text{اوج}} = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \qquad (۳۷\text{-}۱)$$

✍ **نکته:** در پرتابه‌ی افق به افق حداکثر میزان پیشروی جسم در راستای افق، که به آن اصطلاحاً بُرد پرتابه گفته می‌شود، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$R_{\text{برد پرتابه}} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} \qquad (۳۸\text{-}۱)$$

و با توجه به متقارن بودن مسیر حرکت می‌توان نتیجه گرفت،

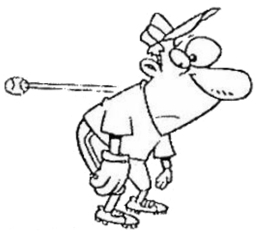
$$x_{\text{اوج}} = \frac{1}{2}R = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \qquad (۳۹\text{-}۱)$$

✍ **نکته:** در پرتابه‌ی افق به افق می توان برد پرتابه را از رابطه ی زیر نیز به دست آورد.

$$R = \frac{2V_{0x}V_{0y}}{g} \qquad (۴۰\text{-}۱)$$

✍ **نکته:** اگر برد پرتابه‌ی افق به افق را با R و ارتفاع اوج را H با نمایش دهیم، داریم:

$$\frac{H}{R} = \frac{1}{4}\tan\alpha \qquad (۴۱\text{-}۱)$$



Sanatisharif.ir

مثال ۱۱۶

روابط بالا را ثابت کنید.

نکته: در حرکت پرتابه ی افق به افق، اگر سرعت اولیه ثابت باشد، ...

- بیشترین برد زمانی اتفاق می‌افتد که پرتابه با زاویه‌ی 45° پرتاب شده باشد.
- زاویه‌های متمم دارای بردهای یکسانی هستند.

$$\alpha + \beta = 90 \Rightarrow R_\alpha = R_\beta$$

- برای زاویه‌های پرتابی که به یک اندازه از زاویه‌ی 45° بیشتر یا کمترند، بردها مساوی هستند.

مثال ۱۱۷

نکته‌های بالا را ثابت کنید.

Sanatisharif.ir
مجری طرح توسعه عدالت آموزشی
www.sanatisharif.ir

مثال ۱۱۸

از سطح زمین گلوله ای را با زاویه‌ی α و با سرعت اولیه‌ی $V_{\circ}$ به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. اگر سرعت گلوله در نقطه‌ی اوج $\frac{V_{\circ}}{۲}$ و برد آن $۲۰\sqrt{۲}\,\mathrm{m}$ باشد،

الف) α چند درجه است؟

ب) گلوله تا رسیدن به زمین چه مدت در راه بوده است؟

پ) ارتفاع اوج گلوله چند متر است؟

مثال ۱۱۹

از سطح زمین دو گلوله یکی تحت زاویه ۱۵° و با سرعت اولیه‌ی $V_{۱}$ و دیگری تحت زاویه‌ی ۴۵° و با سرعت اولیه‌ی $V_{۲}$ پرتاب می شوند. اگر برد دو گلوله برابر باشد؛

الف) نسبت $\frac{V_{۱}}{V_{۲}}$ را بیابید.

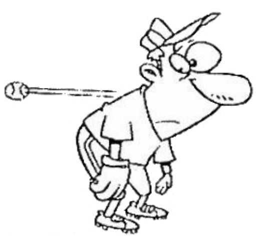
ب) نسبت ارتفاع اوج گلوله‌ی اول به دوم را تعیین کنید.

مثال ۱۲۰

معادله‌های حرکت پرتابه‌ای در SI به صورت $\begin{cases} x = ۱۰t \\ y = -۵t^{۲} + ۲۰t \end{cases}$ است.

الف) سرعت اولیه‌ی پرتابه و زاویه‌ی پرتاب را بیابید.

ب) برد وارتفاع اوج آن را تعیین کنید.



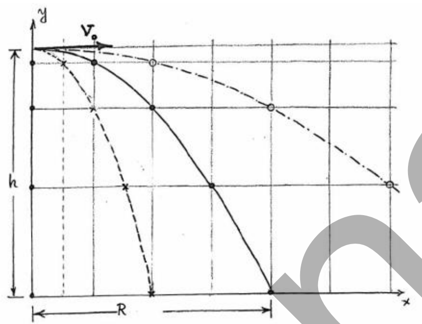
Sanatisharif.ir

پ) فاصله‌ی افقی دو وضعیتی که در آن ها جسم در ارتفاع ۱۵ متری قرار دارد، چند متر است؟

مثال ۱۲۱

معادله‌ی مسیر پرتابه‌ای در SI به صورت $y=-\frac{۱}{۱۶}x^{۲}+\frac{۴}{۳}x$ است. متحرک با چه سرعتی از ارتفاع ۵ متری سطح زمین می‌گذرد؟

ب. پرتابه‌ی افقی $(\alpha=۰)$



تمامی روابط حرکت پرتابه‌ای با شرط $\alpha=۰$، در اینجا به کار می‌رود.

به ویژه توجه به این نکته بسیار ضروری و مفید است که حرکت پرتابه درراستای عمودی، یک حرکت سقوط آزاد بدون سرعت اولیه است یعنی:

$$y=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}+y_{\circ}$$

و همچنین برای حرکت یکنواخت در راستای افق داریم. $x=V_{\circ}t$

نکته: در حرکت پرتابه‌ی افقی، زمان حرکت متحرک از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$t_{\text{کل حرکت}}=\sqrt{\frac{۲h}{g}} \qquad (۱-۴۲)$$

و همان گونه که مشاهده می شود، این رابطه مستقل از سرعت اولیه ی پرتابه است.

نکته: برد پرتابه دراین حالت از رابطه‌ی مقابل تعیین می شود:

$$R=\sqrt{\frac{۲h}{g}}\cdot V_{\circ} \qquad (۱-۴۳)$$

sanatisharif.ir
مجری طرح توسعه عدالت آموزشی www.sanatisharif.ir

مثال ۱۲۲

یک پرتابه‌ی افقی با سرعت $V_\circ$ در شرایط خلا از ارتفاع ۴۵ متری سطح زمین پرتاب می شود.

الف) گلوله چه مدت در راه است؟

ب) اگر در یک نقطه از مسیر بردار سرعت و شتاب با هم زاویه‌ی 30° بسازند و اندازه ی سرعت پرتابه در آن نقطه $20\frac{m}{s}$ باشد، $V_\circ$ را تعیین کنید.

پ) برد پرتابه چند متر است؟

مثال ۱۲۳

مطابق شکل، گلوله ای از بالای پلکانی که ارتفاع هر پله‌ی آن $16cm$ و عرض هر پله $20cm$ است، با سرعت $1/6\frac{m}{s}$ را به طور افقی پرتاب می‌شود. جسم اولین بار به کدام پله برخورد می‌کند؟