نکته: در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، جابه‌جایی در ثانیه‌های متوالی، یک تصاعد حسابی با قدر نسبت a (شتاب) تشکیل می‌دهند. یعنی اگر به جابه‌جایی در هر ثانیه، مقدار a را اضافه نماییم، جابه‌جایی در ثانیه‌ی بعدی به‌دست می‌آید:

$$\Delta x_n - \Delta x_{n-1} = a \qquad (۱-۱۷)$$

با تعمیم نکته‌ی فوق، می‌توان به رابطه‌ی زیبای زیر دست یافت:

$$a = \frac{\Delta x_m - \Delta x_n}{m-n} \qquad (۱-۱۸)$$

مثال ۳۶

جسمی با شتاب ثابت بر روی یک خط راست در حرکت است، در ثانیه‌ی سوم $۱۲\,\mathrm{m}$ و در ثانیه‌ی هفتم، $۲۰\,\mathrm{m}$ جا-به‌جا می‌شود. این جسم در ثانیه‌ی پنجم چند متر جابه‌جا می‌شود؟ در ثانیه‌ی دهم چه‌طور؟

مثال ۳۷

جسمی با شتاب ثابت، بر روی خط راست در حرکت است و در ثانیه‌ی پنجم حرکت، $۲۰\,\mathrm{m}$ را می‌پیماید. جابه‌جایی متحرّک دربازه‌ی زمانی $(۳\,\mathrm{s}, ۶\,\mathrm{s})$ چند متر است؟

مثال ۳۸

سرعت اولیه‌ی متحرّکی که با شتاب ثابت بر روی خط راست حرکت می‌کند، $۱۵\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ است. مسافتی که این متحرّک درهر ثانیه می‌پیماید، $۳\,\mathrm{m}$ کمتر از مسافت ثانیه‌ی قبل است. این متحرّک از مبدأ زمان تا لحظه‌ی توقّف چه مسافتی را می‌پیماید؟

نکته:: برای جسمی که با شتاب ثابت بر روی خط راست حرکت می‌کند، می‌توان جابه-جایی در t ثانیه‌ی nاُم را از رابطه‌ی زیر تعیین کرد:

$$\Delta x_{n,t} = at^{۲}\left(n - ۰/۵\right) + v_{۰}t \qquad (۱-۱۹)$$

Sanatisharif.ir

مثال ۳۹

ذرّه‌ای با سرعت اولیه $۵\frac{m}{s}$ و با شتاب $۲\frac{m}{s^۲}$ بر روی خط راست در حرکت است.

الف) جابه‌جایی متحرّک در ۵ ثانیه‌ی سوم حرکت چند متر است؟

ب) جابه‌جایی متحرّک در ۳ ثانیه‌ی پنجم حرکت را بیابید.

نکته: در تمامی روابط حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست، سرعت اولیه $(v_۰)$ حضور دارد. مناسب است که رابطه‌ای مستقل از این کمیّت نیز به دست آوریم. برای این کار کافی است $v_۰$ را از میان معادلات حذف نماییم.

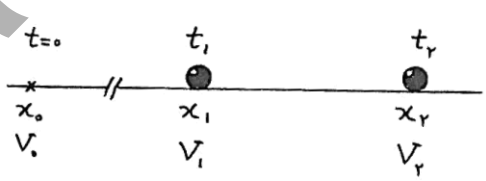
$$\left.\begin{array}{l} v=at+v_۰ \Rightarrow v_۰=v-at \\ x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰ \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}at^۲+(v-at)t+x_۰$$

$$x=-\frac{۱}{۲}at^۲+vt+x_۰ \qquad (۲۰\text{-}۱)$$

مثال ۴۰

متحرّکی در مسیر مستقیم و با شتاب ثابت، فاصله‌ی ۸۰ متری از A تا B را در مدّت ۸s طی می‌کند و در لحظه‌ی رسیدن به نقطه‌ی B، سرعتش $۱۵\frac{m}{s}$ است. شتاب متحرّک را بیابید.

نکته: روابط مربوط با شتاب ثابت بر روی خط راست را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد و در هر بازه‌ی زمانی استفاده کرد:

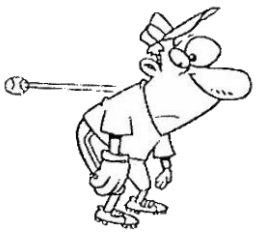


معادله‌ی سرعت ـ زمان: $v_۲=a(t_۲-t_۱)+v_۱$

معادله‌ی مستقل از زمان: $v_۲^۲-v_۱^۲=۲a(x_۲-x_۱)$

معادله‌ی مستقل از شتاب: $x_۲-x_۱=\frac{v_۲+v_۱}{۲}(t_۲-t_۱)$

سرعت متوسط: $\overline{V}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}$



Sanatisharif.ir
مجری طرح توسعه عدالت آموزشی
www.sanatisharif.ir

۱-۱-۳. تحلیل نمودارهای حرکت

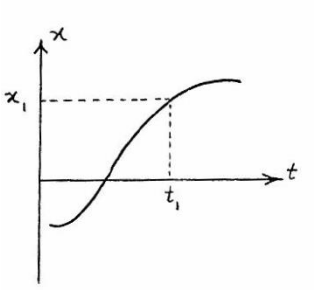
بیان شد که وقتی جسمی بر روی خط راست حرکت می‌کند، مکان آن در حالت کلّی، تابعی از زمان است و به صورت $x = f(t)$ در نظر گرفته می‌شود. اکنون اگر این تابع را در دستگاه مختصات $x-t$ رسم نماییم، نمودار مکان ـ زمانِ حرکت را رسم کرده‌ایم. به همین ترتیب می‌توان نمودارهای سرعت ـ زمان و شتاب ـ زمان را نیز برای متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، رسم کرد.

از این نمودارها اطّلاعات بسیار مفیدی در مورد حرکت را می‌توان استخراج کرد. در ادامه به بررسی نمودارهای حرکت و نحوه‌ی استخراج اطلاعات از آن‌ها می‌پردازیم:

الف. نمودار مکان ـ زمان

از روی نمودار مکان ـ زمان یک جسم، می‌توان اطّلاعات زیر را به دست آورد:

- مکان متحرّک:



ساده‌ترین چیزی که می‌توان از نمودار مکان - زمان به دست آورد، مکان متحرّک در لحظات دلخواه است. برای این منظور کافی است از لحظه‌ی مورد نظر، واقع بر محور زمان، خطی عمود بر محور افقی رسم نماییم تا نمودار را قطع کند و سپس از نقطه‌ی به دست آمده، خطی موازی محور افقی رسم نماییم تا مکان ذره را مشخص کند.

- جابه‌جایی:

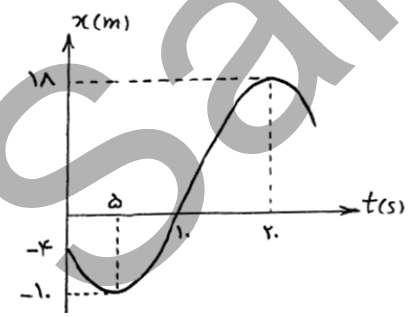
با در دست داشتن مکان متحرّک در لحظات مختلف، به راحتی می‌توان جابه‌جایی جسم را در بازه‌ی زمانی مورد نظر به دست آورد:

$$\Delta x = x_f - x_i$$

- مسافت طی شده:

اگر مجموع جابه‌جایی متحرّک در جهت مثبت را با قدر مطلق مجموع جابه‌جایی‌های آن در جهت منفی جمع نماییم، مسافت طی شده توسط متحرّک به دست می‌آید.

مثال ۴۱



نمودار مکان ـ زمان متحرّکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند. نشان داده شده است.

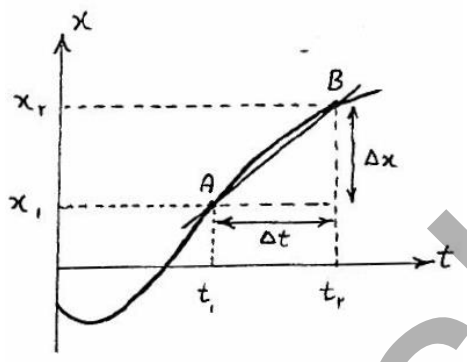
الف) جابه‌جایی متحرّک در ۲۰ ثانیه‌ی اوّل حرکت چند متر است؟

ب) مسافت طی شده در ۱۰ ثانیه‌ی اوّل، چند برابر مسافت طی شده در ۱۰ ثانیه‌ی دوم است؟

پ) مسافت طی شده در ۱۰ ثانیه ی اوّل، چند برابر مسافت طی شده در ۱۰ ثانیه ی دوم است؟

Sanatisharif.ir

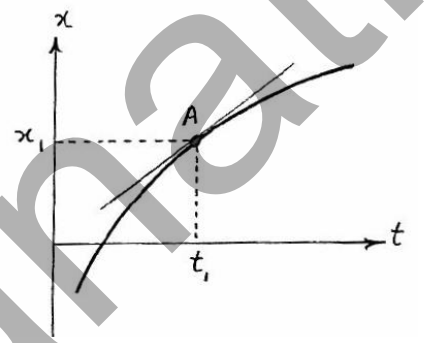
- سرعت متوسط:



با معلوم بودن جابه‌جایی (Δx) و بازه‌ی زمانی (Δt) به راحتی می‌توان سرعت متوسط را به کمک تعریف آن یعنی رابطه‌ی $\overline{V}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ تعیین کرد. با توجّه به شکل مقابل، تعبیر هندسی سرعت متوسط در یک بازه‌ی زمانی، چنین بیان می‌شود:

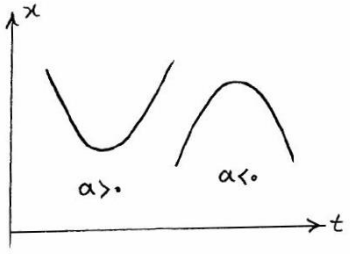
سرعت متوسط یک متحرّک در یک بازه‌ی زمانی، برابر شیب پاره‌خطی است که نقاط متناظر با آن دو لحظه روی نمودار را به هم وصل می‌کند.

- سرعت لحظه‌ای:

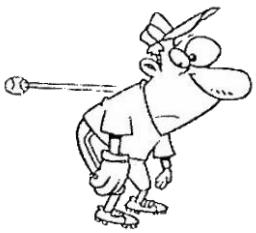


در تعریف سرعت لحظه‌ای دیدیم که $v=\frac{dx}{dt}$ است. یعنی سرعت مشتق تابع $x-t$ بر حسب زمان است. از سوی دیگر در ریاضیات خوانده‌ایم که برای به دست آوردن مشتق یک تابع در یک نقطه‌ی مورد نظر کافی است شیب خط مماس بر نمودار نمایش تابع در آن نقطه را به دست آوریم. بنابراین سرعت متحرّک در هر لحظه، برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در آن لحظه است.

- علامت شتاب:



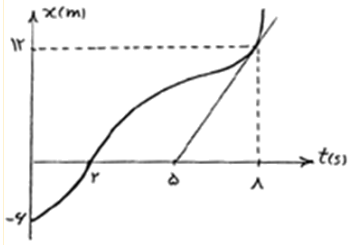
با توجّه به آن‌که مشتق دوّم مکان نسبت به زمان، شتاب متحرّک را تعیین می‌کند و از سوی دیگر مشتق دوّم یک تابع، جهت تقعّر آن تابع است، می‌توان نتیجه گرفت جهت تقعر نمودار مکان ـ زمان، بیان کننده‌ی علامت شتاب است.



Sanatisharif.ir
مجری طرح توسعه عدالت آموزشی
www.sanatisharif.ir

مثال ۴۲

با توجّه به نمودار روبه‌رو، سرعت متحرّک در لحظه‌ی $t = 8\,s$، چند برابر سرعت متوسط آن در کل حرکت است؟

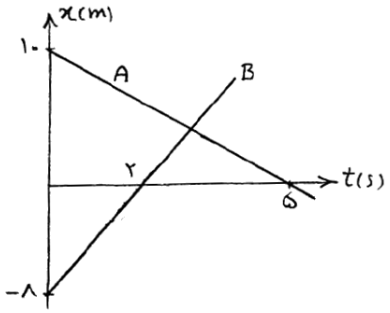


مثال ۴۳

در مثال ۴۲، سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی $(2\,s, 8\,s)$ چه‌قدر است؟

مثال ۴۴

نمودار مکان ـ زمان دو متحرّک A و B که بر روی یک خط راست در حرکتند، مطابق شکل مقابل است.



الف) دو متحرّک در چه لحظه‌ای به هم می‌رسند؟

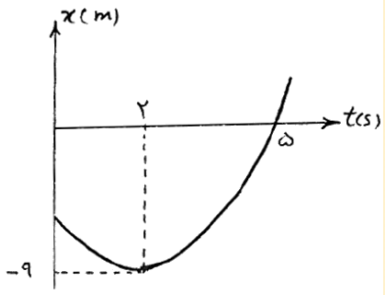
ب) در چه لحظاتی فاصله‌ی میان آن‌ها $16\,m$ می‌شود؟

نکته: تنها در صورتی از روی نمودار مکان ـ زمان می‌توان مقدار شتاب متحرک را تعیین کرد که حرکت با شتاب ثابت باشد. در این وضعیت، نمودار مکان ـ زمان متحرک یک سهمی است و برای تعیین شتاب، می‌توان از معادلات حرکت با شتاب ثابت، به ویژه معادلات مستقل از شتاب و مستقل از مکان استفاده کرد.

Sanatisharif.ir

مجری طرح توسعه عدالت آموزشی
www.sanatisharif.ir

مثال ۴۵



نمودار مکان ـ زمان متحرّکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، سهمی نشان داده شده در شکل مقابل است.

الف) سرعت اولیه و شتاب متحرّک را بیابید.

ب) در لحظه‌ای که متحرّک از مبدأ زمان می‌گذرد، سرعتش چند متر بر ثانیه است؟

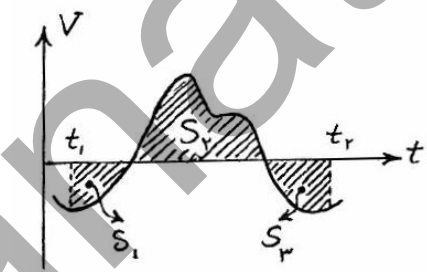
ج) معادله‌ی حرکت را برای آن بنویسید.

د) سرعت متوسط متحرّک در ۵ ثانیه‌ی اوّل حرکت چه‌قدر است؟

ب. نمودار سرعت ـ زمان

شاید بتوان مهم‌ترین و پرکاربردترین نمودار حرکت را نمودار سرعت ـ زمان به حساب آورد. تمامی اطلاعات حرکت، به جز مکان متحرّک را می‌توان از این نمودار استخراج کرد:

- جابه‌جایی:



از آنجا که سرعت، مشتق مکان نسبت به زمان است (و در نتیجه مکان، انتگرال سرعت نسبت به زمان می‌باشد!) می‌توان نتیجه گرفت:

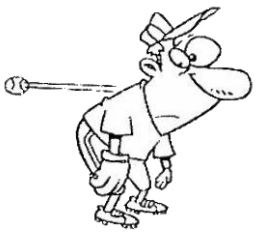
مساحت بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان در یک بازه‌ی زمانی، برابر جابه‌جایی متحرّک در آن بازه‌ی زمانی است. یعنی:

$$\Delta x = -S_1 + S_2 - S_3 \pm \cdots \qquad (؟؟-۱)$$

✍ **نکته:** اگر *فقط* نمودار سرعت ـ زمان را در اختیار داشته باشیم، نمی‌توانیم اطّلاعاتی در مورد مکان ذرّه به دست آوریم. بلکه فقط تغییر مکان را می‌توان به دست آورد.

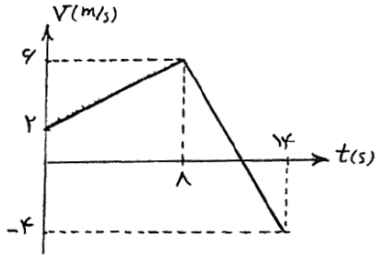
- مسافت طی شده:

با توجّه به تعریف مسافت طی شده، می‌توان گفت: مسافت طی شده توسط متحرّک در یک بازه‌ی زمانی، برابرِ مجموع قدر مطلق مساحت‌های محصور بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان در آن بازه‌ی زمانی است.



Sanatisharif.ir
مجری طرح توسعه عدالت آموزشی
www.sanatisharif.ir

مثال ۴۶



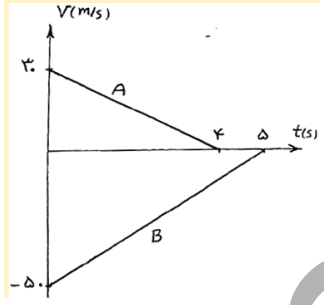
نمودار سرعت ـ زمان متحرّکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل است.

الف) متحرّک در کلّ حرکت (۱۴ثانیه) چه مسافتی پیموده و چند متر جابه‌جا شده است؟

ب) حداکثر فاصله‌ی متحرّک تا نقطه‌ی شروع حرکت چند متر است؟

ج) در ۴ ثانیه‌ی دوم حرکت، متحرّک چند متر جابه‌جا شده است؟

مثال ۴۷



نمودار سرعت ـ زمان دو قطار که بر روی یک ریل، یکدیگر را در فاصله‌ی ۳۰۰m متری از هم می‌بینند و ترمز می‌نمایند، مطابق شکل آمده است.

الف) در لحظه‌ای که قطار A متوقّف شده است، سرعت قطار B چه‌قدر است؟

ب) در این لحظه، فاصله‌ی دو قطار از هم چند متر است؟

ج) حداقل فاصله‌ی دو قطار از هم چند متر خواهد شد؟

Sanatisharif.ir