فیزیک ۱

پیش دانشگاهی

حرکت نوسانی

Fadaifard.ir

حمید فدائی فرد

حرکت نوسانی

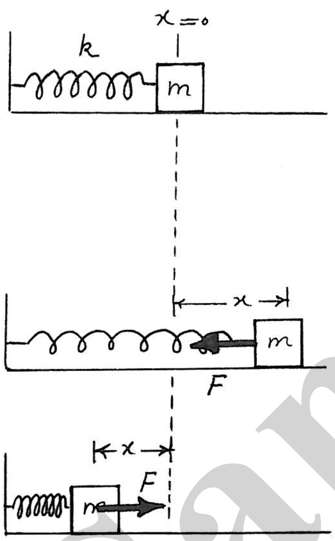
Oscillation

«حرکت نوسانی ساده» حرکتی است رفت و برگشتی روی یک پاره خط، به گونه‌ای که:

- به صورت کاملاً متقارن، حول نقطه‌ی وسط پاره خط صورت گیرد. این نقطه را مرکز نوسان می‌نامیم.
- نیروی وارد بر جسم در هر نقطه، متناسب با فاصله‌ی جسم تا مرکز نوسان باشد.
- جهت نیروی وارد بر جسم، به سمت مرکز نوسان باشد.

به عنوان دو نمونه از حرکت نوسانی ساده، می‌توان حرکت «جرم متصل به فنر» و «آونگ» (با زاویه‌ی انحراف کم) را در نظر گرفت:

حرکت دستگاه جرم - فنر:

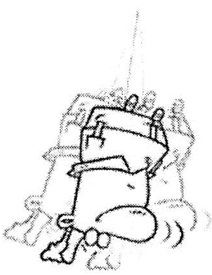


جسمی به جرم m را در نظر می‌گیریم که توسط فنری با ضریب سختی k به نقطه‌ای متصل است و روی یک سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد. در این حالت دستگاه در تعادل است و تغییر طول فنر نسبت به حالت عادی آن صفر است ($x=0$)

اکنون اگر جسمی را از حالت تعادل خارج کنیم، مثلاً جسم را به سمت راست (یا چپ) منتقل نماییم، $x \neq 0$ است و براساس قانون هوک نیرویی از طرف فنر به جسم وارد می‌شود که تمایل دارد دستگاه را به وضع تعادل باز گرداند.

هر قدر فاصله‌ی جسم تا وضع تعادل بیشتر باشد، نیروی بازگرداننده نیز قوی‌تر است و این نیرو تمایل دارد جسم را به وضع تعادل باز گرداند. اما هنگامی که جسم به وضع تعادل می‌رسد، در این نقطه ساکن نمی‌ماند، زیرا دارای سرعت است و جسم می‌خواهد با همان سرعت به حرکت خود ادامه دهد.

این وضعیت سبب می‌شود که دستگاه جرم - فنر روی پاره خطی با طول ثابت، حرکت رفت و برگشتی انجام دهد.



مدت زمان یک رفت و برگشت کامل نوسانگر را دوره می‌نامند و معمولاً آن را با T نمایش می‌دهند.

⚠ **نکته:** اگر نوسانگر در مدت t ثانیه، تعداد N نوسان کامل انجام دهد، می‌توان نوشت:

$$T=\frac{t}{N}$$

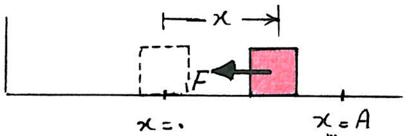
تعداد نوسانات کامل انجام شده توسط نوسانگر در مدت ۱ ثانیه را بسامد (فرکانس) می‌نامیم و آن را با f نشان می‌دهیم.

با توجه به آنچه گفته شد، می‌توان نتیجه گرفت:

$$f=\frac{1}{T}$$

یکای بسامد، در دستگاه بین‌المللی یکاها (SI)، $\frac{1}{s}$ است که آن را هرتز می‌نامند و با Hz نمایش می‌دهند.

معادله‌ی حرکت نوسانگر جرم - فنر:



جسمی به جرم m را در نظر می‌گیریم که به فنری با ثابت k متصل است و از حال تعادل به اندازه‌ی $x_{max}=A$ خارج و رها شده است. در لحظه‌ای که فاصله‌ی جسم تا وضع تعادل، x باشد با توجه به قانون دوم نیوتن برای این جسم می‌توان نوشت:

$$(\Sigma F)_x=ma \Rightarrow -kx=ma \Rightarrow a=-\frac{k}{m}x$$

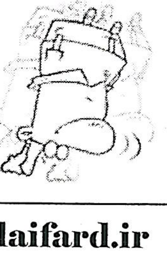
از سوی دیگر از مکانیک می‌دانیم: شتاب، مشتق دوم تابع مکان نسبت به زمان است. یعنی

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}$$

بنابراین می‌توان نوشت،

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x$$

با حل این معادله، می‌توان معادله‌ی حرکت نوسانگر ساده را به دست آورد. حل این معادله - که یک معادله‌ی دیفرانسیل نامیده می‌شود - در حد اطلاعات فعلی ما نیست، اما با توجه به شکل معادله، می‌توان جواب آن را حدس زد. تابع $x(t)$ تابعی است که اگر از آن، دوبار برحسب t مشتق بگیریم، ضریبی از خود تابع با علامت منفی به دست می‌آید. از ریاضیات دبیرستانی می‌دانیم که تابع سینوسی و کسینوسی چنین ویژگی‌ای دارد.



با توجه به آنکه در برنامه‌ی درسی همواره فرض می‌شود که نوسانگر در مبداء زمان، در مبداء مکان بوده و در جهت مثبت محور xها حرکت می‌کند، می‌توان جواب پیشنهادی زیر را برای حرکت نوسانگر ساده در نظر گرفت:

$$\boxed{x(t) = A\sin\omega t}$$

اکنون این جواب پیشنهادی را در معادله قرار می‌دهیم:

$$x = A\sin\omega t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = +A\omega\cos\omega t \Rightarrow \left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -A\omega^2\sin\omega t\\ x &= A\sin\omega t\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی اخیر و معادله‌ی حرکت نوسانی ساده می‌توان نتیجه گرفت:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

در این رابطه، ω را بسامد زاویه‌ای می‌نامیم. یکای ω در SI، رادیان بر ثانیه (rad/s) است.

مثال ۱- وزنه‌ای به جرم m، توسط فنری به ضریب سختی $20\ N/cm$ روی یک سطح افقی بدون اصطکاک حرکت می‌کند و معادله‌ی حرکت آن در SI به صورت $\frac{d^2x}{dt^2} + 100x = 0$ است. جرم وزنه چند گرم است؟

نکته: عبارت ωt را فاز حرکت می‌نامند و معمولاً آن را با φ نمایش می‌دهند. اگر فاز حرکت در لحظات t_1 و t_2 را به ترتیب با φ_1 و φ_2 نمایش دهیم می‌توان نوشت:

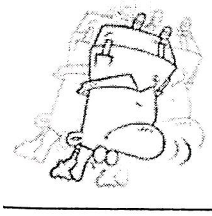
$$\left\{\begin{aligned} t_1 &: \ \varphi_1 = \omega t_1\\ t_2 &: \ \varphi_2 = \omega t_2\end{aligned}\right. \Rightarrow \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega t_2 - \omega t_1 = \omega(t_2 - t_1) \Rightarrow \Delta\varphi = \omega.\Delta t$$

از رابطه‌ی اخیر می‌توان نتیجه گرفت: بسامد زاویه‌ای، «تغییر فاز نوسانگر در مدت یک ثانیه است».

مثال ۲- ذره‌ای روی محور x ها دارای حرکت نوسانی ساده است و در مدت $\frac{1}{120}$ ثانیه، فاز حرکت آن $\frac{\pi}{10}$ رادیان تغییر می‌کند.

الف) بسامد زاویه‌ای نوسانگر را بیابید.

ب) پس از چه مدت فاز حرکت نوسانگر، به اندازه‌ی 2π تغییر می‌کند.



نکته: از آنجا که دوره‌ی تناوب تابع سینوسی 2π است، می‌توان نتیجه گرفت که پس از گذشت یک دوره‌ی کامل (T)، فاز حرکت به اندازه‌ی 2π تغییر می‌کند. بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta t = T \\ \Delta\varphi = 2\pi\end{array}\right\} \Rightarrow \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}$$

مثال ۳ـ نوسانگری روی پاره خطی به طول ۱۰cm حرکت می‌کند و در هر دقیقه ۴۰ بار طول پاره خط را سپری می‌کند. معادله‌ی حرکت این نوسانگر را بنویسید.

نکته: با توجه به دو رابطه‌ای که برای بسامد زاویه‌ای بیان شد، می‌توان برای دستگاه جرم - فنر نوشت:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

مثال ۴ـ معادله‌ی حرکت نوسانگری در SI به صورت $x = 0.05 \sin 50\pi t$ است.

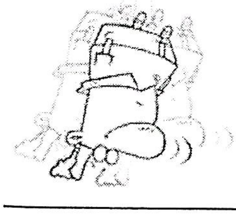
الف) دامنه، بسامد و دوره‌ی نوسانگر را تعیین کنید.

ب) سرعت متوسط متحرک در بازه‌ی زمانی $t_1 = \frac{1}{50}\,s$ تا $t_2 = \frac{3}{100}\,s$ چند cm/s است؟

پ) حداقل مدت زمان لازم برای دو بار عبور متوالی از فاصله‌ی ۲٫۵ سانتی‌متری مبداء، چند ثانیه است؟

ت) متحرک در مدت ۲ ثانیه‌ی اول حرکت چه مسافتی را طی می‌کند؟

ث) حداکثر مسافت طی شده درمدت ۲ ثانیه، چند برابر حداقل مسافت طی شده در ۲ ثانیه است؟



معادلات حرکت نوسانی ساده :

همانگونه که گفته شد، معادلهٔ مکان - زمان نوسانگری که با دامنه‌ی A و سابدزاویه‌ای ω حرکت نوسانی انجام می دهد، به صورت $x(t)=A\sin\omega t$ است. اکنون می توانیم معادلات سرعت - زمان و شتاب - زمان را برای این جسم به دست آوریم :

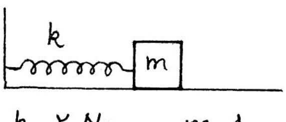
$$V=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(A\sin\omega t)=A\omega.\cos\omega t \Rightarrow V=A\omega\cos\omega t$$

$$a=\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dt}(A\omega\cos\omega t)=-A\omega^2\sin\omega t \Rightarrow a=-A\omega^2\sin\omega t$$

نکته : در حرکت نوسانی، بیشینه‌ی سرعت و شتاب به ترتیب $V_m=A\omega$ و $a_m=A\omega^2$ است.

مثال ۵ - بیشینه‌ی سرعت و شتاب یک نوسانگر ساده به ترتیب $1\ m/s$ و $10\ m/s^2$ است. بسامد نوسان و دامنه‌ی آن را بیابید.

مثال ۶ - در شکل مقابل، سطح بدون اصطکاک و جسم در تعادل است. وزنه را ۴cm به سمت راست کشیده، رها می‌کنیم.

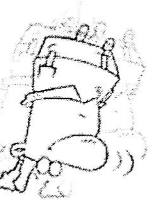


$k=2\ N/cm$; $m=500\ g$

الف) معادله‌ی سرعت - زمان این متحرک را بنویسید.

ب) در چه لحظاتی سرعت متحرک $40\ cm/s$ می شود؟

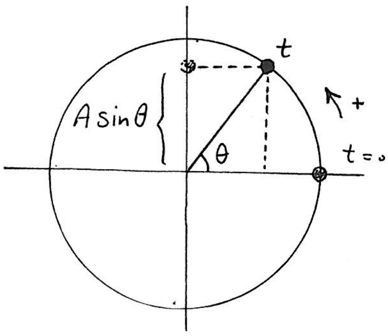
مثال ۷ - در یک نوسانگر ساده با دوره‌ی ۰/۵s و دامنه‌ی ۴cm، هنگام عبور نوسانگر از محل تعادل به آن سرعتی در همان جهت حرکت داده می شود به گونه ای که دامنه‌ی نوسان ۶cm می شود.



الف) بسامد زاویه‌ای حرکت چند برابر می شود؟

ب) سرعت داده شده به جسم چند m/s است ؟

دایره‌ی مرجع در حرکت نوسانی :



جسم کوچکی را در نظر بگیرید که با سرعتی ثابت ، دایره‌ای به شعاع A را دور می‌زند . اگر این جسم در مدت زمان T ثانیه یک دور کامل دایره را طی کند ، می‌توان برای آن کمیتی ثابت تعریف کرد که بیانگر مقدار زاویه‌ی جاروب شده توسط جسم در مدت یک ثانیه باشد :

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \Delta\theta = \omega\,\Delta t$$

اگر این متحرک در لحظه‌ی $t=0$ روی محور x ها باشد، خواهیم داشت :

$$\theta - 0 = \omega(t - 0) \Rightarrow \theta = \omega t$$

اکنون تصویر حرکت این جسم بر محور عمودی را در نظر می‌گیریم و داریم :

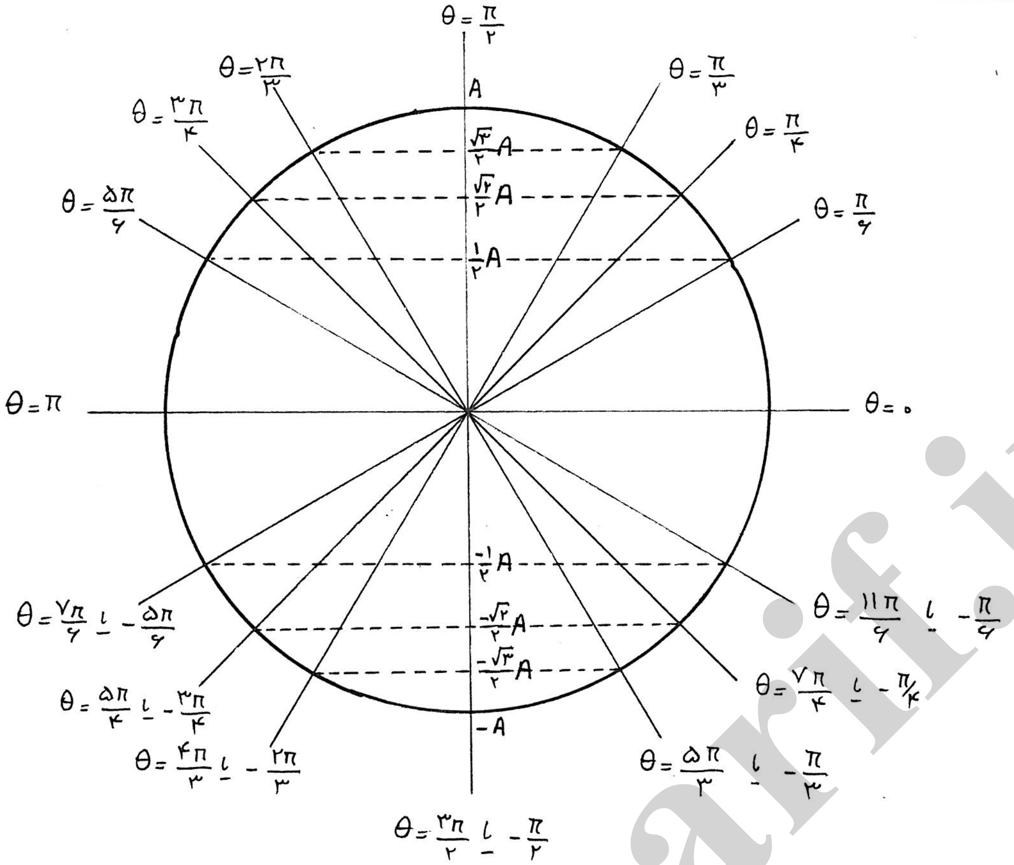
$$y = A\sin\theta \xrightarrow{\theta=\omega t} y = A\sin\omega t$$

معادله‌ی اخیر، با معادله‌ی مکان - زمان نوسانگر ساده بسیار شباهت دارد. بنابراین می‌توان گفت : هنگامی که ذره‌ای روی یک دایره حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد، تصویر آن (یا مولفه‌ی عمودی بردار مکان آن) حرکت نوسانی ساده خواهد کرد.

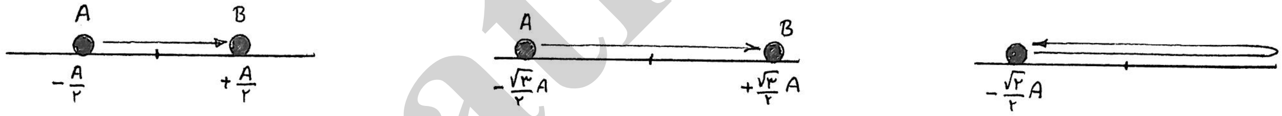
⚠ **نکته** : زاویه‌ی طی شده توسط ذره‌ی روی دایره‌ی مرجع در بازه‌های زمانی یکسان با هم برابر است و می‌توان با استفاده از تناسب ساده ، زاویه‌ها را از روی زمان‌ها و همچنین زمان‌های طی شده را از روی زاویه‌ها تعیین کرد.

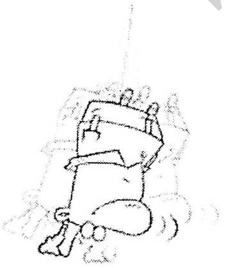
دقت به این نکته نیز حائز اهمیت است که : تغییر زاویه‌ی ذره‌ای که روی دایره‌ی مرجع حرکت می‌کند، همان تغییر فاز ذره‌ای است که حرکت نوسانی انجام می‌دهد.

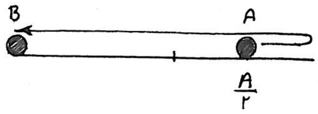
⚠ **نکته** : معمولاً در حل مسائل - به ویژه‌ی تست‌های کنکور ! - وضعیت نوسانگر در فازهای محدودی مورد بررسی قرار می‌گیرد. شکل زیر به بیان این فازها پرداخته است. این شکل را به دقت در خاطر بسپارید.

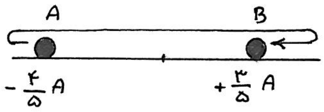


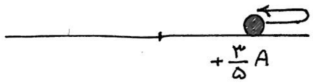
مثال ۸ - در هرکدام از شکل های زیر، زمان لازم برای رسیدن نوسانگر از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B ، چه کسری از دوره (T) است؟



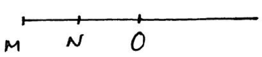






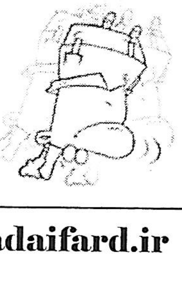


مثال ۹- نوسانگری مطابق شکل روی پاره خطی به طول $20\,cm$ حرکت نوسانی ساده انجام می‌دهد. اگر نوسانگر فاصله‌ی $MN=5cm$ را در مدت $0/2\,s$ ثانیه طی کند، فاصله‌ی NO را در چه مدت طی می‌کند و فرکانس نوسان چند هرتز است؟ (نقطه‌ی O مرکز نوسان است)

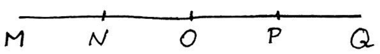


مثال ۱۰- در حرکت نوسانی ساده به معادله‌ی $x=0/1\sin(10\pi t)$ ، پس از چه مدت متحرک برای سومین بار از ۵ سانتی‌متری مبدأ می‌گذرد؟

مثال ۱۱- در یک حرکت هماهنگ ساده، نوسانگر در لحظه‌ی $t_1=7/5\,s$ در موقعیت $x=+A$ و در لحظه‌ی $t_2=11/5\,s$ بعد از یک بار تغییر جهت، در موقعیت $x=-\frac{A}{2}$ است. دوره‌ی نوسان چند ثانیه است؟



مثال ۱۲ـ نوسانگری روی پاره خطی به طول ۳۰ cm حرکت نوسانی انجام می دهد. اگر زمان طی شدن فاصله های MN، NP و PQ با هم برابر باشد، نسبت $\frac{MN}{NP}$ را بیابید.



مثال ۱۳ـ نوسانگری در بُعد بیشینه است. پس از چه مدت نوسانگر برای دومین بار در نصف بعد بیشینه قرار می گیرد؟

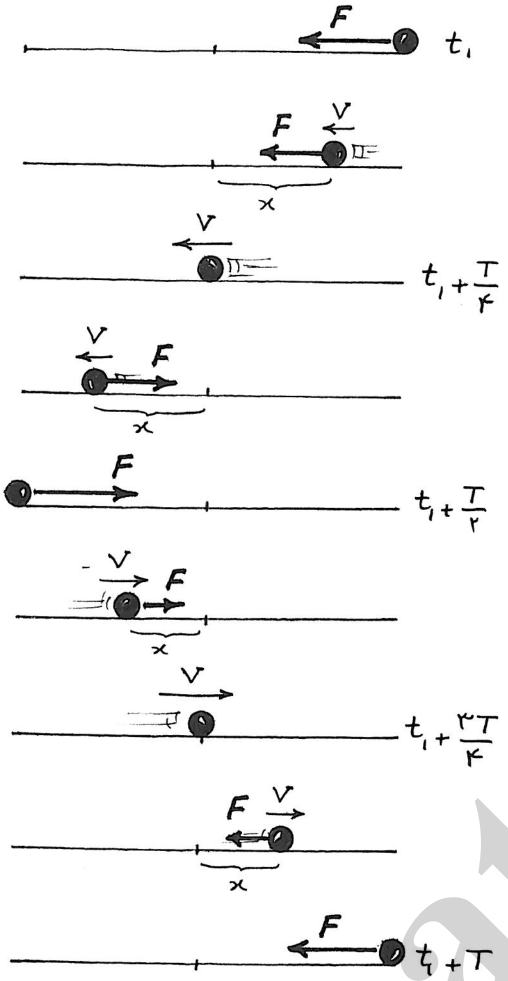
مثال ۱۴ـ بیشترین جابه جایی که یک نوسانگر در مدت $\frac{T}{4}$ می تواند داشته باشد، چه کسری از دامنه است؟ (T، دوره ی نوسان است.)

مثال ۱۵ـ نوسانگری در لحظه ی t_1 درمکان $x_1=6\,cm$ و در لحظه ی $t_2>t_1$ درمکان $x_2=-8\,cm$ قرار دارد. اگر بسامد زاویه ای نوسان $10\pi\,\frac{rad}{s}$ باشد، اندازه ی بیشترین سرعت متوسط نوسانگر در بازه ی زمانی t_1 تا t_2 را به دست آورید. (دامنه ی نوسان این ذره ۱۰cm است)

مثال ۱۶ـ ذره ای روی پاره خطی به طول 2A، با دوره ی T حرکت نوسانی انجام می دهد. بیشترین سرعت متوسط این ذره هنگامی که از $+\frac{A}{2}$ به $\frac{\sqrt{2}}{2}A$ می رود، چقدر است؟

تحلیل حرکت نوسانی :

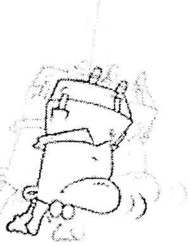
نوسانگری را در نظر می‌گیریم که روی پاره خطی به طول $2A$ در حال انجام حرکت نوسانی ساده است. می‌خواهیم وضعیت حرکت این ذره را در مدت یک دوره بررسی کنیم.



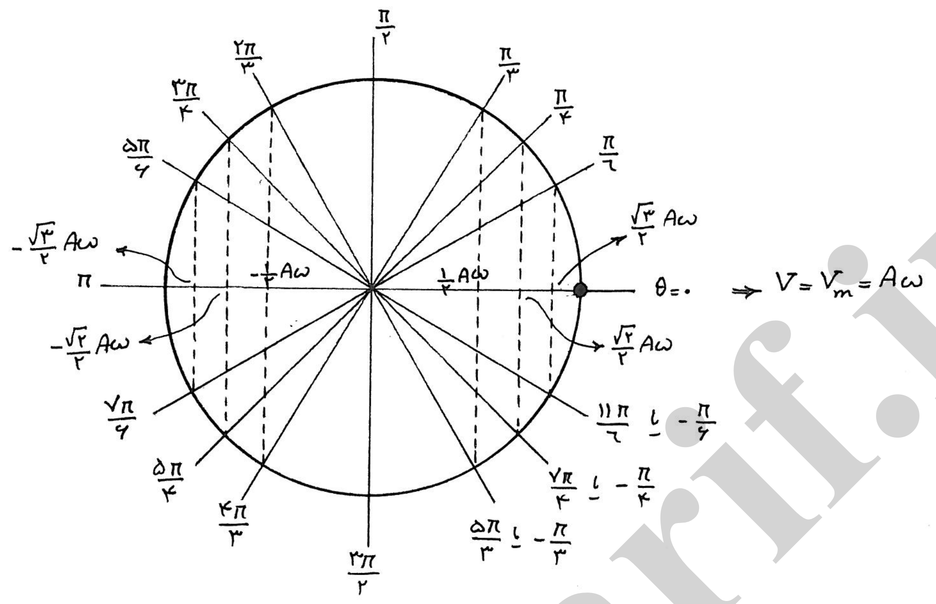
t_1	$x=x_m=A$	$V=0$	$a=-A\omega^2$	$F=-mA\omega^2$
	$x>0$	$V<0$	$a<0$	$F<0$
$t_1+\frac{T}{4}$	$x=0$	$V=-A\omega$	$a=0$	$F=0$
	$x<0$	$V<0$	$a>0$	$F>0$
$t_1+\frac{T}{2}$	$x=-A$	$V=0$	$a=+A\omega^2$	$F=+mA\omega^2$
	$x<0$	$V>0$	$a>0$	$F>0$
$t_1+\frac{3T}{4}$	$x=0$	$V=A\omega$	$a=0$	$F=0$
	$x>0$	$V>0$	$a<0$	$F<0$
t_1+T	$x=A$	$V=0$	$a=-A\omega^2$	$F=-mA\omega^2$

نکته : با توجه به تحلیل بالا می‌توان نتیجه گرفت، در حرکت نوسانی ساده ...

- هرگاه نوسانگر به طرف مبداء نوسان حرکت می‌کند، سرعت (V) و شتاب (a) با یکدیگر هم جهت هستند و در این صورت حرکت تندشونده است و به تدریج اندازه‌ی سرعت ذره افزایش می‌یابد. در این مدت آهنگ افزایش سرعت نوسانگر منفی است!
- هرگاه نوسانگر از مبداء نوسان دور می‌شود، سرعت (V) و شتاب (a) در خلاف هم هستند و در این صورت حرکت کندشونده است و به تدریج اندازه‌ی سرعت ذره کاهش می‌یابد. در این مدت، آهنگ کاهش اندازه‌ی سرعت نوسانگر مثبت است!



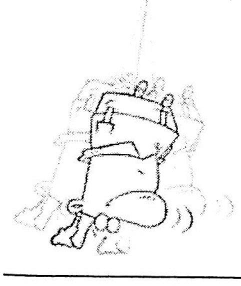
نکته: از دایره‌ی مرجع می‌توان برای تحلیل مسائل مربوط به سرعت متحرک در لحظات مختلف نیز استفاده کرد. برای این منظور از تصویر ذره‌ی مجازی روی محور افقی (محور کسینوس‌ها) استفاده می‌شود.



مثال ۱۷- دوره‌ی نوسان یک نوسانگر ساده ۱٫۲s است. کمترین زمان ممکن برای آنکه سرعت نوسانگر از $+\frac{V_m}{2}$، مجدداً به $+\frac{V_m}{2}$ برسد، چند ثانیه است؟ (V_m سرعت بیشینه‌ی نوسانگر است.)

مثال ۱۸- متحرکی با سرعت $+\frac{\sqrt{3}}{2}V_m$ در حرکت است و به سمت مرکز نوسان حرکت می‌کند. حداقل چه مدت طول می‌کشد تا متحرک با سرعت $-\frac{1}{2}V_m$ به سمت مرکز نوسان حرکت نماید؟

مثال ۱۹- در یک حرکت نوسانی ساده با دامنه‌ی A از لحظه‌ای که $V=-\frac{\sqrt{3}}{2}V_m$ و حرکت تند شونده است تا زمانی که برای اولین مرتبه $V=\frac{\sqrt{3}}{2}V_m$ و حرکت کند شونده است، چه مسافتی طی می‌شود؟

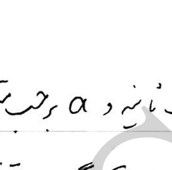


مثال ۲۰- نوسانگری روی پاره خطی به طول $20\,cm$ حرکت می کند و در هر دقیقه ۱۵ بار پاره خط نوسان را طی می کند. شتاب متوسط نوسانگر از زمانی که $V=+\frac{1}{2}V_m$ و حرکت کندشونده است تا زمانی که $V=-\frac{1}{2}V_m$ و حرکت تندشونده است را بیابید.

⚠ نکته: از دایره‌ی مرجع برای تحلیل و بررسی شتاب نوسانگر نیز می توان کمک گرفت. برای این منظور یکی از دو روش زیر را به کار می بریم:

- با توجه به رابطه‌ی $a=-\omega^2 x$، مکان نوسانگر را در لحظاتی که می خواهیم شتاب را به دست آوریم، تعیین کرده و از دایره‌ی مرجع مربوط به مکان نوسانگر استفاده می کنیم.
- از همان دایره‌ی مرجع مربوط به مکان بهره می گیریم، با این تفاوت که جهت حرکت زاویه را در خلاف جهت دایره‌ی مثلثاتی (و در جهت عقربه های ساعت) در نظر می گیریم.

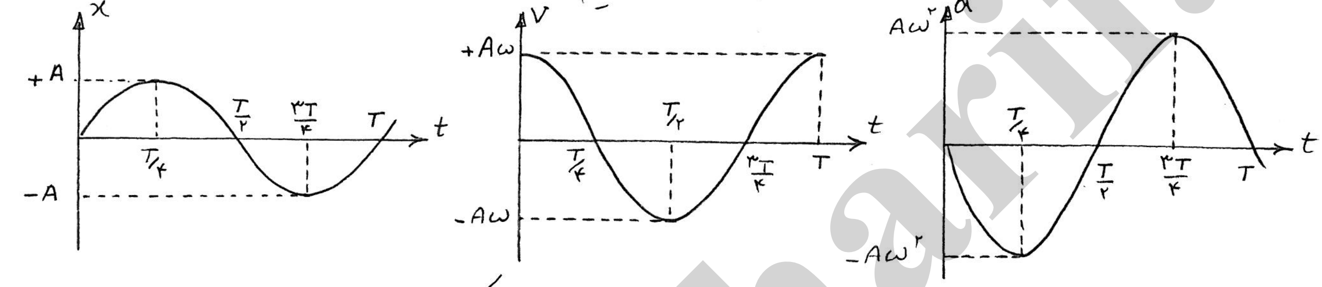
مثال ۲۱- معادله‌ی شتاب - زمان نوسانگری به صورت $a=-4\pi^2\sin(10\pi t)$ است (t برحسب ثانیه و a برحسب متر برمجذور ثانیه). در بازه‌ی زمانی $t_1=\frac{1}{40}\,s$ تا $t_2=\frac{11}{40}\,s$ چه مدت سرعت و شتاب نوسانگر در خلاف جهت یکدیگر هستند؟



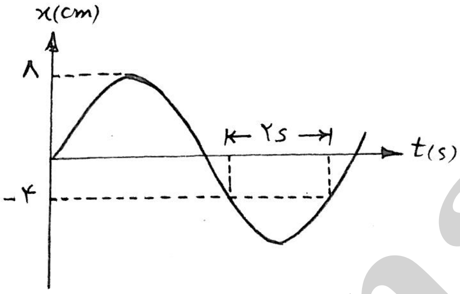
مثال ۲۲ـ کمترین زمان لازم برای آنکه شتاب متحرکی که روی پاره‌خطی به طول ۴cm با بسامد ۱۰Hz نوسان می‌کند از $+80\,m/s^2$ به $-80\,m/s^2$ برسد، چند ثانیه است؟

نمودارهای حرکت نوسانی:

نمودارهای حرکت نوسانی ساده با توجه به روابطی که برای آنها به دست آورده‌ایم، به شکل‌های زیر هستند:



در اینجا نیز برای حل مسائل مربوطه و تحلیل نمودارهای حرکت، می‌توان از دایره‌ی مرجع بهره گرفت.



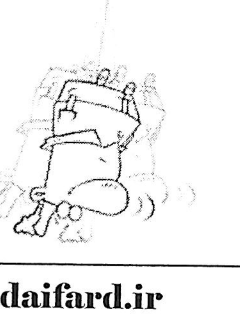
مثال ۲۳ـ نمودار مکان - زمان یک نوسانگر مطابق شکل است.

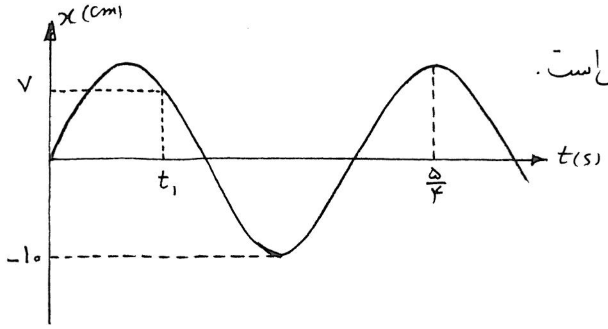
الف) دوره‌ی نوسانات آن چند ثانیه است؟

ب) سرعت متوسط نوسانگر در بازه‌ی زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 3s$ چقدر است؟

پ) معادله‌ی مکان - زمان این نوسانگر را در SI بنویسید.

ت) در چه لحظاتی اندازه‌ی سرعت متحرک به $4\,cm/s$ می‌رسد؟ $(\pi \simeq 3)$

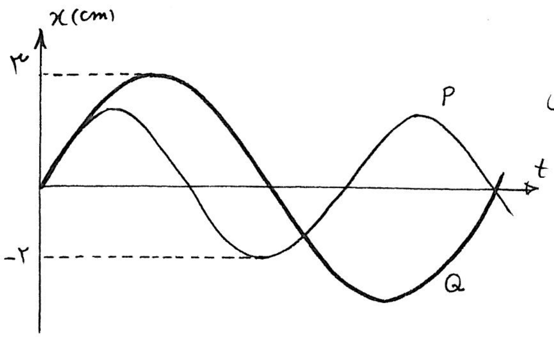




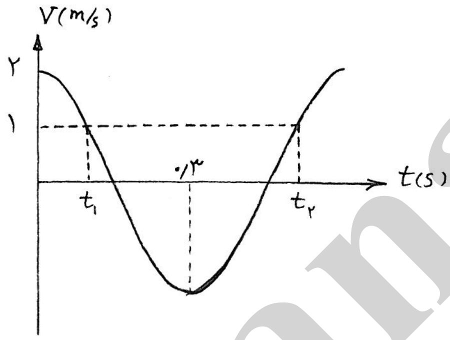
مثال ۲۴ - نمودار مکان - زمان یک نوسانگر ساده مطابق شکل مقابل است.

الف) t_1 چند ثانیه است؟ ($\sqrt{2} \simeq 1/4$)

ب) سرعت و شتاب نوسانگر در لحظه‌ی t_1 را بیابید.



مثال ۲۵ - نمودار مکان - زمان دو نوسانگر P و Q مطابق است. اندازه‌ی بیشینه‌ی شتاب نوسانگر P چند برابر اندازه‌ی بیشینه‌ی شتاب نوسانگر Q است؟

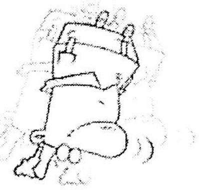


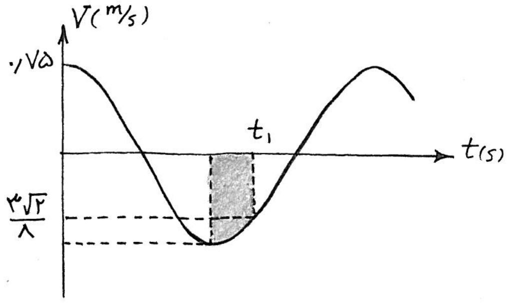
مثال ۲۶ - نمودار سرعت - زمان یک نوسانگر مطابق شکل است.

الف) دامنه‌ی نوسانات این نوسانگر چند سانتی‌متر است؟ ($\pi \simeq 3$)

ب) $\Delta t = t_2 - t_1$ چند ثانیه است؟

پ) نوسانگر در مدت Δt چه مسافتی را می‌پیماید؟

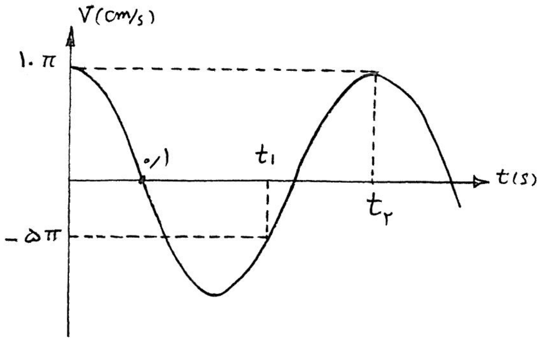




مثال ۲۷- دوره‌ی حرکت نوسانگری 0,2 s است. اگر سرعت متوسط متحرک در بازه‌ی $t=0$ تا t_1 برابر $4\sqrt{2}\,cm/s$ باشد، ... $(\pi \simeq 3)$

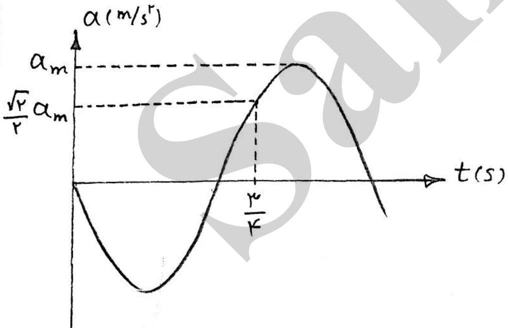
الف) مساحت ناحیه‌ی رنگ شده را بیابید.

ب) t_1 را تعیین کنید.

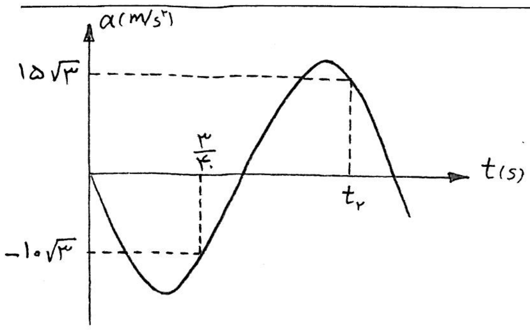


مثال ۲۸- نمودار سرعت - زمان یک نوسانگر هماهنگ ساده مطابق شکل مقابل است. سرعت متوسط نوسانگر در بازه‌ی زمانی t_1 تا t_2 چند سانتی متر بر ثانیه است؟

مثال ۲۹- در مثال ۲۸، نوسانگر در بازه‌ی زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$، چه مسافتی را پیموده است؟



مثال ۳۰- نمودار شتاب - زمان یک نوسانگر ساده، به شکل مقابل است. اگر دامنه‌ی نوسان 9 cm باشد، نوسانگر از $t=0/1\,s$ تا $t=0/95\,s$ چه مسافتی را می‌پیماید؟



مثال ۳۱- نمودار شتاب - زمان یک نوسانگر ساده مطابق شکل است.

الف) بیشینه‌ی شتاب نوسانگر را بیابید.

ب) دوره‌ی نوسانات و دامنه‌ی نوسان را تعیین کنید.

پ) معادله‌ی مکان - زمان نوسانگر را بنویسید.

ت) زمان t_2 را تعیین کنید.

مُعادلات مُستقل از زمان:

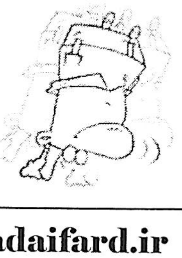
تاکنون معادلات مکان - زمان، سرعت - زمان و شتاب - زمان را برای ذره‌ی نوسانگر ساده به دست آورده و نمودارهای مربوطه را رسم کرده‌ایم. اکنون می‌توانیم بین این روابط، پارامتر زمان (t) را حذف کنیم و به معادلات مستقل از زمان دست یابیم:

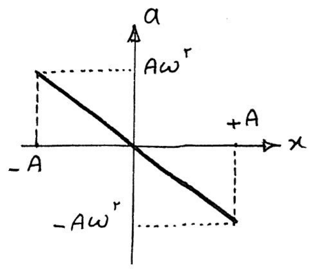
الف) معادله‌ی $a-x$ (شتاب - مکان)

رابطه‌ی اصلی حرکت نوسانی ساده، عملاً رابطه‌ی شتاب - مکان است. بر طبق این رابطه دیدیم:

$$a=-\omega^2 x$$

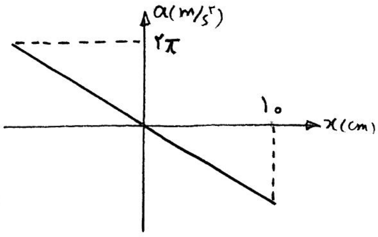
مثال ۳۲- در یک حرکت نوسانی ساده، در لحظه‌ای که نوسانگر در فاصله‌ی ۲ سانتی‌متری انتهای مسیر حرکت قرار دارد، شتاب نوسانگر چه کسری از شتاب بیشینه است؟ (دامنه‌ی نوسانات نوسانگر $6\,cm$ است)





نکته: نمودار شتاب برحسب مکان نوسانگر، خط راستی است با شیب منفی، که از مبداء مختصات می‌گذرد.

$$a = -\omega^2 x \quad \Rightarrow \quad \text{شیب خط} = -\omega^2$$



مثال ۳۳ - نمودار شتاب - مکان برای یک نوسانگر ساده مطابق شکل است. این متحرک در هر دقیقه چند بار پاره خط نوسان را می‌پیماید؟

ب) معادله‌ی $V - x$ (سرعت - مکان):

با توجه به معادلات مکان - زمان و سرعت - زمان برای نوسانگر ساده می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{ll} x = A\sin\omega t \Rightarrow \dfrac{x}{A} = \sin\omega t \\ V = A\omega\cos\omega t \Rightarrow \dfrac{V}{V_m} = \cos\omega t \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{V}{V_m}\right)^2 = 1$$

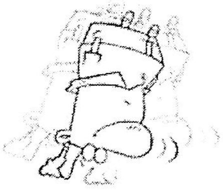
اگر این رابطه را ساده کرده و V را بدست آوریم خواهیم داشت:

$$V = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

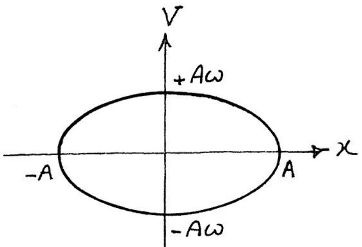
مثال ۳۴ - نوسانگری روی پاره خطی به طول ۱۰cm حرکت نوسانی انجام می‌دهد. اگر این متحرک با سرعت ۴ cm/s از مبداء نوسان بگذرد، سرعت آن هنگامی که در فاصله‌ی ۲ سانتی‌متری از یک سر پاره خط نوسان قرار دارد، چقدر است؟

مثال ۳۵ - سرعت نوسانگری که روی خط راست، نوسان می‌کند، در نقاط $x_1 = 5\ cm$ و $x_2 = 12cm$ به ترتیب $V_1 = 6\ m/s$ و $V_2 = 2/5\ m/s$ است.

الف) طول پاره خط نوسان چند سانتی‌متر است؟



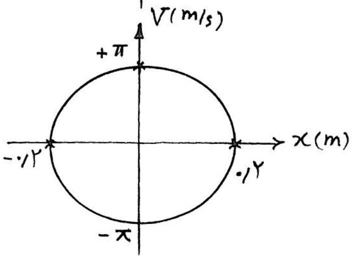
ب) بیشینه سرعت و شتاب نوسانگر در طول حرکت چقدر است؟



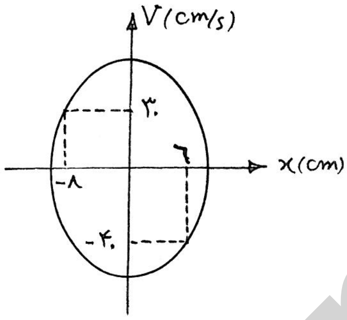
نکته: نمودار تغییرات سرعت نوسانگر برحسب مکان نوسانگر، به صورت یک بیضی است.

این بیضی می‌تواند افقی ($\omega > 1$) و یا عمودی ($\omega < 1$) باشد.

اگر $\omega = 1$ باشد، در این صورت بیضی مورد نظر به یک دایره تبدیل خواهد شد.



مثال ۳۶- نمودار سرعت- مکان برای یک نوسانگر ساده مطابق شکل است. بسامد نوسانات آن را بیابید.



مثال ۳۷- نمودار سرعت- مکان یک نوسانگر ساده به شکل مقابل است. بیشینه‌ی شتاب نوسانگر چند متر بر مجذور ثانیه است؟

پ) معادله‌ی $V-a$ (سرعت- شتاب)

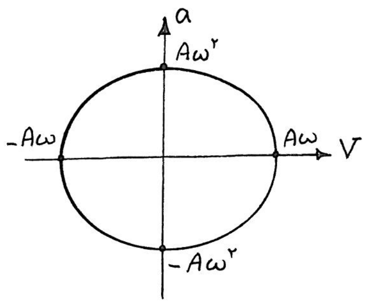
در اینجا نیز با استفاده از معادلات سرعت- زمان و شتاب- زمان برای نوسانگر هماهنگ ساده می‌توانیم بنویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} V = A\omega \cos\omega t \Rightarrow \dfrac{V}{A\omega} = \cos\omega t \\ a = -A\omega^2 \sin\omega t \Rightarrow \dfrac{a}{A\omega^2} = -\sin\omega t \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{V}{V_m}\right)^2 + \left(\frac{a}{a_m}\right)^2 = 1$$

و با ساده کردن این رابطه خواهیم داشت:

$$a = \pm \omega \sqrt{V_m^2 - V^2}$$

مثال ۳۸- معادله‌ی سرعت - شتاب یک نوسانگر ساده به صورت $a^2 = 1 - 10V^2$ است (a برحسب متر بر مجذور ثانیه و V برحسب متر بر ثانیه). فرکانس نوسانات این نوسانگر و دامنه‌ی نوسانات را بیابید.



نکته: نمودار تغییرات شتاب نوسانگر برحسب سرعت آن نیز به صورت یک بیضی است که می‌تواند افقی یا عمودی باشد.

معادله‌ی این بیضی به صورت $\frac{V^2}{A^2\omega^2} + \frac{a^2}{A^2\omega^4} = 1$ است.

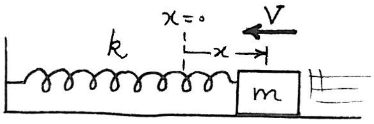
نکته: با توجه به قانون دوم نیوتون، $F = ma$ است. بنابراین تمام روابطی را که در مورد شتاب نوسانگر به کار بردیم، می‌توان به روابطی در مورد نیرو تبدیل کرد.

$$F(t) = -mA\omega^2 \sin(\omega t) \quad ; \quad F_{max} = mA\omega^2$$

$$F = -m\omega^2 x \quad ; \quad \left(\frac{F}{F_m}\right)^2 + \left(\frac{V}{V_m}\right)^2 = 1$$

مثال ۳۹- دامنه‌ی نوسانگر جرم - فنر $4cm$ است. اگر جرم وزنه $80g$ و ثابت فنر $200 \frac{N}{m}$ باشد، در لحظه‌ای که نوسانگر در $x = -2cm$ قرار دارد، نیروی وارد بر نوسانگر و شتاب آن را بیابید. این نوسانگر در هر ثانیه چه مسافتی می‌پیماید؟

انرژی نوسانگر:



یک نوسانگر جرم ـ فنر را در نظر می‌گیریم که روی پاره خطی به طول $2A$ در حال حرکت نوسانی ساده است. در وضعیتی که نوسانگر در فاصله‌ی x از وضع تعادل قرار دارد، فنر نیز به اندازه‌ی x تغییر طول پیدا کرده است، و اگر سرعت ذره در این حالت را با V نشان دهیم، می‌توان انرژی جنبشی و پتانسیل نوسانگر را به صورت زیر تعیین کرد:

$$K = \frac{1}{2} m V^2 \quad ; \quad U_e = \frac{1}{2} k x^2 \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

اکنون با توجه به روابطی که قبلاً بیان شده است، می‌توان انرژی‌ها را برحسب زمان نیز به دست آورد:

$$K = \frac{1}{2} m (A\omega \cos \omega t) \Rightarrow K = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cdot \cos^2 \omega t$$

$$U_e = \frac{1}{2} (m\omega^2)(A \sin \omega t)^2 \Rightarrow U_e = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t$$

از سوی دیگر می‌دانیم انرژی مکانیکی نوسانگر، مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل آن است. بنابراین:

$$E = K + U_e \Rightarrow E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) \Rightarrow E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$$

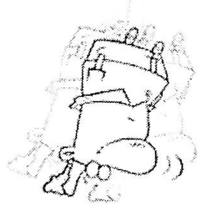
همانگونه که از قانون پایستگی انرژی سراغ داریم، انرژی مکانیکی ثابت می‌ماند و با گذشت زمان تغییر نمی‌کند.

مثال ۴۰- ذره‌ای به جرم ۱۰۰ g توسط فنری با ثابت ۴ N/cm روی یک سطح افقی، حرکت نوسانی ساده انجام می‌دهد.

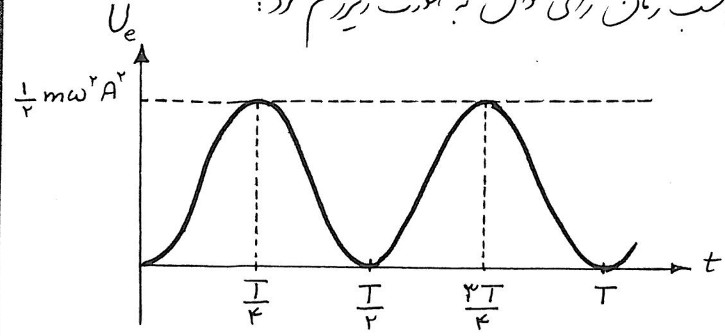
الف) در چه لحظاتی انرژی جنبشی نوسانگر، یک چهارم انرژی مکانیکی آن می‌شود؟

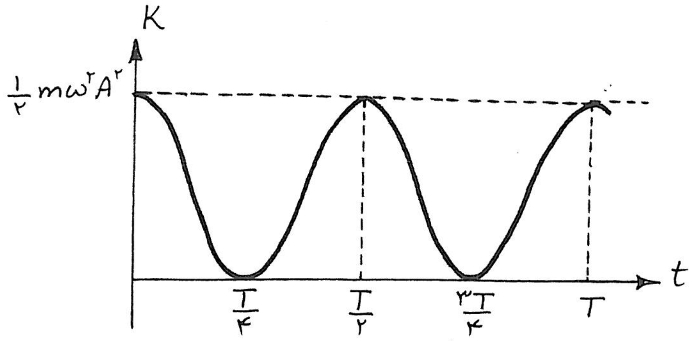
ب) در چه لحظاتی انرژی پتانسیل نوسانگر، یک سوم انرژی جنبشی آن می‌شود؟

پ) در چه لحظاتی انرژی جنبشی و پتانسیل نوسانگر با هم برابر می‌شود؟ در این لحظات، بُعد نوسانگر چه کسری از بُعد بیشینه است؟



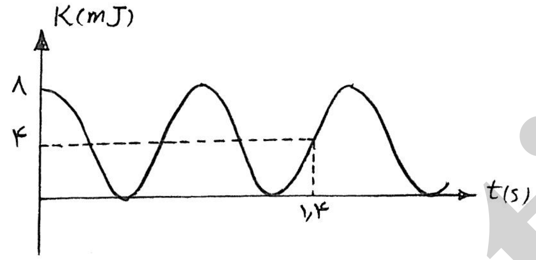
⚠ **نکته:** نمودار تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل نوسانگر برحسب زمان را می‌توان به صورت زیر رسم کرد:





در اینجا نیز می‌توان از دایره‌ی مرجع برای تحلیل نمودارهای مربوطه و استخراج نتایج مورد نیاز بهره گرفت.

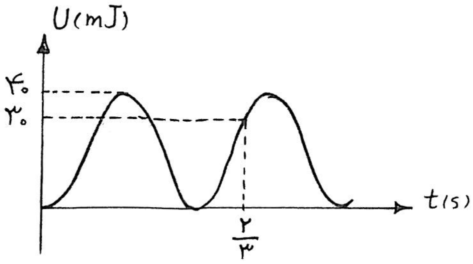
مثال ۴۱ـ نمودار تغییرات انرژی جنبشی یک نوسانگر ساده برحسب زمان مطابق شکل است. اگر جرم نوسانگر $100\,g$ باشد،



الف) معادله‌ی انرژی جنبشی ـ زمان را برای آن بنویسید.

ب) دامنه‌ی نوسان این ذره چند سانتی‌متر است؟

مثال ۴۲ـ معادله‌ی شتاب ـ زمان نوسانگر ساده‌ای در SI به صورت $a=-2\pi^2\sin(10\pi t)$ است. در لحظه‌ی $t=\frac{1}{40}s$، انرژی جنبشی نوسانگر چند برابر انرژی پتانسیل کشسانی آن است؟



مثال ۴۳ـ شکل مقابل نمودار انرژی پتانسیل کشسانی یک نوسانگر ساده است.

الف) بسامد نوسانات آن را بیابید.

ب) چند ثانیه پس از $t=0$، انرژی جنبشی نوسانگر برای اولین بار، ۳۰mJ می شود؟

نکته: می توان تغییرات انرژی های جنبشی و پتانسیل را برحسب مکان نوسانگر (و مستقل از زمان) نیز به دست آورد:

$$\left.\begin{array}{l} K = \frac{1}{2} m V^2 \\ V = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow K = \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 - x^2)$$

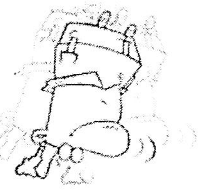
$$\left.\begin{array}{l} U_e = \frac{1}{2} k x^2 \\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{array}\right\} \Rightarrow U_e = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

در اینجا نیز می توان نتیجه گرفت که انرژی مکانیکی نوسانگر ثابت و برابر $\frac{1}{2} m \omega^2 A^2$ است:

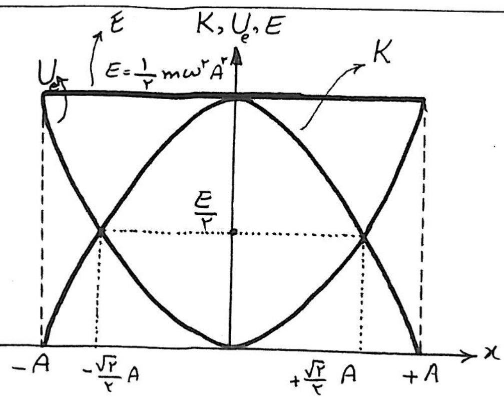
$$E = K + U = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

مثال ۴۴ـ در لحظه ای که سرعت نوسانگری نصف سرعت بیشینه است، انرژی پتانسیل آن چه کسری از انرژی کل نوسانگر است؟

راه اول (روابط وابسته به زمان):



راه دوم (روابط مستقل از زمان):

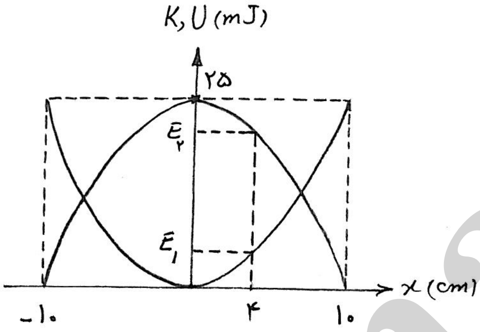


نکته: نمودار تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل یک نوسانگر ساده به صورت دو سهمی است (که اولی، وارونه و دومی رو به بالا است!)

این دو نمودار یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند و در این دو نقطه انرژی‌های جنبشی و پتانسیل با یکدیگر برابر بوده و ذره‌ی نوسانگر در مکان‌های $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$ قرار دارد.

مثال ۴۵- در لحظه‌ای که انرژی جنبشی نوسانگر ساده، دو برابر انرژی پتانسیل کشسانی آن است، بُعد نوسانگر چه کسری از بُعد بیشینه می‌شود؟

مثال ۴۶- در لحظه‌ای که انرژی مکانیکی نوسانگری ۵ برابر انرژی پتانسیل کشسانی آن می‌شود، سرعت نوسانگر چه کسری از سرعت بیشینه است؟

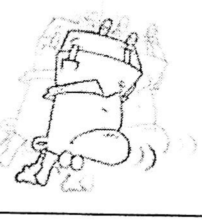


مثال ۴۷- شکل مقابل نمودار انرژی پتانسیل و جنبشی یک نوسانگر برحسب فاصله از مرکز نوسان را نشان می‌دهد.

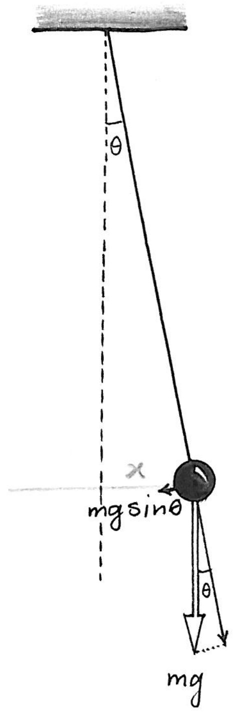
الف) نسبت $\frac{E_2}{E_1}$ را بیابید.

ب) مقادیر E_1 و E_2 را تعیین کنید.

پ) اگر جرم نوسانگر $2kg$ باشد، بسامد زاویه‌ای نوسان را بیابید.



بررسی حرکت آونگ :



وزنه‌ای به جرم m را در نظر می‌گیریم که توسط ریسمان بسیار سبکی به طول l از نقطه‌ای آویزان است. اگر این وزنه را اندکی از حالت تعادل (راستای قائم) منحرف کرده، رها نماییم، جرم مورد نظر شروع به حرکت رفت و برگشتی می‌کند. هر چند مسیر حرکت وزنه‌ی مورد نظر روی خط راست نیست، اما اگر بیشینه‌ی زاویه‌ی انحراف از راستای تعادل، کوچک باشد $(\theta < 6^\circ)$، می‌توان مسیر حرکت را یک خط راست در نظر گرفت. در این صورت نیروی بازگرداننده‌ی $mg\sin\theta$ می‌خواهد وزنه را به وضع تعادل بازگرداند و داریم:

$$(\Sigma F)_x = ma \Rightarrow -mg\sin\theta = ma \Rightarrow a = -g\sin\theta$$

از سوی دیگر از آنجا که زاویه‌ی θ بسیار کوچک است، می‌توان نوشت:

$$\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \frac{x}{l}$$

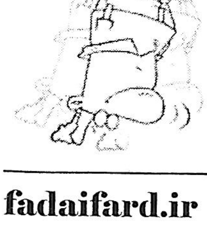
بنابراین:

$$a = -g\frac{x}{l} \Rightarrow a = -\frac{g}{l}x$$

معادله‌ی اخیر، معادله‌ی حرکت نوسانی ساده است و در اینجا کافی است فرض کنیم:

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

مثال ۴۸ - معادله‌ی حرکت یک آونگ ساده در SI به صورت $x = 0/05\sin(20\pi t)$ است. اگر طول آونگ را به $\frac{1}{4}$ طول اولیه‌اش برسانیم و جرم وزنه‌ی متصل به فنر را دو برابر کنیم، معادله‌ی حرکت نوسانگر جدید را بنویسید.



⚠ نکته : اگر بر ذره‌ی نوسانگر نیرویی غیر از نیروی وزن جسم وارد شود یا آونگ درون آسانسور قرار داشته باشد، در این صورت به جای g از روابط زیر برای تعیین دوره‌ی نوسانات نوسانگر استفاده می‌کنیم:

$$g \longrightarrow g \pm \frac{F}{m} \quad \text{یا} \quad g \longrightarrow g \pm a$$

مثال ۴۹- یک ساعت دیواری آونگ دار که دوره‌ی آن در حالت عادی $1s$ است، اگر درون آسانسوری که با شتاب ثابت $4.4 m/s^2$ شروع حرکت به سمت بالا می‌رود قرار گیرد، در مدت یک دقیقه چند ثانیه جلو می‌افتد؟

مثال ۵۰- دوره‌ی یک آونگ ساده با گلوله‌ی آهنی T است. اگر یک آهنربا زیر آن قرار دهیم، دوره‌ی آونگ $\frac{T}{2}$ می‌شود. نیرویی که از طرف آهنربا به گلوله وارد می‌شود، چند برابر وزن آن است؟

تشدید