فیزیک ۱

پیش دانشگاهی

حرکت شناسی

Fadaifard.ir

حمید فدائی فرد

حرکت شناسی

Kinematics

سینماتیک یا حرکت شناسی، شاخه‌ای از مکانیک کلاسیک است که حرکت اجسام و سیستم‌های متشکل از اجسام، بدون درنظر گرفتن نیروهای عامل حرکت، بررسی می‌شود.

موقعیت یک ذره در فضا، اساسی‌ترین مفهوم در سینماتیک است. برای تعیین موقعیت یک ذره، سه فاکتور باید تعیین شود: نقطه‌ی مرجع، فاصله از نقطه‌ی مرجع و جهت خط مستقیمی که در فضا، نقطه‌ی مرجع و ذره را به هم متصل می‌کند.

زمان، مدت: در مکانیک، کمیت مستقلی که تمامی رخدادها در آن اتفاق می‌افتد، زمان است. بنابراین می‌توان زمان را متغیر اصلی در مکانیک محسوب کرد. هر اتفاق، در یک لحظه شروع می‌شود و در یک لحظه نیز پایان می‌پذیرد و فاصله‌ی زمانی میان این دو لحظه را مدت زمان رویداد می‌نامند. گاهی اوقات نیز، می‌خواهیم کمیتی را در یک لحظه‌ی خاص بشناسیم، لذا باید مراقب بود که این دو مطلب با یکدیگر اشتباه گرفته نشود: لحظه، مدت!

■ حرکت یک بعدی (حرکت روی خط راست)

ساده‌ترین نوع حرکت، حرکت روی خط راست است. در این حالت، دستگاه مختصات را به گونه‌ای انتخاب می‌نماییم که یکی از محورهای آن، بر مسیر حرکت ذره‌ی مورد نظر منطبق باشد. انتخاب "جهت" و "مبداء" این دستگاه مختصات، کاملاً دلخواه است.

مکان: در هر لحظه‌ی دلخواه متحرک مورد نظر در مکان خاصی قرار دارد. در حالت کلی، این مکان با زمان تغییر می‌نماید. بنابراین می‌توان آن را به صورت $x = f(t)$ درنظر گرفت. که در این صورت رابطه‌ی مذکور را **معادله‌ی مکان-زمان** یا **معادله‌ی حرکت** می‌نامند. با معلوم بودن این رابطه، می‌توان مکان متحرک در هر لحظه‌ی دلخواه را مشخص کرد. همچنین می‌توان تعیین نمود که متحرک در چه لحظه (یا لحظاتی) در مکان خاصی قرار دارد.

جابه‌جایی: همانگونه که گفته شد، متحرک در لحظات مختلف می‌تواند در مکان‌های مختلفی قرار داشته باشد. بنابراین ممکن است این سؤال مطرح شود که در یک بازه‌ی زمانی مشخص، متحرک چقدر جابه‌جا شده است؟

اگر متحرک مورد مطالعه، در لحظه‌ی t_1 در مکان x_1 و در لحظه‌ی t_2 در مکان x_2 قرار داشته باشد، می‌توان نوشت:

$\Delta x = x_2 - x_1$ جابه‌جایی در بازه‌ی t_1 تا t_2

نکته: برای تعیین جابه‌جایی در یک بازه‌ی زمانی، فقط و فقط مکان متحرک در دو لحظه‌ی ابتدایی و انتهایی حرکت اهمیت دارد.

مثال ۱- معادله‌ی مکان-زمان متحرکی در SI به صورت $x = -t^2 + 6t - 5$ است.

الف) این متحرک در چه لحظه (یا لحظاتی) از مبدأ گذشته است؟

ب) جابه‌جایی متحرک در ثانیه‌ی سوم حرکت چند متر است؟

پ) پس از چه مدت، متحرک به محل اولیه‌ی خود باز می‌گردد؟

نکته: ثانیه‌ی n اُم حرکت، یعنی بازه‌ی زمانی بین $t=n-1$ و $t=n$. مثلاً ثانیه‌ی چهارم حرکت یعنی بازه‌ی زمانی $[3, 4]$.

سرعت متوسط: بر طبق تعریف، سرعت متوسط یک متحرک در بازه‌ی زمانی (t_1, t_2) را می‌توان از رابطه‌ی زیر بدست آورد:

$$\boxed{\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}$$

یکای سرعت متوسط در SI، متر بر ثانیه (m/s) است.

نکته: در مواردی که یک متحرک، در بازه‌های زمانی متفاوت، مسیری را بر روی یک خط راست، و با سرعت‌های مختلف می‌پیماید، می‌توان سرعت متوسط را از رابطه‌ی زیر بدست آورد.

$$\bar{V}_{\text{کل}} = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{\pm \Delta x_1 \pm \Delta x_2 \pm \cdots}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots}$$

علامت $\pm$ در صورت کسر، با در نظر گرفتن جهت حرکت متحرک در بازه‌های زمانی مختلف تعیین می‌گردد.

مثال ۲- معادله‌ی حرکت متحرکی در SI، به صورت $x = t^3 - 6t^2 + 5t - 2$ است.

الف) در چه لحظه‌ای متحرک از نقطه‌ی $x = -2m$ می‌گذرد؟

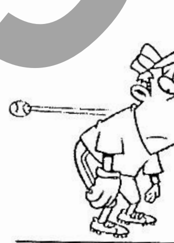
ب) سرعت متوسط متحرک در بازه‌ی زمانی $(0s , 2s)$ و بازه‌ی زمانی $(2s , 4s)$ چقدر است؟

مثال ۳- متحرکی $\frac{2}{5}$ فاصله‌ی میان دو شهر را با سرعت $10\ m/s$ و بقیه‌ی مسیر را با سرعت $5\ m/s$ می‌پیماید. سرعت متوسط متحرک در کل حرکت چقدر است؟

مثال ۴- متحرکی نیمی از فاصله‌ی میان دو نقطه را با سرعت $5\ m/s$ ، نیمی از مسیر باقی‌مانده را با سرعت $6\ m/s$ و بقیه‌ی مسیر را با سرعت $2\ m/s$ طی می‌کند. سرعت متوسط متحرک در کل آن چقدر است؟

مثال ۵- اتومبیلی ابتدا به مدت $10\ min$ با سرعت $10\ m/s$ حرکت می‌کند و سپس مسافت $5\ km$ را با سرعت $5\ m/s$ در همان جهت و در نهایت در مدت $400\ s$ مسافت $4\ km$ را می‌پیماید. سرعت متوسط متحرک در کل حرکت چقدر است؟

مثال ۶- دوچرخه سواری با سرعت $20\ m/s$ به سمت شهر A که در فاصله‌ی $10\ km$ از نقطه‌ی شروع قرار دارد حرکت می‌کند و پس از رسیدن به این شهر، باز می‌گردد و به مدت $250\ s$ با سرعت $36\ km/h$ رکاب می‌زند. سرعت متوسط دوچرخه سوار در این مدت چقدر است؟



سرعت لحظه ای : هرگاه بازه‌ی زمانی اندازه‌گیری سرعت متوسط بسیار کوچک باشد ($\Delta t \to 0$) ، آنچه بدست می آید ، عملاً سرعت لحظه‌ای یا سرعت متحرک نامیده می شود . بنابراین می توان نوشت :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \boxed{v = \frac{dx}{dt} = x'_t}$$

به عبارت دیگر ، با مشتقگیری از معادله‌ی مکان - زمان ، می توان به معادله‌ی سرعت - زمان دست یافت و سرعت متحرک در لحظات مختلف را بدست آورد .

⚠ **نکته :** علامت سرعت ، بیانگر جهت حرکت متحرک است . یعنی اگر $v > 0$ باشد ، متحرک در جهت مثبت محور انتخاب شده و اگر $v < 0$ باشد ، متحرک در خلاف جهت محور انتخاب شده در حال حرکت است .

مثال ۷ - معادله‌ی مکان - زمان متحرکی در SI به صورت $x = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 12$ است .

الف) متحرک در چه لحظاتی متوقف شده است؟

ب) سرعت متوسط متحرک بین دو لحظه‌ی توقف چقدر است ؟

پ) سرعت متحرک هنگامیکه از نقطه‌ی $x = 23m$ می گذرد چقدر است ؟

ت) چه مدت متحرک در خلاف جهت محور x ها حرکت کرده است ؟

مسافت طی‌شده: همانگونه که گفته شد، جابه‌جایی یک جسم در یک بازه‌ی زمانی، صرفاً به مکان نقاط ابتدایی و انتهایی بستگی دارد و مستقل از مسیری است که متحرک در این مدت پیموده است. امّا مسافتی که متحرک طی می‌نماید، کاملاً به مسیر حرکت بستگی دارد. در واقع مسافت طی‌شده در یک حرکت، برابر است با طول مسیری که متحرک طی کرده است، تا از نقطه‌ی مبدا به نقطه‌ی مقصد برسد.

⚠ **نکته:** تنها در حالتی که جسم روی یک خط راست حرکت کند و در طول حرکت، جهت حرکت خود را تغییر ندهد، اندازه‌ی جابه‌جایی با مسافت طی‌شده برابر خواهد بود.

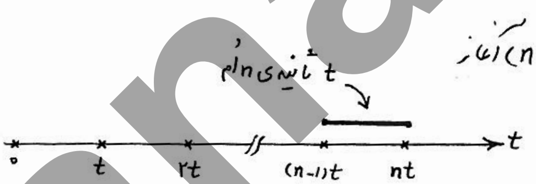
مثال ۸ - معادله‌ی حرکت متحرکی در SI به صورت $x = 3t^3 - 6t^2 + 4t - 1$ است.

الف) متحرک در طول حرکت خود چند بار تغییر جهت داده است؟

ب) جابه‌جایی متحرک در ثانیه‌ی سوم حرکت چند متر است؟

پ) سرعت متوسط متحرک در ۲ ثانیه‌ی دوم حرکت، چند برابر سرعت متحرک در لحظه‌ی $t=3$ است؟

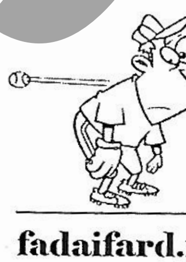
⚠ **نکته:** بازه‌ی زمانی t ثانیه‌ی nاُم یعنی بازه‌ای که با لحظه‌ی $(n-1)t$ آغاز شده و با لحظه‌ی nt پایان می‌پذیرد. به عبارت دیگر باید زمان را t ثانیه، t ثانیه تقسیم کرد و بازه‌ی nاُم را از میان آنها درنظر گرفت!!



مثال ۹ - معادله‌ی مکان-زمان متحرکی در SI به صورت $x = -t^2 + 4t + 6$ است.

الف) مسافت طی‌شده در ۴ ثانیه‌ی اول حرکت را بیابید.

ب) سرعت متوسط در ۴ ثانیه‌ی اول حرکت چقدر است؟



شتاب متوسط : بر طبق تعریف، آهنگ متوسط تغییر سرعت را شتاب متوسط می‌نامند. یعنی داریم :

$$\boxed{\bar{a} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}}$$ شتاب متوسط در بازه‌ی t_1 تا t_2

یکای شتاب در SI، متر بر مجذور ثانیه (m/s^2) است.

مثال ۱۰- در مثال ۹، شتاب متوسط متحرک را هنگامی که متحرک در جهت مثبت محور x ها حرکت می‌کند، بدست آورید.

مثال ۱۱- معادله‌ی مکان-زمان متحرکی در SI به صورت $x = -3t^2 + 2t + 1$ است.

الف) شتاب متوسط متحرک در بازه‌ی زمانی $(0, 6s)$ چقدر است؟

ب) شتاب متوسط متحرک در ۳ ثانیه‌ی چهارم چقدر است؟

مثال ۱۲- ذره‌ای با سرعت $36\ km/h$ در امتداد یک خط راست حرکت می‌کند. این ذره به دیواری برخورد می‌کند و در همان امتداد اولیه به عقب باز می‌گردد. اگر بزرگی سرعت ذره، $0/1\ s$ پس از ابتدای برخورد به دیوار، $18\ km/h$ باشد، بزرگی شتاب متوسط در این مدت چند m/s^2 است؟

شتاب لحظه ای: هرگاه بازه‌ی زمانی تعیین شتاب متوسط بسیار کوچک باشد، کمیتی بدست می‌آید که به آن شتاب لحظه‌ای گفته می‌شود:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \boxed{a = v'_t = x''_t}$$

به عبارت دیگر، شتاب، مشتق سرعت و مشتق دوم مکان است، نسبت به زمان!

⚠ **نکته:** هرگاه علامت شتاب در خلاف جهت حرکت متحرک باشد، به عبارت دیگر $a.v<0$ باشد، حرکت را **کندشونده** می‌نامند. در این حرکت، اندازه‌ی سرعت مرتباً در حال کاهش است و اگر حرکت با همین وضعیت ادامه یابد، متحرک در نهایت متوقف خواهد شد.

⚠ **نکته:** هرگاه جهت شتاب متحرک، هم جهت با جهت سرعت آن باشد (یعنی $a.v>0$)، حرکت را **تندشونده** می‌نامند. در حرکت تندشونده، اندازه‌ی سرعت متحرک مرتباً در حال افزایش است!

مثال ۱۳ - معادله‌ی سرعت - زمان متحرکی در SI به صورت $v = -t^2 + 4t + 3$ است. در چه بازه‌های زمانی، حرکت کندشونده است؟ شتاب متوسط متحرک در این بازه‌های زمانی را بدست آورید.

مثال ۱۴ - معادله‌ی حرکت متحرکی در SI به صورت $x = t^3 - 7.5t^2 + 12t - 4$ است. این متحرک در مجموع، چند ثانیه به صورت کندشونده حرکت کرده است؟

حرکت یکنواخت :

حرکت یکنواخت، حرکتی است بر روی خط راست که در آن، سرعت متوسط در تمامی بازه های زمانی دلخواه با هم برابر است. بنابراین می توان نتیجه گرفت که سرعت لحظه ای متحرک همواره ثابت است و در نتیجه شتاب در این حرکت صفر می باشد : $a = 0$

با توجه به تعریف بالا، می توان معادلات زیر را به راحتی استخراج کرد :

$$\bar{V} = v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\Delta x = V.\Delta t} \rightarrow x - x_0 = V(t - 0)$$

$$\Rightarrow \boxed{x = V.t + x_0}$$

معادله ی اخیر را معادله ی حرکت یکنواخت می نامند.

مثال ۱۵ - جسمی که با سرعت ثابت بر محور x ها حرکت می کند، در لحظه ی $t_1 = 5s$ در مکان $x_1 = 12m$ و در لحظه ی $t_2 = 7s$ در مکان $x_2 = 24m$ قرار دارد.

الف) معادله ی حرکت جسم در SI را بنویسید.

ب) متحرک در شروع حرکت، در چه فاصله ای از مبداء قرار دارد؟

مثال ۱۶ - ۲۰ ثانیه طول می کشد تا قطاری که با سرعت ثابت $30\ m/s$ در حرکت است، به طور کامل از روی پلی عبور نماید. طول پل چند متر است؟ طول قطار $200m$ است.

مثال ۱۷ - دو اتومبیل با سرعت های $10\ m/s$ و $8\ m/s$ به طور هم زمان از یک نقطه، به سمت مقصد مشترکی حرکت می کنند. اگر حداکثر فاصله ی میان آنها در طول مسیر (قبل از رسیدن متحرک سریع تر به مقصد)، $160m$ باشد، فاصله ی میان مبداء و مقصد چند متر است؟

مثال ۱۸- دو ترن که سرعت یکی نصف دیگری است، از دو شهر به فاصله‌ی ۸۰۰km ، در ساعت ۸ صبح رو به هم حرکت می‌کنند و ساعت ۱۲ ظهر به هم می‌رسند. ترن کندتر، چه ساعتی به شهر دیگر می‌رسد؟

مثال ۱۹- دو متحرک، هم‌زمان از نقاط A و B با سرعت‌های ثابت به سمت یکدیگر حرکت می‌کنند و در نقطه‌ی C به هم می‌رسند. ۴۰ ثانیه پس از این، متحرک اول به نقطه‌ی B می‌رسد. چند ثانیه طول می‌کشد تا متحرک دوم از C به A برسد؟

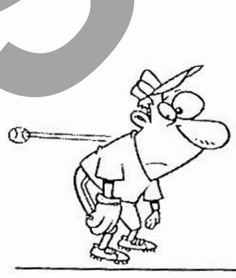
حرکت با شتاب ثابت:

هرگاه اندازه و جهت شتاب متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، تغییر نماید، حرکت را «حرکت با شتاب ثابت» می‌نامیم. در این حرکت، شتاب متوسط در هر بازه‌ی زمانی، با شتاب لحظه‌ای برابر است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$a = \bar{a} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow \Delta V = a.\Delta t \Rightarrow V - V_0 = a(t - 0)$$

$$\Rightarrow \boxed{V = a.t + V_0}$$

این معادله را معادله‌ی سرعت - زمان می‌نامند. همانگونه که مشاهده می‌شود، در این رابطه، x وجود ندارد. لذا این معادله را معادله‌ی مستقل از مکان نیز می‌نامند. این معادله معمولاً زمانی به کار می‌رود که مکان متحرک جزو معلومات و مجهولات مسأله‌ی مورد نظر نباشد!



مثال ۲۰- متحرکی با شتاب ثابت در مسیر مستقیم در حرکت است. اگر سرعت آن در دو لحظه‌ی $t_1=2s$ و $t_2=6s$ به ترتیب $V_1=10\,m/s$ و $V_2=34\,m/s$ باشد، سرعت اولیه‌ی متحرک و معادله‌ی سرعت - زمان آن را بدست آورید.

برای جسمی که با شتاب ثابت در حرکت است، می‌توان معادله‌ی مکان - زمان را با انتگرال‌گیری[1] از معادله‌ی سرعت - زمان بدست آورد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0}$$

همانگونه که به وضوح دیده می‌شود، در این رابطه، V (سرعت نهایی) وجود ندارد؛ لذا این رابطه را معادله‌ی مستقل از سرعت نهایی می‌نامند و زمانی از آن استفاده می‌شود که V، جزو معلومات و مجهولات مسأله نباشد!

مثال ۲۱- متحرکی از حال سکون با شتاب ثابت $2\,m/s^2$ به حرکت در می‌آید. نسبت زمان لازم برای طی $100\,m$ اول به زمان لازم برای طی $96\,m$ بعدی را بیابید.

مثال ۲۲- در یک مسیر مستقیم، اتومبیلی با سرعت $20\,m/s$ در حرکت است. $36\,m$ جلوتر، اتومبیل دیگری با شتاب ثابت $2\,m/s^2$ از حال سکون در همان جهت به راه می‌افتد. در این حرکت، اتومبیل‌ها دو بار از هم سبقت می‌گیرند. فاصله‌ی زمانی میان این دو سبقت چند ثانیه است؟

(۱) در مورد نحوه‌ی انتگرال‌گیری و مفهوم آن، در پایان فصل، توضیحاتی آورده شده است!

مثال ۲۳- اتومبیلی با سرعت ثابت ۴ m/s بر مسیری مستقیم در حرکت است. ناگهان راننده به مدت ۶s پای خود را روی پدال گاز فشار می‌دهد که در نتیجه‌ی آن، سرعت اتومبیل با آهنگ ثابتی افزایش می‌یابد. اگر اتومبیل در ۲ ثانیه‌ی آخر مدت یاد شده، ۳۶m جابه‌جا شود، شتاب متحرک را بیابید.

⚠ **نکته:** با توجه به رابطه‌ی مکان - زمان و تعریف سرعت متوسط، می‌توان نوشت:

$$\overline{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}at^2 + V_0 t}{t} \Rightarrow \boxed{\overline{V} = \frac{1}{2}at + V_0}$$

مثال ۲۴- سرعت متوسط متحرکی که با شتاب ثابت ۲ m/s² در حرکت است، در ۵ ثانیه‌ی اول حرکت، ۳۰ m/s است. سرعت اولیه‌ی این متحرک را تعیین کنید.

⚠ **نکته:** اگر در رابطه‌ی بالا، به جای t، مقدار آن را از معادله‌ی سرعت - زمان قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} V = a.t + V_0 \Rightarrow t = \frac{V - V_0}{a} \\ \overline{V} = \frac{1}{2}at + V_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{V} = \frac{1}{2}a.\frac{V - V_0}{a} + V_0 = \frac{1}{2}V - \frac{1}{2}V_0 + V_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{V} = \frac{V + V_0}{2}}$$

اکنون با توجه به رابطه‌ی اخیر و تعریف سرعت متوسط خواهیم داشت:

$$\overline{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad , \quad \overline{V} = \frac{V + V_0}{2} \Rightarrow \boxed{x - x_0 = \frac{V + V_0}{2}.t}$$

این رابطه - که رابطه‌ای بسیار مفید است! - را رابطه‌ی مستقل از شتاب می‌نامند و شبیه رابطه‌های قبلی، زمانی استفاده می‌شود که شتاب، جزو معلومات و مجهولات مسأله نباشد!

مثال ۲۵ - متحرکی با شتاب ثابت بر مسیر مستقیمی در حرکت است. اگر سرعت این متحرک در مدت ۱۵ دقیقه از $60\ km/h$ به $140\ km/h$ برسد، متحرک در این مدت چند کیلومتر راه پیموده است؟

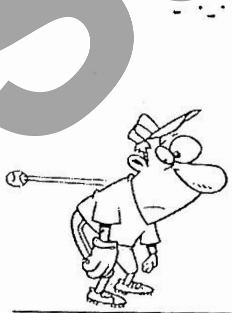
مثال ۲۶ - متحرکی با شتاب ثابت، مسافت $48\ m$ را بر مسیر مستقیم بین دو لحظه‌ی t و $t+3$ ثانیه طی می‌کند و در پایان این مسیر سرعتش به $20\ m/s$ می‌رسد. سرعت این متحرک در لحظه‌ی t چقدر است؟

مثال ۲۷ - متحرکی از حال سکون با شتاب ثابت به حرکت در می‌آید و پس از t ثانیه سرعتش به V می‌رسد. سپس به مدت $2t$ ثانیه سرعتش به طور یکنواخت کاهش می‌یابد تا به $\frac{V}{2}$ برسد. کل مسافتی که متحرک تا این لحظه پیموده است را برحسب V و t بیابید.

اکنون با حذف پارامتر t (زمان) از معادلات بیان شده، می‌توان به معادله‌ی مستقل از زمان دست یافت:

$$\left.\begin{aligned} x-x_0 &= \frac{V+V_0}{2}\,t \\ t &= \frac{V-V_0}{a} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x-x_0 = \frac{V+V_0}{2} \times \frac{V-V_0}{a} \Rightarrow \boxed{V^2-V_0^2 = 2a\,(x-x_0)}$$

مثال ۲۸ - گلوله‌ای با سرعت $80\ m/s$ به تنه‌ی درختی به ضخامت $20\ cm$ برخورد کرده و با سرعت $20\ m/s$ از آن خارج می‌شود. اگر شتاب حرکت گلوله در داخل تنه‌ی درخت ثابت فرض شود، اندازه‌ی این شتاب را بیابید.



مثال ۲۹ـ متحرکی روی محور x ها از مکان $x_0=+4m$ با سرعت اولیه‌ی $8\,m/s$ و شتاب ثابت، به حرکت در می‌آید و در مکان $x=7.5m$، سرعتش به $6\,m/s$ می‌رسد. معادله‌ی حرکت این متحرک در SI را بنویسید.

مثال ۳۰ـ جسمی با شتاب ثابت بر روی یک خط راست حرکت می‌کند و با سرعت‌های $2\,m/s$ و $3\,m/s$ به ترتیب از مکان‌های $x_1=1\,m$ و $x_2=11\,m$ عبور می‌کند. این متحرک با چه سرعتی از مکان $x_3=43\,m$ می‌گذرد؟

مثال ۳۱ـ جسمی با شتاب ثابت بر روی یک خط راست حرکت می‌کند و با سرعت‌های $10\,m/s$ و $30\,m/s$ به ترتیب از نقاط A و B عبور می‌کند. سرعت جسم در هنگام عبور از وسط پاره خط AB چقدر است؟

نکته: متحرکی را در نظر بگیرید که با سرعت V_0 در حال حرکت روی خط راست است که ناگهان حرکت کندشونده‌ای با شتاب a انجام می‌دهد پس از طی زمان t_s و پیمودن مسافت x_s متوقف می‌شود. در این صورت "زمان توقف" و "مسافت قبل از توقف" را می‌توان از روابط زیر بدست آورد:

$$V=a.t+V_0 \xrightarrow{V=0} 0=at_s+V_0 \Rightarrow t_s=\frac{V_0}{|a|}$$

$$V^2-V_0^2=2a\Delta x \xrightarrow{V=0} 0-V_0^2=2ax_s \Rightarrow x_s=\frac{V_0^2}{|2a|}$$

و از ترکیب دو رابطه‌ی اخیر می‌توان به رابطه‌ی $x_s=\frac{1}{2}at_s^2$ دست یافت.

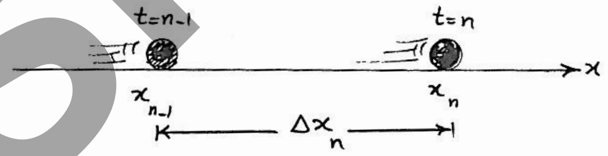
مثال ۳۲- اتومبیلی با سرعت $40\ km/h$ حرکت می‌کند و پس از ترمز کردن، با طی مسافت $25\ m$ می‌ایستد. اگر این اتومبیل با سرعت $80\ km/h$ حرکت کند و با همان شتاب ثابت ترمز نماید، پس از طی چه مسافتی خواهد ایستاد؟

مثال ۳۳- متحرکی با سرعت V_0 در حال حرکت بر روی خط راست است که ناگهان با شتاب $2\ m/s^2$ ترمز می‌نماید و پس از گذشت $20\ s$ متوقف می‌شود. متحرک در این مدت چه مسافتی را پیموده است؟

نکته: برای تعیین جابه‌جایی متحرک در ثانیه‌ی n اُم (Δx_n) باید مکان متحرک در لحظه‌ی $t=n-1$ را از مکان متحرک در لحظه‌ی $t=n$ کم کنیم. اکنون اگر متحرک با شتاب ثابت در حال حرکت باشد، می‌توان نوشت:

$$\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

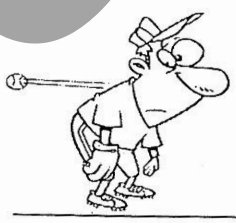
$$= [\frac{1}{2} a n^2 + V_0 n + x_0] - [\frac{1}{2} a (n-1)^2 + V_0 (n-1) + x_0]$$



$$\Rightarrow \boxed{\Delta x_n = a(n - 0/5) + V_0}$$

مثال ۳۴- متحرکی از حال سکون با شتاب ثابت شروع به حرکت می‌کند. جابه‌جایی متحرک در ثانیه‌ی پنجم، چند برابر جابه‌جایی متحرک در ثانیه‌ی سوم حرکت است؟

مثال ۳۵- متحرکی با شتاب ثابت در حرکت است و جابه‌جایی آن در ثانیه‌ی هفتم حرکت، $6\ m$ بیش از جابه‌جایی آن در ثانیه‌ی چهارم است. شتاب متحرک را بیابید.



⚠ **نکته**: در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، جابه‌جایی‌ها در ثانیه‌های متوالی، یک تصاعد حسابی با قدر نسبت a (شتاب) تشکیل می‌دهند. یعنی اگر به جابه‌جایی در هر ثانیه، مقدار a را اضافه نماییم، جابه‌جایی در ثانیه‌ی بعدی بدست می‌آید.

$$\Delta x_n - \Delta x_{n-1} = a$$

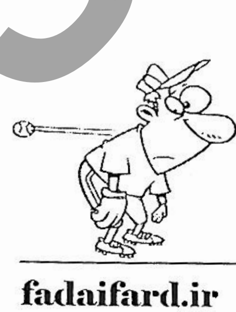
با تعمیم نکته‌ی فوق، می‌توان به رابطه‌ی زیبای زیر دست یافت:

$$\text{شتاب}\quad a = \frac{\Delta x_m - \Delta x_n}{m-n}$$

مثال ۳۶- جسمی که با شتاب ثابت بر روی یک خط راست درحرکت است، در ثانیه‌ی سوم ۱۲m و در ثانیه‌ی هفتم، ۲۰m جابه‌جا می‌شود. این جسم در ثانیه‌ی پنجم چند متر جابه‌جا می‌شود؟ در ثانیه‌ی دهم چه طور؟

مثال ۳۷- جسمی با شتاب ثابت، بر روی خط راست درحرکت است و در ثانیه‌ی پنجم حرکت، ۲۰m را می‌پیماید. جابه‌جایی متحرک در بازه‌ی زمانی (۳s و ۶s) چند متر است؟

مثال ۳۸- سرعت اولیه‌ی متحرکی که با شتاب ثابت بر روی خط راست حرکت می‌کند، ۱۵ m/s است. مسافتی که این متحرک در هر ثانیه می‌پیماید، ۳m کمتر از مسافت ثانیه‌ی قبل است. این متحرک از مبداء زمان تا لحظه‌ی توقف چه مسافتی را می‌پیماید؟



⚠ **نکته**: برای جسمی که با شتاب ثابت بر روی خط راست حرکت می‌کند، می‌توان جابه‌جایی در t ثانیه‌ی nام را از رابطه‌ی مقابل تعیین کرد:

$$\Delta x_{n,t} = at^2(n-0.5) + V_0 t$$

مثال ۳۹- ذره‌ای با سرعت اولیه‌ی $5\ m/s$ و با شتاب $2\ m/s^2$ بر روی خط راست در حرکت است.

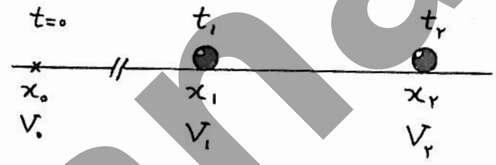
الف) جابه‌جایی متحرک در ۵ ثانیه‌ی سوم حرکت چند متر است؟

ب) جابه‌جایی متحرک در ۳ ثانیه‌ی پنجم حرکت را بیابید.

⚠ نکته: در تمامی روابط حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست، سرعت اولیه (V_0) حضور دارد. شاید بد نباشد که رابطه‌ای مستقل از این کمیت نیز بدست آوریم. برای این کار کافی است V_0 را از میان معادلات حذف نماییم:

$$\left.\begin{aligned} V = at + V_0 \;\Rightarrow\; V_0 = V - at \\ x = \tfrac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boxed{x = -\tfrac{1}{2}at^2 + Vt + x_0}$$

مثال ۴۰- متحرکی در مسیر مستقیم و با شتاب ثابت، فاصله‌ی ۸۰ متری از A تا B را در مدت $8\ s$ طی می‌کند و در لحظه‌ی رسیدن به نقطه‌ی B، سرعتش $15\ m/s$ است. شتاب متحرک را بیابید.



⚠ نکته: روابط مربوط به حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد و در هر بازه‌ی زمانی استفاده کرد:

معادله‌ی سرعت - زمان (مستقل از مکان) : $V_2 = a(t_2 - t_1) + V_1$

معادله‌ی مکان - زمان : $x_2 - x_1 = -\frac{1}{2}a(t_2^2 - t_1^2) + V_2 t_2 - V_1 t_1$

معادله‌ی مستقل از زمان : $V_2^2 - V_1^2 = 2a(x_2 - x_1)$

معادله‌ی مستقل از شتاب : $x_2 - x_1 = \frac{V_2 + V_1}{2}(t_2 - t_1)$

سرعت متوسط : $\bar{V} = \frac{V_1 + V_2}{2}$

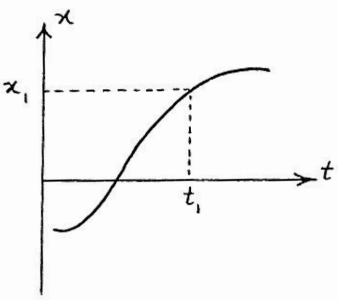
تحلیل نمودارهای حرکت :

بیان شد که وقتی جسمی بر روی خط راست حرکت می کند، مکان آن در حالت کلی، تابعی از زمان است و به صورت $x = f(t)$ در نظر گرفته می شود. اکنون اگر این تابع را در دستگاه مختصات $x - t$ رسم نماییم، نمودار مکان - زمان حرکت را رسم کرده ایم. به همین ترتیب می توان نمودارهای سرعت - زمان و شتاب - زمان را نیز رسم کرد.

اطلاعات بسیار مفیدی در مورد حرکت را می توان از این نمودارها استخراج کرد که به بررسی آنها می پردازیم :

الف) نمودار مکان - زمان :

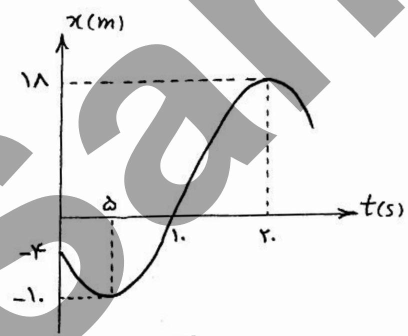
از روی نمودار مکان - زمان یک جسم، می توان اطلاعات زیر را بدست آورد :



i) مکان متحرک : ساده ترین چیزی که می توان از نمودار مکان - زمان بدست آورد، مکان متحرک در لحظات دلخواه است. برای این کار کافی است از لحظه ی مورد نظر، واقع بر محور زمان، خطی عمودی رسم نماییم تا نمودار را قطع کند و سپس از نقطه ی بدست آمده، خطی افقی رسم نماییم تا مکان ذره را مشخص کند !

ii) جابه جایی : با در دست داشتن مکان متحرک در لحظات مختلف، به راحتی می توان جابه جایی را در بازه ی زمانی مورد نظر بدست آورد : $\Delta x = x_2 - x_1$.

iii) مسافت طی شده : اگر مجموع جابه جایی های متحرک در جهت مثبت را با قدر مطلق مجموع جابه جایی های آن در جهت منفی جمع نماییم، مسافت طی شده توسط متحرک بدست می آید.

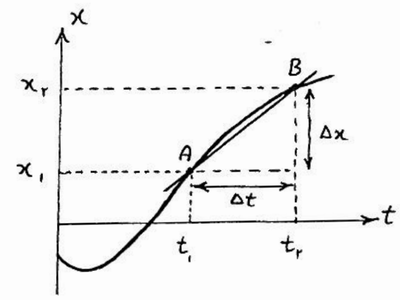


مثال ۴ـ نمودار مکان - زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می کند، مطابق شکل است.

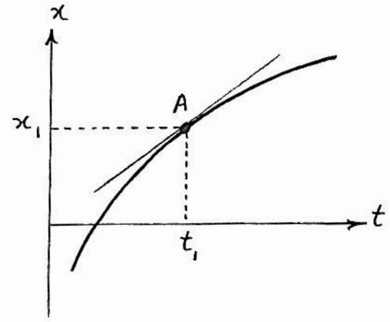
الف) جابه جایی متحرک در ۲۰ ثانیه ی اول حرکت چند متر است؟

ب) مسافت طی شده در ۲۰ ثانیه ی اول حرکت چقدر است؟

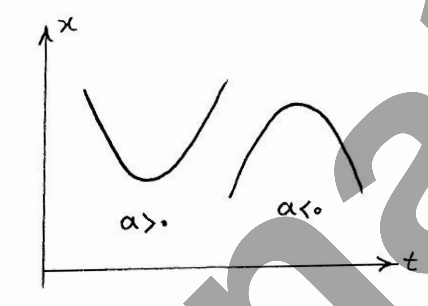
پ) مسافت طی شده در ۱۰ ثانیه ی اول، چند برابر مسافت طی شده در ۱۰ ثانیه ی دوم است؟



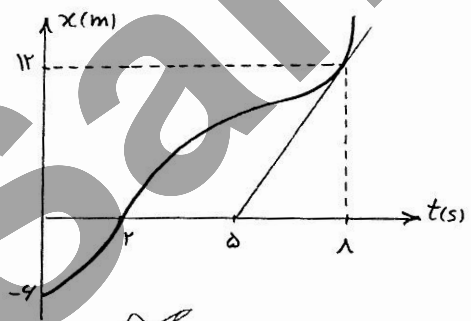
iv) سرعت متوسط: با معلوم بودن جابه‌جایی (Δx) و بازه‌ی زمانی (Δt) به راحتی می‌توان سرعت متوسط را به کمک تعریف آن یعنی رابطه‌ی $\bar{V}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$، تعیین کرد.
با توجه به شکل مقابل، تعبیر هندسی «سرعت متوسط» در یک بازه‌ی زمانی، چنین بیان می‌شود: سرعت متوسط یک متحرک در یک بازه‌ی زمانی، برابر شیب پاره خطی است که نقاط متناظر با آن دو لحظه، روی نمودار را به هم وصل می‌کند.



v) سرعت لحظه‌ای: در تعریف سرعت لحظه‌ای دیدیم که $V=\frac{dx}{dt}$ است. یعنی سرعت، مشتق تابع x-t برحسب زمان است. از سوی دیگر در ریاضیات خوانده‌ایم که برای به دست آوردن مشتق یک تابع در یک نقطه‌ی مورد نظر، کافی است شیب خط مماس بر نمودار نمایش تابع در آن نقطه را به دست آوریم. پس: «سرعت متحرک در هر لحظه، برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در آن لحظه است.»

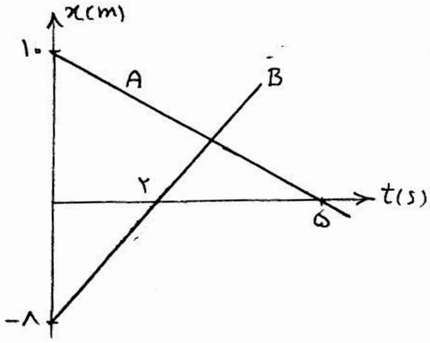


vi) علامت شتاب: با توجه به آنکه مشتق دوم مکان نسبت به زمان، شتاب متحرک را تعیین می‌کند و از سوی دیگر مشتق دوم یک تابع، جهت تقعر آن تابع است، می‌توان نتیجه گرفت «جهت تقعر نمودار مکان-زمان، بیان کننده‌ی علامت شتاب است.»



مثال ۴۲- با توجه به نمودار روبه‌رو، سرعت متحرک در لحظه‌ی $t=8s$، چند برابر سرعت متوسط آن در کل حرکت است؟

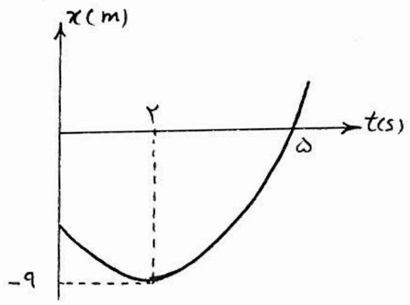
مثال ۴۳- در مثال ۴۲، سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی (2^s , 8^s) چقدر است؟



مثال ۴۴ـ نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که بر روی یک خط راست در حرکتند، مطابق شکل مقابل است.

الف) این دو متحرک در چه لحظه‌ای به هم می‌رسند؟

ب) در چه لحظاتی فاصله‌ی میان آنها ۱۶m می‌شود؟



مثال ۴۵ـ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، سهمی نشان داده شده در شکل مقابل است.

الف) سرعت اولیه و شتاب متحرک را بیابید.

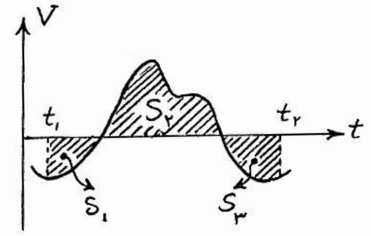
ب) در لحظه‌ای که متحرک از مبداء مکان می‌گذرد، سرعتش چند m/s است؟

پ) معادله‌ی حرکت را برای آن بنویسید.

ت) سرعت متوسط متحرک در ۵ ثانیه‌ی اول حرکت چقدر است؟

ب) نمودار سرعت ـ زمان:

شاید بتوان مهم‌ترین و پرکاربردترین نمودار حرکت را نمودار "سرعت ـ زمان" به حساب آورد. تمامی اطلاعات حرکت ـ به جز مکان متحرک ـ را می‌توان از این نمودار استخراج کرد:



i) جابه‌جایی: از آنجا که سرعت، مشتق مکان نسبت به زمان است (و در نتیجه مکان، انتگرال سرعت نسبت به زمان می‌باشد!) می‌توان نتیجه گرفت: مساحت بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان در یک بازه‌ی زمانی، برابر جابه‌جایی متحرک در آن بازه‌ی زمانی است. یعنی:

$$\Delta x = -S_1 + S_2 - S_3 \pm \cdots$$

⚠ **نکته:** اگر فقط نمودار سرعت ـ زمان را در اختیار داشته باشیم، نمی‌توانیم اطلاعی در مورد مکان ذره بدست آوریم، بلکه فقط تغییر مکان را می‌توان بدست آورد.

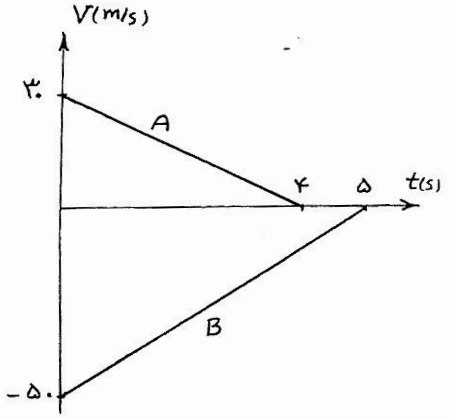
ii) مسافت طی‌شده: با توجه به تعریف مسافت طی‌شده، می‌توان گفت: مسافت طی‌شده توسط متحرک در یک بازه‌ی زمانی، برابر مجموع قدر مطلق مساحت‌های محصور بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان در آن بازه‌ی زمانی است.

مثال ۴۶ـ نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل است.

الف) متحرک در کل حرکت (۱۴ ثانیه) چه مسافتی پیموده و چند متر جابه‌جا شده است؟

ب) حداکثر فاصله‌ی متحرک تا نقطه‌ی شروع حرکت چند متر است؟

پ) در ۴ ثانیه‌ی دوم حرکت، متحرک چند متر جابه‌جا شده است؟

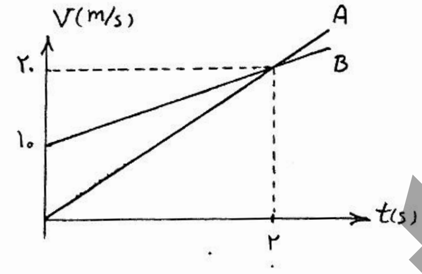


مثال ۴۷ـ نمودار سرعت ـ زمان دو قطار که بر روی یک ریل، یکدیگر را در فاصله‌ی ۳۰۰ متری از هم می‌بینند و ترمز می‌نمایند، مطابق شکل مقابل است.

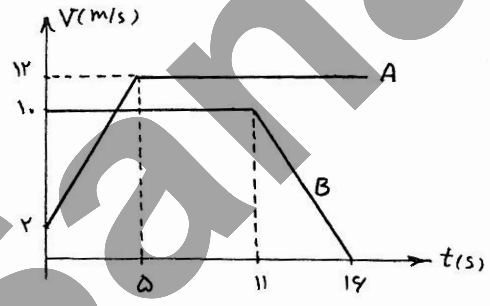
الف) در لحظه‌ای که قطار A متوقف شده است، سرعت قطار B چقدر است؟

ب) در این لحظه، فاصله‌ی دو قطار از هم چند متر است؟

پ) حداقل فاصله‌ی دو قطار از هم چند متر خواهد شد؟

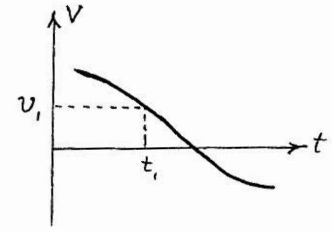


مثال ۴۸ـ دو متحرک A و B که نمودار سرعت ـ زمان آنها مطابق شکل است، در $t=0$ از کنار هم عبور می‌کنند. در چه لحظه‌ای مجدداً دو متحرک به هم می‌رسند؟

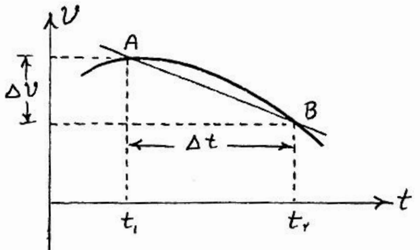


مثال ۴۹ـ نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B، که روی محور x حرکت می‌کنند، مطابق شکل مقابل است. اگر در لحظه‌ی $t=0$، هر دو متحرک در $x=0$ قرار داشته باشند، چند ثانیه پس از آن، دو متحرک به هم می‌رسند؟

iii) سرعت متوسط : به کمک تعریف سرعت متوسط $\left(\bar{V}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$ ، می توانیم ابتدا Δx و سپس $\bar{V}$ را به سادگی تعیین نماییم.

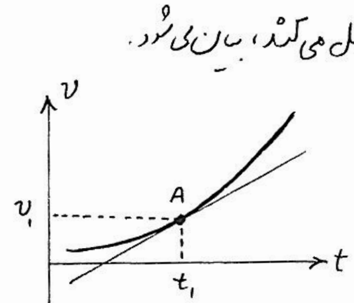


iv) سرعت لحظه ای : ساده ترین چیزی که می توان از نمودار سرعت - زمان بدست آورد، سرعت متحرک در هر لحظه ی دلخواه است. (شبیه بدست آوردن مکان متحرک، از روی نمودار مکان - زمان!)



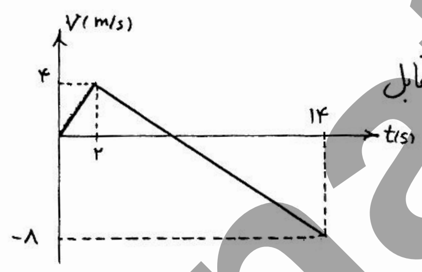
v) شتاب متوسط : با معلوم بودن سرعت متحرک در هر لحظه ی دلخواه ، با توجه به تعریف شتاب متوسط، می توانیم مقدار آن را در هر بازه ی زمانی ، از روی نمودار تعیین نماییم.

به عبارت هندسی «شتاب متوسط» در یک بازه ی زمانی ، به صورت شیب پاره خطی که نقاط متناظر با آن دو لحظه ، روی نمودار را به هم متصل می کند، بیان می شود.



vi) شتاب لحظه ای : در تعریف شتاب لحظه ای ، دیدیم که $a=\frac{dv}{dt}$ است.

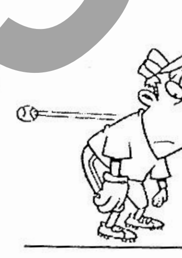
بنابراین می توان نتیجه گرفت : شتاب متحرک در هر لحظه ، برابر شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان ، در آن لحظه است.

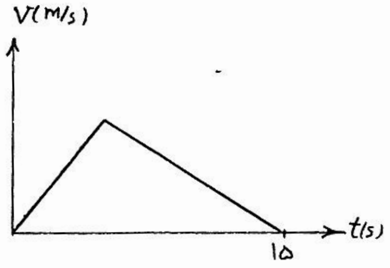


مثال ۵۰ - متحرکی روی محور x حرکت می کند و نمودار سرعت - زمان آن مطابق شکل مقابل است.

الف) سرعت متوسط متحرک در کل حرکت چقدر است ؟

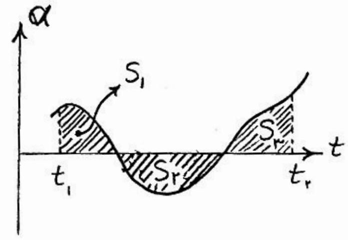
ب) متحرک در ۱۴ ثانیه ی اول ، چه مدت در خلاف جهت محور x ها حرکت کرده است ؟ در این مدت، سرعت متوسط متحرک چقدر است؟





مثال ۵۱ - نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. اگر سرعت متوسط متحرک در کل زمان حرکت، $20\ m/s$ و اندازه‌ی شتاب در حرکت تند شونده دو برابر شتاب در مرحله‌ی کند شونده باشد، بیشینه‌ی سرعت متحرک و شتاب حرکت در هر مرحله را بیابید.

پ) نمودار شتاب - زمان:



i) تغییرات سرعت: می‌توان نشان داد: مساحت بین نمودار شتاب - زمان و محور زمان در یک بازه‌ی زمانی، برابر تغییرات سرعت متحرک در آن بازه‌ی زمانی است. یعنی:

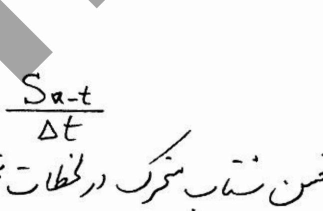
$$\Delta v = S_1 - S_2 + S_3 \pm \dots$$

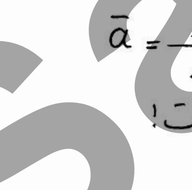
⚠ **نکته:** فقط با در اختیار داشتن نمودار شتاب - زمان یک متحرک، نمی‌توان اطلاعی در مورد مکان و سرعت متحرک در لحظات مختلف بدست آورد.

ii) شتاب متوسط: به کمک تعریف «شتاب متوسط»، می‌توان مقدار این کمیت را در هر بازه‌ی زمانی دلخواه و با استفاده از مساحت زیر نمودار شتاب - زمان، تعیین کرد.

$$\bar{a} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{S_{a-t}}{\Delta t}$$

iii) شتاب لحظه‌ای: حداقل انتظاری که از این نموداری بود، تعیین شتاب متحرک در لحظات مختلف است!



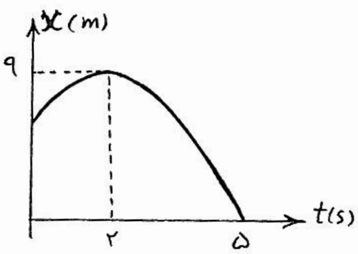


مثال ۵۲ - نمودار شتاب - زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. اگر سرعت اولیه‌ی متحرک $-3\ m/s$ باشد، نوع حرکت را در لحظات

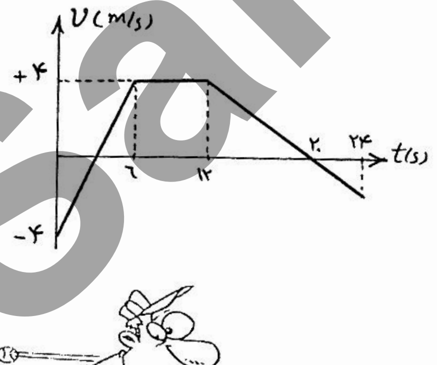
$t_1=3s$ و $t_2=4s$ تعیین نمایید.

⚠ **نکته**: به کمک نمودار مکان - زمان، می توان نمودار سرعت - زمان را رسم نمود. برای این کار کافیست، بتوانیم شیب خطوط مماس بر نمودار مکان - زمان در لحظات مختلف را تعیین نمائیم. هرچند این کار در حالت کلی دشوار به نظر می رسد، اما برای حالتهایی که در حال بررسی حرکت یکنواخت، یا حرکت با شتاب ثابت هستیم (با توجه به روابط موجود)، کار دشواری نخواهد بود.

به همین ترتیب، می توان نمودار شتاب - زمان را از روی نمودار سرعت - زمان استخراج کرد.



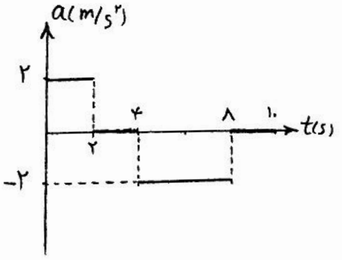
مثال ۵۳ - نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت، روی محور x ها حرکت می‌کند، مطابق شکل است. نمودارهای سرعت - زمان و شتاب - زمان را برای آن رسم کنید.



مثال ۵۴ - نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. نمودار شتاب - زمان را برای آن رسم نمایید.

نکته: از روی نمودار شتاب - زمان نیز - با معلوم بودن شرایط اولیه - می توان نمودار سرعت - زمان را رسم کرد. در این حالت، از این نکته استفاده می شود که «تغییرات سرعت در هر بازه ی زمانی دلخواه، برابر مساحت زیر نمودار شتاب - زمان، در همان بازه ی زمانی است.»

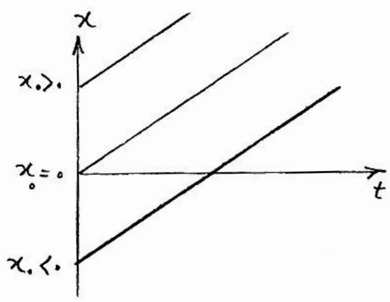
به همین ترتیب، با معلوم بودن نمودار سرعت - زمان و در اختیار داشتن اطلاعاتی در مورد مکان متحرک، در لحظه ای خاص، می توان نمودار مکان - زمان را برای حرکت ترسیم کرد. در اینجا نیز به یاد می آوریم که «تغییرات مکان (جابه جایی) در هر بازه ی زمانی دلخواه، برابر مساحت زیر نمودار سرعت - زمان در آن بازه ی زمانی است.»



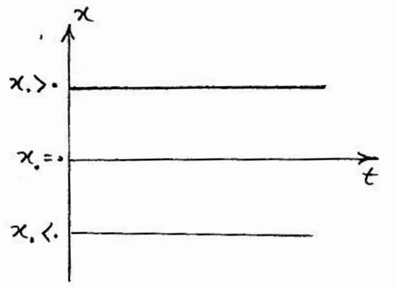
مثال ۵۵ - نمودار شتاب - زمان متحرکی که از حال سکون، حرکت خود را از مبداء مختصات آغاز کرده، مطابق شکل است. نمودارهای سرعت - زمان و مکان - زمان را برای آن رسم نمایید.

مثال ۵۶ - نمودار شتاب - زمان متحرکی در مسیر مستقیم، مطابق شکل است. اگر سرعت متوسط متحرک در این مدت $6,4\ m/s$ باشد، سرعت اولیه آن چند متر بر ثانیه است؟

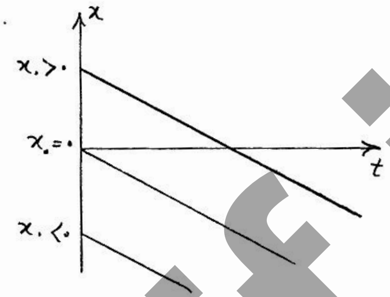
⚠ **نکته**: نمودارهای حرکت، در حرکت یکنواخت به صورت زیر است:



$V>0$

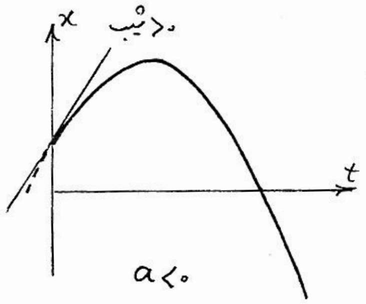


$V=0$ (سکون)

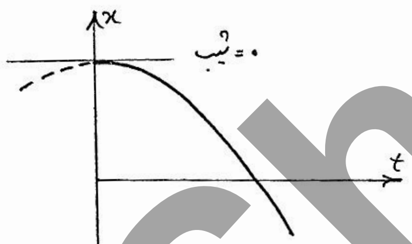


$V<0$

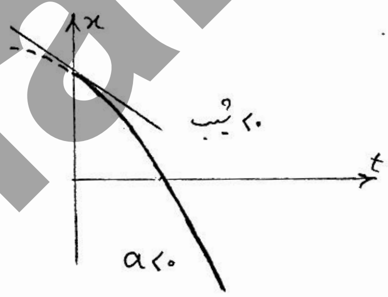
⚠ **نکته**: نمودارهای حرکت، در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، به صورت زیر است:



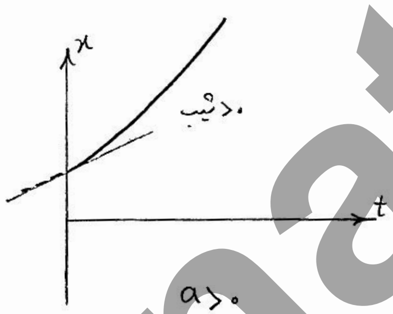
$a<0$
$v_0>0$



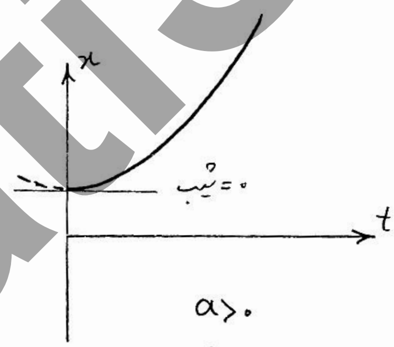
$a<0$
$v_0=0$



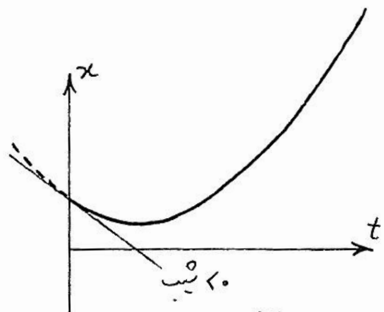
$a<0$
$v_0<0$



$a>0$
$v_0>0$

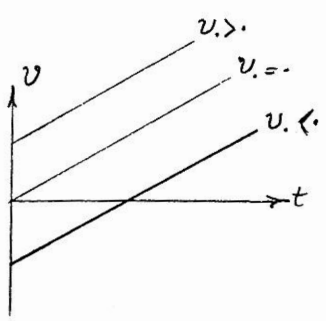


$a>0$
$v_0=0$

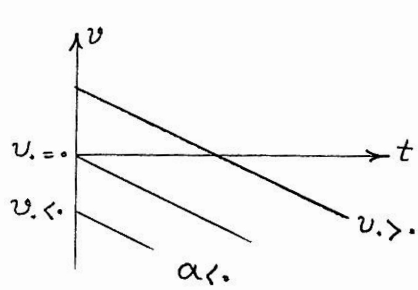


$a>0$
$v_0<0$

... و نمودارهای سرعت- زمان نیز، به صورت زیر خواهند بود:



$a>0$



$a<0$

سقوط آزاد :

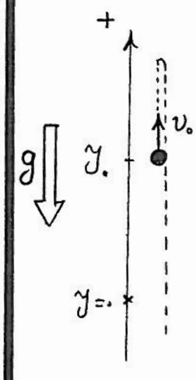
حرکت یک جسم در راستای قائم، فقط تحت تأثیر نیروی وزن جسم را سقوط آزاد می نامند. در این حرکت، شتاب همواره ثابت است، یعنی اندازه و جهت آن در حین حرکت تغییر نمی کند و اندازه ی آن g (شتاب جاذبه ی زمین) است. بنابراین تمامی معادلات «حرکت روی خط راست با شتاب ثابت» را می توان برای آن به کار برد.

برای استفاده ی صحیح از معادلات حرکت، توجه به چند نکته ضروری است:

- انتخاب محور مختصات، به همراه مبدأ و جهت محور: هرچند انتخاب مبدأ مختصات و جهت آن کاملاً دلخواه است، اما این انتخاب باید انجام شود؛ زیرا بسته به آنکه مبدأ مختصات کجا قرار داشته باشد و جهت حرکت به کدام سمت باشد، علامت و مقادیر کمیت ها در معادلات مختلف خواهد بود.

- در نظر گرفتن «علامت» برای کمیت ها: کمیت های مورد استفاده در معادلات سقوط آزاد، یعنی مکان، جابه جایی، سرعت، سرعت متوسط و شتاب، همگی دارای علامت هستند، که این علامت ها با توجه به جهت دستگاه مختصات انتخاب شده تعیین می شوند.

بنابراین می توان معادلات حرکت را به صورت زیر نوشت:



معادله ی حرکت، معادله ی مکان - زمان: $y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0$

معادله ی سرعت - زمان: $v=-gt+v_0$

معادله ی مستقل از زمان: $v^2-v_0^2=-2g(y-y_0)$ ؛ $v_2^2-v_1^2=-2g(y_2-y_1)$

معادله ی مستقل از شتاب: $y-y_0=\frac{v+v_0}{2}t$ ؛ $y_2-y_1=\frac{v_2+v_1}{2}\cdot\Delta t$

سرعت متوسط: $\bar{v}=\frac{v+v_0}{2}$ ؛ $\bar{v}=\frac{v_2+v_1}{2}$

جابه جایی در ثانیه ی n ام: $\Delta y_n=-g(n-0.5)+v_0$

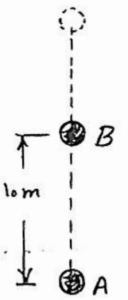
مثال ۵۷ - گلوله ی کوچکی از ارتفاع ۲۵ متری سطح زمین با سرعت $20\ m/s$ در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می شود. این گلوله پس از چه مدت و با چه سرعتی به زمین برخورد خواهد کرد؟

مثال ۵۸ - گلوله‌ی کوچکی را از بالای یک بلندی با سرعت $10\ m/s$ به سمت بالا، در راستای قائم پرتاب می‌کنیم. چه مدت پس از پرتاب، سرعت گلوله به $20\ m/s$ می‌رسد؟

مثال ۵۹ - از بالای ساختمانی به ارتفاع $60\ m$، سنگی را با سرعت $20\ m/s$ در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. سنگ با چه سرعتی به سطح زمین می‌رسد؟

مثال ۶۰ - گلوله‌ی کوچکی را با سرعت اولیه‌ی V_0، در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. نشان دهید ارتفاع اوج تا محل پرتاب و زمان اوج، از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$t_{\text{اوج}} = \frac{V_0}{g} \quad ; \quad y_{\text{اوج}} = \frac{V_0^2}{2g}$$



مثال ۶۱ - سنگی را در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. سنگ، از نقطه‌ی A با سرعت V و از نقطه‌ی B با سرعت $\frac{V}{3}$ می‌گذرد. اگر $AB = 10m$ باشد،

الف) مقدار V را بیابید.

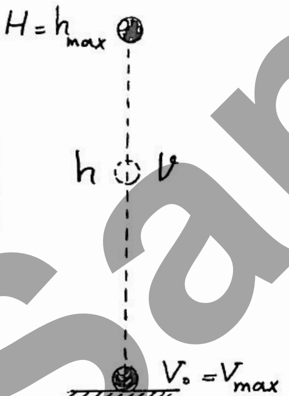
ب) تعیین کنید جسم چند متر بالاتر از نقطه‌ی B بالا خواهد رفت؟

مثال ۶۲ - قطره‌های آب از ارتفاع H از یک دوش، در بازه‌های زمانی مساوی T، یکی پس از دیگری می‌چکند. وقتی اولین قطره به زمین می‌رسد، پنجمین قطره در حال جدا شدن از دوش است.

الف) در این لحظه، فاصله‌ی هر قطره تا زمین را بیابید.

ب) فاصله‌ی میان قطرات متوالی را تعیین کنید.

مثال ۶۳ـ توپی از ارتفاع ۵ متری زمین رها می شود. توپ به زمین خورده و تا ارتفاع ۴٫۰۵ متری بالا می رود. اگر زمان این رفت و برگشت، ۲s باشد، شتاب متوسط توپ و جهت آن در مدتی که توپ با زمین تماس داشته را بیابید. (سقوط در شرایط خلاء صورت گرفته است.)



⚠ نکته: هنگامی که جسمی با سرعت اولیه‌ی V_0 در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می شود و یا از ارتفاع H رها می گردد، در ارتفاع h از سطح زمین، دارای سرعت v خواهد بود و در اینصورت:

$$\left(\frac{v}{v_{max}}\right)^2 + \frac{h}{h_{max}} = 1$$

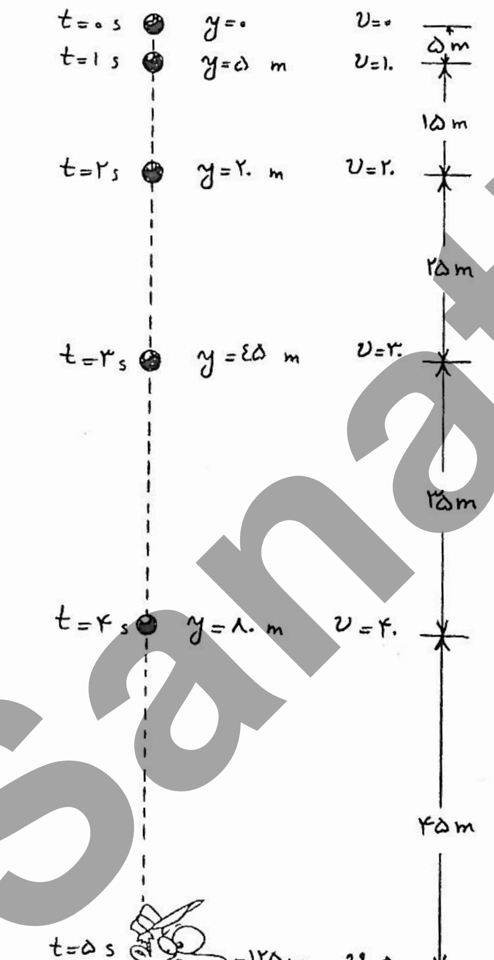
اثبات:

مثال ۶۴ ـ سنگی را در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. اگر زمان رسیدن به نقطه‌ی اوج، t باشد،

الف) زمان رسیدن به نیمه‌ی ارتفاع اوج، چند برابر t است؟

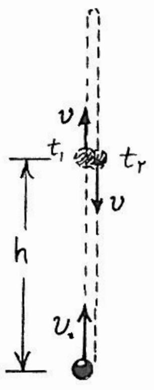
ب) زمان طی فاصله‌ی میان $\frac{1}{4}$ ارتفاع اوج تا $\frac{3}{4}$ ارتفاع اوج، چند t است؟

⚠ **نکته**: اعداد طلایی نشان داده شده در نمودار مقابل را به خاطر بسپارید!!



مثال ۶۵- جسم کوچکی را از بالای ساختمانی رها می‌کنیم. این جسم در آخرین ثانیه‌ی حرکت خود، ۴۵m را می‌پیماید. ارتفاع ساختمان چند متر است؟ جسم چه مدت در راه بوده است؟ سرعت آن هنگام برخورد به زمین چقدر است؟

⚠ نکته: هنگامی که جسمی با سرعت اولیه‌ی v_0 در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود، در دو لحظه‌ی مثبت t_1 و t_2 جسم از یک محل در فاصله‌ی h از نقطه‌ی پرتاب می‌گذرد (h، از ارتفاع اوج کمتر است). در اینصورت خواهیم داشت:



$$t_1 + t_2 = \frac{2v_0}{g} \quad ; \quad t_1 + t_2 = 2\,t_{\text{اوج}}$$

$$t_1 \cdot t_2 = \frac{2h}{g}$$

$$|t_2 - t_1| = \frac{2v}{g} \quad ; \quad v = \text{سرعت جسم هنگام عبور از ارتفاع } h$$

اثبات:

مثال ۶۶- جسمی را در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم، به طوری که بازه‌ی زمانی دو عبور متوالی جسم از بالای درخت، ۳s است.

الف) سرعت جسم در بالای درخت چقدر است؟

ب) بالای درخت از نقطه‌ی اوج جسم چند متر فاصله دارد؟

مثال ۶۷- جسمی را در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. $3s$ و $7s$ پس از پرتاب، جسم از محلی در ارتفاع h از نقطه‌ی پرتاب می‌گذرد.

الف) سرعت اولیه‌ی پرتاب را بیابید.

ب) ارتفاع h را تعیین نمایید.

پ) سرعت جسم هنگام عبور از ارتفاع h چقدر است؟

⚠ **نکته:** وقتی حرکت سقوط آزاد چند جسم را با یکدیگر بررسی می‌نماییم، مناسب است که معادلات حرکت آنها را در یک دستگاه مختصات بنویسیم. همچنین اگر زمان‌های شروع حرکت آنها یکسان نیست، باید مبدا شروع یکی از متحرک‌ها را به عنوان مبدا زمان در نظر گرفته و زمان سایر متحرک‌ها را نسبت به آن بسنجیم.

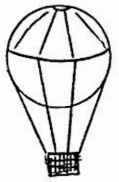
مثلاً اگر متحرک دوم، نسبت به متحرک اول با تاخیر زمانی T حرکت خود را آغاز کرده است، می‌توانیم از رابطه‌ی $t' = t - T$ برای این حرکت‌ها استفاده نماییم. در این رابطه، t زمان متحرک اول و t' زمان متحرکی است که با تاخیر حرکت را آغاز کرده است.

مثال ۶۸- دو سنگ را از سطح زمین در راستای قائم به طرف بالا، با اختلاف زمانی $2s$ پرتاب می‌نماییم. اگر سرعت اولیه‌ی پرتاب سنگ اول $25\ m/s$ باشد، سنگ دوم را با چه سرعتی پرتاب نماییم تا دو جسم در ارتفاع 20 متری سطح زمین به هم برخورد نمایند؟

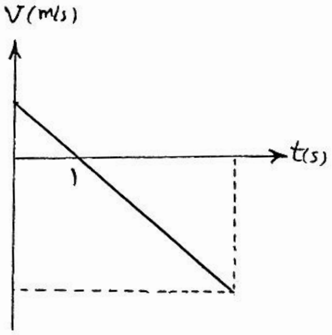
مثال ۶۹ ـ گلوله‌ی کوچکی را از ارتفاع ۱۳٫۷۵ m از سطح زمین با سرعت اولیه‌ی ۱۰ m/s در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. ۱٫۵ s بعد، گلوله‌ی دیگری از سطح زمین با سرعت ۳۰ m/s در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود. این دو گلوله پس از چه مدت و در چه ارتفاعی از سطح زمین به هم می‌رسند؟

مثال ۷۰ ـ دو گلوله با سرعت‌های اولیه‌ی برابر، از یک نقطه، در راستای قائم و با اختلاف زمانی ۳ s نسبت به هم، به طرف بالا پرتاب می‌شوند. محل برخورد دو گلوله به هم، تا نقطه‌ی اوج گلوله‌ها چند متر فاصله دارد؟

مثال ۷۱ ـ سه گلوله از سطح زمین با سرعت اولیه‌های یکسان از یک نقطه به ترتیب در لحظات $t=0\,s$، $t=2\,s$ و $t=4\,s$ به سمت بالا در راستای قائم پرتاب می‌شوند. محل برخورد گلوله‌ی اول و دوم، چند متر با محل برخورد گلوله‌ی اول و سوم فاصله دارد؟ (منظور از محل برخورد، محلی است که گلوله‌ها از کنار هم می‌گذرند.)



مثال ۷۲- بالنی با سرعت ثابت $10\ m/s$ در راستای قائم به طرف بالا در حال حرکت است. هنگامی که بالن به ارتفاع ۴۰ متری سطح زمین می‌رسد، جسمی از داخل آن رها می‌شود. این جسم پس از چه مدت و با چه سرعتی به زمین برخورد می‌کند؟



مثال ۷۳- نمودار سرعت - زمان متحرکی که از بالای یک ساختمان، در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود و با سرعت $20\ m/s$ به زمین برخورد می‌کند، مطابق شکل است.

الف) سرعت اولیه‌ی پرتاب گلوله چقدر است؟

ب) ارتفاع ساختمان چند متر است؟

پ) نمودار مکان - زمان را برای این متحرک رسم نمایید.

نکته: در بررسی حرکت دو یا چند جسم، می‌توانیم معادلات حرکت را نسبت به یکی از این متحرک‌ها نیز مورد استفاده قرار دهیم.

در این صورت باید کمیت‌های نسبی (x_r، Δx_r، V_r و a_r) را در معادلات حرکت به کار ببریم.

برای تعیین کمیت‌های نسبی متحرک B نسبت به متحرکی مانند A، داریم:

$$x_r = x_B - x_A \qquad \Delta x_r = \Delta x_B - \Delta x_A$$

$$V_r = V_B - V_A \qquad a_r = a_B - a_A$$

باید دقت داشت که حرکت نسبی فقط زمانی قابل استفاده است که در تمامی لحظات، هر دو متحرک در حال حرکت باشند. به عبارت دیگر اگر یکی از متحرک‌ها با تأخیر زمانی حرکت کرده است یا یکی از آنها زودتر از دیگری متوقف شده است، نمی‌توان از این روش استفاده کرد.

مثال ۷۴- یک قطار مسافری روی ریلی با سرعت $10\,m/s$ در حرکت است. قطار دیگری روی همان ریل با سرعت $40\,m/s$ به دنبال آن در حرکت است. وقتی فاصله‌ی میان دو قطار به $300\,m$ می‌رسد، قطار عقبی ترمز می‌کند.

الف) حداقل شتاب ترمز چقدر باشد تا دو قطار به هم برخورد نکنند؟

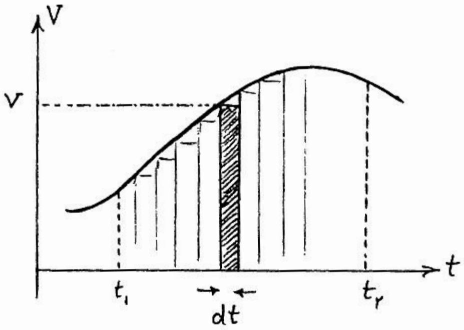
ب) نمودار مکان - زمان آنها را در یک دستگاه مختصات رسم نمایید.

مثال ۷۵- دو توپ را از ارتفاعی در شرایط خلاء، اولی را با سرعت $4\,m/s$ به طرف بالا و دومی را با سرعت $3\,m/s$ به طرف پایین، در راستای قائم پرتاب می‌کنیم. فاصله‌ی آنها پس از گذشت $5s$ از لحظه‌ی پرتاب چند متری می‌شود؟

دور از چشمان معلّمین ریاضی

متحرکی را در نظر بگیرید که بر روی خط راست حرکت می‌کند و معادله‌ی سرعت - زمان آن به صورت $V=V(t)$ است. می‌خواهیم ببینیم چگونه می‌توان معادله‌ی مکان - زمان را برای آن بدست آورد.

هرچند سرعت متحرک در لحظات مختلف به طور پیوسته تغییر می‌کند و نمی‌توان از رابطه‌ی $\Delta x=V.t$ برای آن استفاده کرد، اما می‌توان فرض نمود که سرعت متحرک در بازه‌ی زمانی بسیار کوچک dt ($dt=\Delta t \to 0$!) ، ثابت است. در اینصورت با توجه به یکنواخت بودن حرکت در این بازه‌ی زمانی، خواهیم داشت:



$dx=V.dt$: جابه‌جایی در بازه‌ی زمانی dt

اکنون برای بدست آوردن کل جابه‌جایی در یک بازه‌ی زمانی دلخواه Δt، کافی است این مقادیر dx را با هم جمع کنیم. ابزار ریاضی برای جمع کردن این کمیت‌های بسیار کوچک پیوسته، انتگرال معیّن است. بنابراین خواهیم داشت:

$$dx = V.dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t V\,dt \Rightarrow x - x_0 = \int_0^t V(t).dt$$

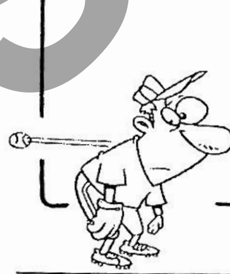
در درس ریاضی، با نحوه‌ی محاسبه‌ی انتگرال (معین و نامعین) آشنا خواهید شد. اما همین قدر برای ما کفایت می‌کند که بدانیم: اگر $f(t)$ مشتق تابع $F(t)$ باشد، $F(t)$ را تابع اولیه‌ی $f(t)$ می‌نامند و در اینصورت:

$$\int_a^b f(t).dt = F(b) - F(a)$$

برای تعیین انتگرال یک تابع، باید عکس عملیات مشتق‌گیری را انجام دهیم! (هرچند این کار، گاهی بسیار مشکل و گاهی نیز غیرممکن است!!)

شبیه استدلال بالا را می‌توان برای شتاب نیز به کار برد و نوشت،

$$V - V_0 = \int_0^t a(t).dt$$



مثال ۷۶- معادله‌ی شتاب-زمان متحرکی که حرکت خود را از حال سکون و از مبدأ مکان، روی محور x ها آغاز کرده، به صورت $a=-2t+4$ (در SI) است.

الف) معادلات سرعت-زمان و مکان-زمان را برای این متحرک بدست آورید.

ب) متحرک در چه لحظاتی توقف کرده است؟ سرعت متوسط متحرک در این مدت چقدر است؟

پ) سرعت و شتاب متحرک را وقتی از نقطه‌ی $x=+9m$ عبور می‌کند، تعیین کنید.

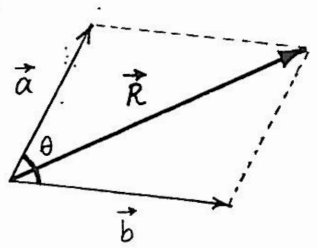
مثال ۷۷- معادله‌ی سرعت-زمان متحرکی در SI به صورت $V=10\sin 5t$ است. اگر $x_0=0$ باشد، معادلات شتاب-زمان و مکان-زمان را برای آن بدست آورید.

مثال ۷۸- رابطه‌ای مستقل از زمان بین "x و V"، "x و a" و "a و V" بدست آورید.

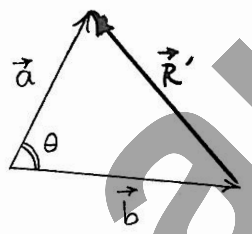
حرکت دو بُعدی (حرکت در صفحه)

اکنون نوبت آن رسیده است که تمامی مفاهیم حرکت در یک بُعد را تعمیم دهیم و خود را برای بررسی حرکت دوبُعدی (دو بعدی) آماده نماییم. حرکت دوبُعدی حرکتی است که در صفحه صورت می پذیرد و لذا برای توصیف آن، حداقل به یک دستگاه مختصات دو بعدی نیاز داریم.

قبل از ورود به بحث، لازم است ریاضیات برداری را به صورت بسیار سریع، مرور نماییم:



$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$$



$$\vec{R'} = \vec{a} - \vec{b}$$

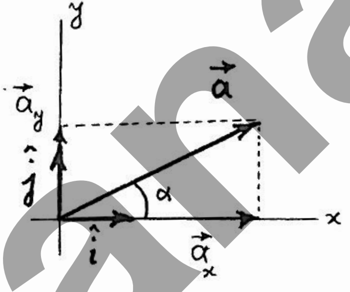
$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta} \qquad R' = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| \geqslant |\vec{a} \pm \vec{b}| \geqslant \big||\vec{a}| - |\vec{b}|\big|$$

* اگر بُردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$، هم اندازه باشند، می توان اندازه ی جمع و تفاضل دو بردار را از روابط زیر بدست آورد:

$$R = 2a\cos\frac{\theta}{2} \qquad R' = 2a\sin\frac{\theta}{2}$$

* هر بردار دلخواه را می توان برحسب بردارهای یکه ی $\hat{i}$ و $\hat{j}$، تجزیه کرد.

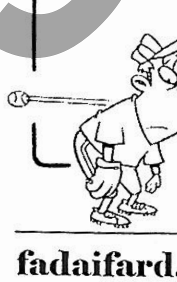


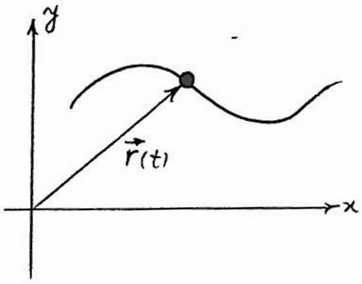
$$\begin{cases} a_x = a.\cos\alpha \\ a_y = a.\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = a\cos\alpha\,\hat{i} + a\sin\alpha\,\hat{j}$$

$$\tan\alpha = \frac{a_y}{a_x} \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

* ضرب عددی دو بُردار به صورت های زیر قابل استفاده است:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\theta \quad , \quad \vec{a}.\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + \dots$$





بردار مکان: بردار مکان، برداری است که در هر لحظه، مبدأ مختصات را به مکان جسم وصل می‌کند. این بردار را در دستگاه مختصات دکارتی، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\vec r(t) = x(t)\,\hat i + y(t)\,\hat j$$

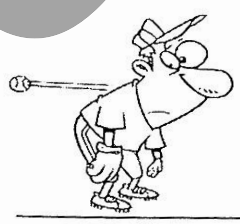
مثال ۷۹- بردار مکان متحرکی در SI به صورت $\vec r = -5\sin 10\pi t\,\hat i + (60t+9)\,\hat j$ است. فاصله‌ی متحرک تا مبدأ مکان در لحظه‌ی $t=0.05\,s$ چند متر است؟

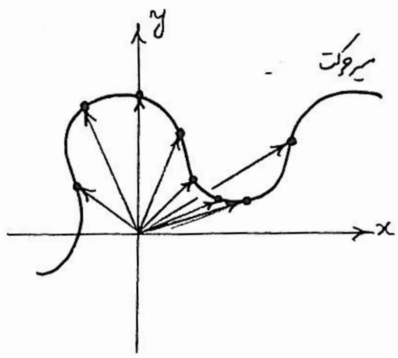
مثال ۸۰- بردار مکان دو متحرک A و B در SI به صورت $\vec r_A = (t^2-2t)\,\hat i + (4t-15)\,\hat j$ و $\vec r_B = (2t-3)\,\hat i + (t^2-4t)\,\hat j$ است.

الف) آیا این دو متحرک به هم برخورد می‌کنند؟

ب) فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد (در صورت وجود) تا مبدأ مختصات چند متر است؟

مثال ۸۱- دو گلوله‌ی A و B در صفحه‌ی xoy قرار دارند و مکان آنها در SI به صورت $\begin{cases} x_A = 8t-6 \\ y_A = 2t \end{cases}$ و $\begin{cases} x_B = 10 \\ y_B = t+2 \end{cases}$ است. یک ثانیه قبل از برخورد، فاصله‌ی میان آنها چند متر است؟





مسیر حرکت: مسیر حرکت یک متحرک، مجموعه‌ی مکان‌هایی است که متحرک مورد نظر در لحظات مختلف در آنها حضور داشته است. به عبارت دیگر، مسیر حرکت همان ردپای متحرک است.

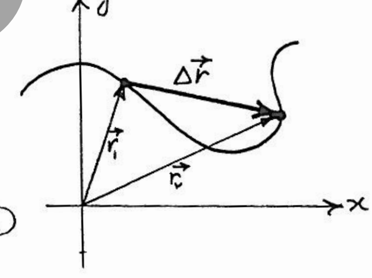
مسیر حرکت یک متحرک دوبعدی، رابطه‌ای است بین x و y که در آن، زمان (t) حضور ندارد. بنابراین برای تعیین مسیر حرکت متحرکی که بردار مکان آن معلوم است، باید پارامتر t را بین روابط $x-t$ و $y-t$ حذف نماییم، تا رابطه‌ای بین x و y بدست آید. توجه به این نکته نیز لازم است که مسیر حرکت می‌تواند تابع نباشد!

مثال ۸۲ - مسیر حرکت را برای حرکت های دوبعدی زیر بدست آورید:

الف) $\vec{r}_{(t)} = 3t\,\hat{i} + (4t - 5t^2)\,\hat{j}$

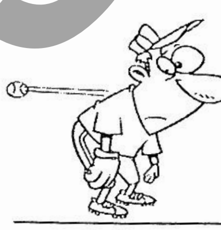
ب) $x = 2\sin 5\pi t$ و $y = 3\cos 5\pi t$

پ) $x = t + \frac{1}{t+1}$ و $y = t - \frac{1}{t+1}$



بردار جابه جایی: بردار جابه جایی متحرکی که در لحظات t_1 و t_2 به ترتیب بردارهای مکان $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ برای توصیف آن به کار می‌رود به صورت زیر تعریف می‌شود:

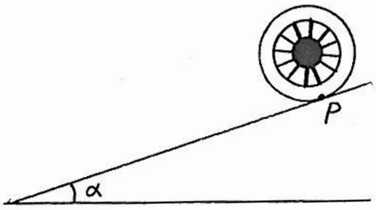
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$



⚠ **نکته :** بردار جابه‌جایی در دستگاه مختصات دکارتی را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2\,\hat{i} + y_2\,\hat{j}) - (x_1\,\hat{i} + y_1\,\hat{j})$$

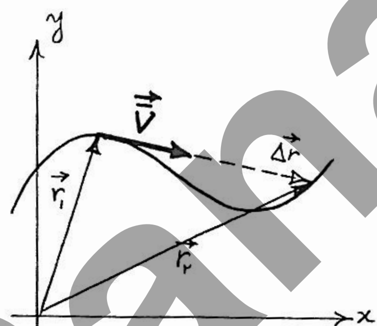
$$= (x_2 - x_1)\,\hat{i} + (y_2 - y_1)\,\hat{j} \quad \Rightarrow \quad \Delta \vec{r} = \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j}$$



مثال ۸۳ - در شکل مقابل، نقطه‌ی P روی محیط چرخ مشخص شده‌است. هنگامی که چرخ ۲٫۵ دور می‌چرخد، نقطه‌ی P چند متر جابه جا می‌شود؟

(شعاع چرخ $r = 0.5\,m$ و $\pi = 3$ است.)

مثال ۸۴ - متحرکی بر روی دایره‌ای به شعاع $10\,m$ حرکت می‌کند. اندازه‌ی جابه جایی آن را در $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{3}{4}$ و ۱ پیمودن دایره ، بیابید.



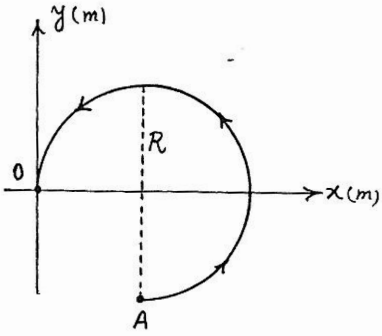
بردار سرعت متوسط : بر طبق تعریف ، نسبت بردار جابه جایی به زمان انجام جابه جایی را بردار سرعت متوسط می نامند . بنابراین می توان نوشت :

$$\vec{V} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

از آنجاکه $\Delta t > 0$ است، لذا می توان نتیجه گرفت ،

- بردار سرعت متوسط ، همواره با بردار جابه جایی موازی است .
- بردار سرعت متوسط ، همواره با بردار جابه جایی هم جهت است .

⚠ **نکته :** بردار مکان ، تابع انتخاب دستگاه مختصات است ، ولی بردارهای جابه جایی و سرعت متوسط ، با تغییر دستگاه مختصات تغییر نمی نمایند .

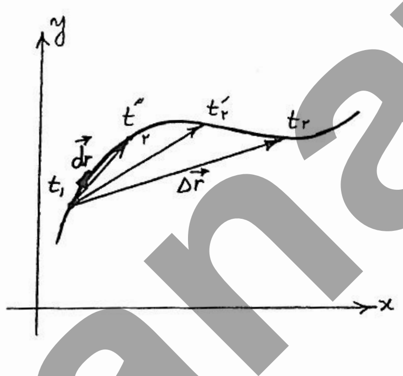


مثال ۸۵ - مطابق شکل، ذره‌ای در مدت ۲۰ s بر روی دایره‌ای به شعاع ۴m از نقطه‌ی A تا O جابه‌جا می‌شود. بردار سرعت متوسط ذره در این جابه‌جایی چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟

⚠ **نکته:** بردار سرعت متوسط در دستگاه مختصات دکارتی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\vec{\bar V}=\frac{\Delta \vec r}{\Delta t}=\frac{\Delta x\,\hat i+\Delta y\,\hat j}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\,\hat i+\frac{\Delta y}{\Delta t}\,\hat j=\bar V_x\,\hat i+\bar V_y\,\hat j$$

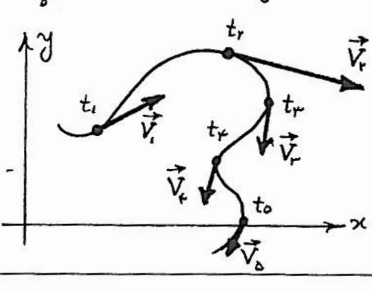
مثال ۸۶ - بردار مکان متحرکی در SI به صورت $\vec r=(2t+3)\hat i-t\hat j$ است. سرعت متوسط متحرک در دو ثانیه‌ی چهارم حرکت را تعیین نمایید.



بردار سرعت لحظه‌ای: اگر بازه‌ی زمانی اندازه‌گیری بردار سرعت متوسط را بسیار بسیار کوچک در نظر بگیریم، بردار $\vec{\bar V}$ تبدیل به بردار $\vec V$ (سرعت لحظه‌ای) می‌شود. یعنی می‌توان نوشت:

$$\vec V=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \vec r}{\Delta t}=\frac{d\vec r}{dt}$$

⚠ **نکته:** با کمی دقت معلوم می‌شود از آنجا که بردار $d\vec r$ برداری مماس بر مسیر حرکت است و بردار سرعت لحظه‌ای نیز با این بردار موازی و هم جهت است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت: بردار سرعت لحظه‌ای، برداری است مماس بر مسیر حرکت متحرک.



اندازه‌ی این بردار نیز، بستگی به اندازه‌ی سرعت متحرک دارد.

این مطلب بدان معنی است که: جسم همواره در جهت

سرعت لحظه ای خود حرکت می‌کند (نه در جهت نیروهای وارد بر آن!).

⚠ **نکته:** بردار سرعت لحظه ای را در دستگاه مختصات دکارتی، می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec V = \frac{d\vec r}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat i + y\hat j) = \frac{dx}{dt}\hat i + \frac{dy}{dt}\hat j = V_x\hat i + V_y\hat j$$

مثال ۸۷ - معادله‌ی حرکت متحرکی در SI به صورت $\vec r(t) = 8t^2\hat i + 6t^2\hat j$ است. در لحظه ای که سرعت متحرک ۶۰ m/s است، فاصله‌ی متحرک تا مبداء مکان چند متر است؟

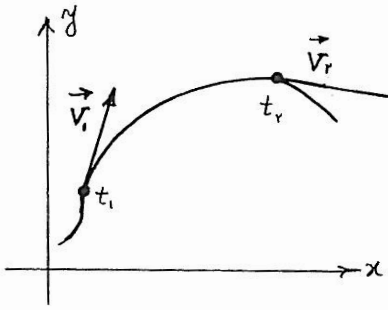
مثال ۸۸ - بردار مکان متحرکی در SI به صورت $\vec r = (\frac{1}{2}t^2 - 7t)\hat i + (-t^2 + 4t)\hat j$ است.

الف) در چند متری مبداء مکان، متحرک کمترین سرعت را دارد؟

ب) متحرک با چه سرعتی و با چه زاویه‌ای از روی محور x ها عبور می‌کند؟

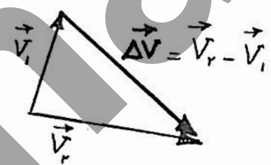
مثال ۸۹ - ذره‌ای روی مسیری با معادله‌ی $y = x^3$ در حال حرکت است. اگر اندازه‌ی سرعت ذره هنگام عبور از نقطه‌ی (۲ m , ۸ m) برابر $2\sqrt{10}$ m/s باشد، اندازه‌ی سرعت آن در راستای محور x ها، در آن نقطه چقدر است؟

مثال ۹۰- معادله‌ی مسیر ذره‌ای که در صفحه‌ی xoy حرکت می‌کند، در SI به صورت $y = x^2 - x$ است و جسم در لحظه‌ی $t = 0$ در مبدأ مکان بوده است. اگر مؤلفه‌ی افقی سرعت جسم ثابت و برابر $4\,m/s$ باشد، بردار سرعت جسم در لحظه‌ی $t = 2s$ را بدست آورید.



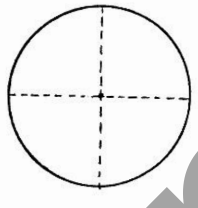
بُردار شتاب متوسّط : برطبق تعریف، شتاب متوسط یک متحرک در یک بازه‌ی زمانی دلخواه، عبارت است از تغییر سرعت متحرک، تقسیم بر بازه‌ی زمانی مورد نظر. یعنی،

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{t_2 - t_1}$$



⚠ **نکته :** در حرکت دوبعدی، شتاب می‌تواند اندازه‌ی سرعت و یا جهت سرعت (و یا هر دو را) تغییر دهد. بنابراین در اینجا اگر متحرکی با سرعت ثابت، روی مسیری منحنی حرکت نماید، از آنجا که جهت بردار سرعت تغییر می‌کند، حرکت شتاب‌دار خواهد بود!

مثال ۹۱- ذره‌ای روی دایره‌ای به شعاع $10\,cm$ با سرعت ثابت $2\,m/s$ حرکت می‌کند.



اندازه‌ی شتاب متوسط متحرک را در هر کدام از حالت‌های زیر بیابید.

الف) متحرک نصف دایره را پیموده است.

ب) متحرک $\frac{3}{4}$ کل مسیر را پیموده است.

بُردار شتاب لحظه‌ای: شبیه آنچه در مورد بردار سرعت لحظه‌ای بیان شد، اگر بازه‌ی زمانی اندازه‌گیری شتاب متوسط را بسیار بسیار کوچک در نظر بگیریم، بردار $\vec{\bar{a}}$ به بردار $\vec{a}$ (شتاب لحظه‌ای) تبدیل می‌شود. بنابراین:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

مثال ۹۲- بردار مکان متحرکی در SI به صورت $\vec{r} = (2t^2 - 6t + 5)\vec{i} + (-4t^2 + 12t + 9)\vec{j}$ است.

الف) بردار سرعت و شتاب متحرک را بیابید.

ب) در چه لحظه‌ای بردارهای سرعت و شتاب متحرک بر هم عمودند؟ در این لحظه فاصله‌ی متحرک از مبداء چند متر است؟

پ) در لحظه‌ی $t = 2s$ بردارهای سرعت و شتاب متحرک با یکدیگر چه زاویه‌ای می‌سازند؟

⚠ **نکته:** می‌توان نشان داد اگر در طول یک حرکت دو بعدی (یا سه بعدی) اگر بردار شتاب در تمامی لحظات بر بردار سرعت عمود باشد، اندازه‌ی سرعت متحرک تغییری نکند و برعکس. (یعنی اگر اندازه‌ی سرعت متحرک ثابت باشد، بردار سرعت و شتاب بر یکدیگر عمود هستند)

⚠ **نکته:** در حرکت دو بعدی (یا سه بعدی) اگر $\vec{a} \cdot \vec{V} > 0$ باشد، اندازه‌ی سرعت متحرک رو به افزایش است و حرکت را تندشونده می‌نامیم. همچنین اگر $\vec{a} \cdot \vec{V} < 0$ باشد، اندازه‌ی سرعت متحرک رو به کاهش است و حرکت را کندشونده می‌نامیم.

مثال ۹۳- بردار مکان متحرکی در SI به صورت $\vec{r} = (\frac{4}{3}t^3 - 4t)\vec{i} + (3t^2 - 10t + 7)\vec{j}$ است.

الف) در لحظه‌ای که اندازه‌ی شتاب متحرک $10\,m/s^2$ است، حرکت متحرک کندشونده است یا تندشونده؟

ب) در لحظه‌ی $t=2s$ حرکت تندشونده است یا کندشونده؟

نکته: حرکت دوبعدی در اصل ترکیب دو حرکت روی خط راست، یعنی محور x و محور y است، به گونه‌ای که این دو حرکت هیچ‌گونه تأثیری روی هم ندارند. مثلاً اگر سرعت افقی یا شتاب افقی متحرک تغییر کند، سرعت در راستای قائم آن هیچ تغییری نخواهد کرد. همچنین ممکن است سرعت متحرک در راستای افقی در حال کاهش و سرعت آن در راستای قائم در حال افزایش یا ... باشد. بنابراین می‌توان یک حرکت دوبعدی را به دو حرکت یک‌بعدی تبدیل و هر کدام را جداگانه بررسی کرد.

مثال ۹۴- شخصی با سرعت ثابت $60\,cm/s$ درون رودخانه‌ای شنا می‌کند، به گونه‌ای که راستای بدن او در هر لحظه بر کناره‌ی رودخانه عمود است. اگر عرض رودخانه $30\,m$ باشد، تعیین کنید طی کردن عرض رودخانه توسط این شناگر چه مدت طول می‌کشد؟

الف) آب رودخانه ساکن باشد.

ب) آب رودخانه با سرعت $80\,cm/s$ جریان داشته باشد. در این حالت، شخص چند متر جابه‌جا شده است؟

مثال ۹۵- قایقرانی می‌خواهد با قایق خود که سرعتش نسبت به آب ساکن $13\,m/s$ است، عرض رودخانه‌ی ۱۲۰ متری را به گونه‌ای طی کند که درست به نقطه‌ی مقابل خود برسد. اگر سرعت جریان آب $5\,m/s$ باشد،

الف) چه مدت طول می‌کشد تا شخص به سمت دیگر رودخانه برسد؟

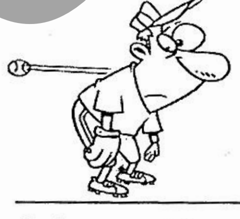
ب) قایق باید با چه زاویه‌ای باید جهت‌گیری کند؟

مثال ۹۶- چتربازی با سرعت ثابت $8\,m/s$ با چترباز، به طور قائم به طرف سطح زمین در حرکت است. در لحظه ای که او در فاصله‌ی H از زمین قرار دارد، باد به طور افقی با سرعت $6\,m/s$ می وزد و تا هنگام رسیدن چترباز به زمین، وی را $30\,m$ از خط قائم، به طور افقی دور می کند.

الف) H چند متر است؟

ب) شخص با چه سرعتی به زمین می رسد؟

مثال ۹۷- شخصی به کمک کمان خود، تیری را به سمت نشانه ای که دقیقاً مقابل او و در فاصله‌ی ۶۰ متری وی قرار دارد پرتاب می کند. اگر سرعت حرکت تیر $120\,m/s$ باشد، تیر چند سانتی متر پایین‌تر از هدف، به نشانه برخورد می کند؟

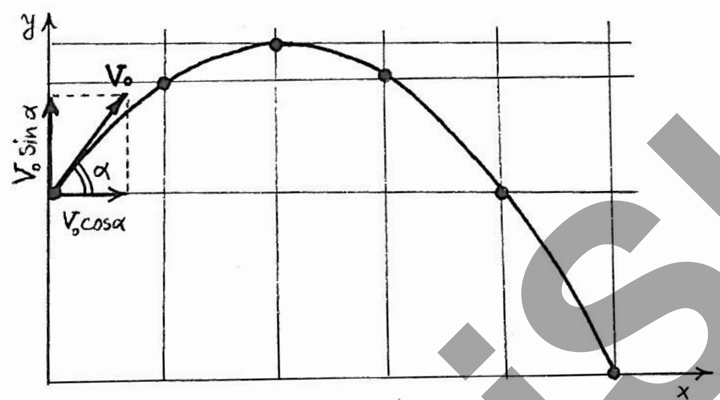


حرکت پرتابی

یکی از حالت‌های خاص حرکت دوبعدی، حالتی است که در آن متحرکی را از ارتفاع مشخصی با سرعت اولیه، تحت زاویه‌ی دلخواهی نسبت به راستای افق، پرتاب می‌کنیم. اگر بتوان از مقاومت هوا صرف‌نظر کرد، تنها نیروی وارد بر جسم، نیروی وزن است. این حرکت را اصطلاحاً «حرکت پرتابی» می‌نامیم و در ادامه به بررسی آن می‌پردازیم.

در اینجا نیز شبیه سایر حرکت‌های دوبعدی، می‌توان حرکت در راستای محور x ها و راستای محور y ها را به طور کاملاً مستقل تحلیل کرد. از آنجا که تنها نیروی وارد بر جسم، وزن جسم است، متحرک در طول حرکت خود، فقط شتاب عمودی دارد. یعنی:

$$a_x = 0 \quad ; \quad a_y = g \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = -g\,\hat{j}$$



در رابطه‌ی اخیر، جهت مثبت محور y ها را به سمت بالا فرض کرده‌ایم.

با توجه به آنکه شتاب افقی متحرک صفر است ($a_x = 0$) بنابراین می‌توان حرکت در راستای افقی را یک حرکت یکنواخت در نظر گرفت که از مبدأ محور x ها شروع به حرکت کرده است.

همچنین حرکت روی محور عمودی، یک حرکت با شتاب ثابت (حرکت سقوط آزاد) است و تمامی معادلات حرکت با شتاب ثابت برای آن برقرار است، یعنی داریم:

$$\left.\begin{array}{l} V_{0x} = V_0 \cos\alpha \\ V_{0y} = V_0 \sin\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{V_0} = V_0 \cos\alpha\,\hat{i} + V_0 \sin\alpha\,\hat{j}$$

همچنین می‌توان سرعت متحرک در هر لحظه را به صورت زیر به دست آوریم:

$$\begin{array}{l} V_x = V_0 \cos\alpha \\ V_y = -gt + V_0 \sin\alpha \end{array} \quad ; \quad \vec{V} = V_x\,\hat{i} + V_y\,\hat{j} \quad ; \quad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

نکته: می‌دانیم بردار سرعت متحرک در هر لحظه بر مسیر حرکت ذره مماس است. بنابراین می‌توانیم زاویه‌ای که متحرک در هر نقطه از مسیر حرکت، ضمن حرکت، با راستای مثبت محور x ها می‌سازد را از رابطه‌ی زیر تعیین کنیم:

$$\tan\theta = \frac{V_y}{V_x}$$

مثال ۹۸ - گلوله ای در شرایط خلاء با سرعت اولیه ی $20\,m/s$ تحت زاویه ی 37° بالای افق پرتاب می شود.

الف) سرعت گلوله در نقطه ی اوج آن چقدر است؟

ب) سرعت گلوله ۲ ثانیه پس از پرتاب چند متر بر ثانیه می شود؟

پ) متحرک در لحظه ی $t=1.6\,s$ با راستای افق چه زاویه ای می سازد؟

معادلات حرکت پرتابه:

با توجه به آنچه گفته شد، می توان معادلات مکان - زمان را برای پرتابه نوشت،

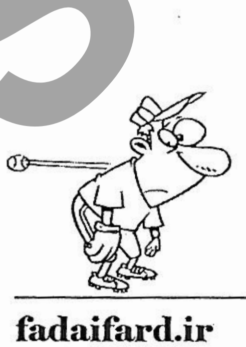
$$x = V_0 \cos\alpha . t$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \sin\alpha . t + y_0 \quad ; \quad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \quad ; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

مثال ۹۹ - از ارتفاع ۳۵ متری سطح زمین، گلوله ای را با سرعت اولیه ی $60\,m/s$ با زاویه ی 30° نسبت به افق به طرف بالا پرتاب می کنیم. اگر بتوان از مقاومت هوا چشم پوشی کرد،

الف) گلوله قبل از برخورد به زمین چه مدت در حرکت بوده است؟

ب) جابه جایی گلوله در طول حرکت چند متر است؟



مثال ۱۰۰- جسمی در شرایط خلاء، تحت زاویه‌ی α بالای افق پرتاب می شود. اگر بردار سرعت اولیه ی پرتاب $\vec{V_0} = 10\hat{i} + 10\sqrt{3}\hat{j}$ باشد (سرعت برحسب متر بر ثانیه است)، مطلوبست:

الف) زاویه‌ی پرتاب با راستای افق (α).

ب) سرعت متحرک در لحظه ی $t=2\sqrt{3}s$.

پ) شتاب متحرک در لحظه ی $t=2s$.

ت) تغییر بردار سرعت متحرک در ثانیه‌ی سوم حرکت.

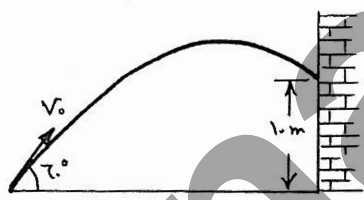
⚠ **نکته:** تمام روابط مربوط به سقوط آزاد را می توان برای مولفه‌ی عمودی حرکت به کار برد. یعنی می توان نوشت:

$V_y^2 - V_0^2\sin^2\alpha = -2g\,\Delta y$: معادله‌ی مستقل از زمان

$\Delta y = \frac{V_{1y} + V_{2y}}{2}\Delta t$: معادله‌ی مستقل از شتاب

$\Delta y_n = -g(n-0/5) + V_0\sin\alpha$: جابه جایی در ثانیه‌ی nام

مثال ۱۰۱- مطابق شکل از سطح زمین گلوله ی کوچکی با سرعت اولیه‌ی V_0 تحت زاویه‌ی 60° بالای افق پرتاب می شود و با زاویه‌ی 45°، به ارتفاع ۱۰ متری دیوار مقابل آن برخورد می کند.



الف) سرعت اولیه‌ی پرتاب چند متر بر ثانیه است؟

ب) زمان حرکت گلوله و فاصله‌ی دیوار تا محل پرتاب گلوله را تعیین کنید.

مثال ۱.۲- گلوله‌ی کوچکی از ارتفاع ۳۰ متری سطح زمین با سرعت اولیه‌ی $20\ m/s$ با زاویه‌ی 53° بالای افق پرتاب می‌شود.

الف) این گلوله پس از چه مدت به زمین می‌رسد؟

ب) این گلوله در ثانیه‌ی سوم حرکت چند متر جابه‌جا شده است؟

⚠ **نکته:** حداقل سرعت متحرک در حرکت پرتابی، مربوط به نقطه‌ی اوج آن است و در این صورت داریم:

$$V_{\text{اوج}} = V_{min} = V_{0x} = V_0 \cos\alpha \qquad \vec{V}_{\text{اوج}} = V_0 \cos\alpha \,.\, \hat{i}$$

همچنین با توجه به آنکه در این لحظه، $V_y = 0$ است، می‌توان نوشت:

$$t_{\text{اوج}} = \frac{V_0 \sin\alpha}{g} \qquad y_{\text{اوج}} = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g} + y_0$$

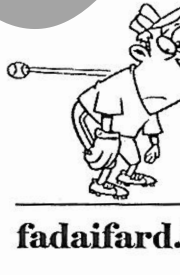
مثال ۱.۳- گلوله‌ای از ارتفاع ۱۰ متری سطح زمین به طرف بالا پرتاب می‌شود و حداقل سرعت آن در طول حرکت $8\ m/s$ می‌شود. اگر ارتفاع اوج گلوله از سطح زمین $11{,}8\ m$ باشد،

الف) سرعت اولیه و زاویه‌ی پرتاب را بیابید.

ب) زمان کل حرکت چند ثانیه است؟

⚠ **نکته:** در حرکت پرتابی، بیشترین مقدار x، یعنی بیشترین مقدار پیشروی جسم در راستای محور x ها را بُرد می‌نامند و معمولاً آن را با R نمایش می‌دهند.

اگر زمان کل حرکت را t فرض کنیم، در این صورت می‌توان نوشت:

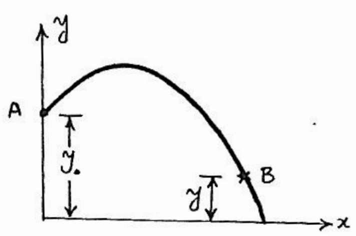


$$R = x_{max} = V_0 \cos\alpha \,.\, t$$

مثال ۱۰۴ـ گلوله‌ی کوچکی از ارتفاع ۲۵ متری سطح زمین با سرعت ۴۰ متر بر ثانیه و زاویه‌ی 30° بالای افق پرتاب می‌شود.

الف) گلوله پس از چه مدت به زمین می‌رسد؟

ب) برد پرتابه چند متر است؟



نکته: اندازه‌ی سرعت متحرک در طول حرکت را می‌توان به کمک قانون پایستگی انرژی نیز تعیین کرد:

$$E_A = E_B \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 + mgy_0 = \frac{1}{2} m v^2 + mgy$$

$$\Rightarrow v_0^2 + 2gy_0 = v^2 + 2gy$$

$$\Rightarrow v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0) \Rightarrow v^2 = v_0^2 - 2g\Delta y$$

نکته: انرژی جنبشی ذره در نقطه‌ی اوج، کمترین مقدار در طول حرکت است و داریم:

$$K_{min} = K_{\text{اوج}} = \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2\alpha$$

مثال ۱۰۵ـ گلوله‌ای از ارتفاع ۵ متری سطح زمین با سرعت $20\,m/s$ و زاویه‌ی 53° بالای افق پرتاب می‌شود.

الف) سرعت گلوله در ارتفاع ۱۰ متری زمین چقدر است؟

ب) گلوله با چه سرعتی به زمین برخورد می‌کند؟

مثال ۱۰۶ـ گلوله‌ای از سطح زمین تحت زاویه‌ی α پرتاب می‌شود. اگر انرژی جنبشی گلوله در نقطه‌ی اوج، نصف انرژی جنبشی گلوله در نقطه‌ی پرتاب باشد، زاویه‌ی پرتاب (α) چند درجه است؟

مثال ۱۰۷- از نقطه ای در ارتفاع h از سطح زمین گلوله‌ای با سرعت $10\,m/s$، تحت زاویه‌ی 60° بالای افق پرتاب می‌شود. اگر از مقاومت هوا صرف‌نظر کنیم و گلوله با سرعت $20\,m/s$ به زمین برخورد کند،

الف) ارتفاع h را بیابید.

ب) گلوله قبل از برخورد به زمین چه مدت در راه بوده است؟

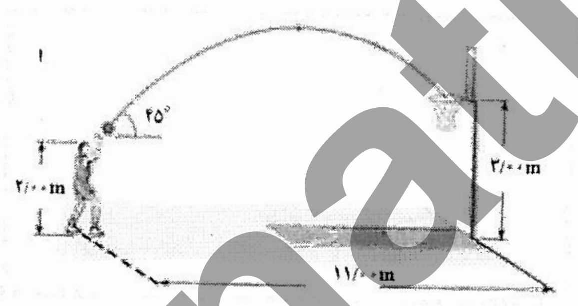
معادله‌ی مسیر حرکت پرتابی:

می‌دانیم برای به دست آوردن معادله‌ی مسیر در حرکت دو بعدی کافی است پارامتر زمان را بین معادلات مکان-زمان حذف نماییم. پس:

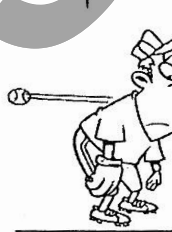
$$\left.\begin{array}{l} x = V_0 \cos\alpha \, t \Rightarrow t = \dfrac{x}{V_0 \cos\alpha} \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \sin\alpha \, t + y_0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2\alpha} + x \tan\alpha + y_0$$

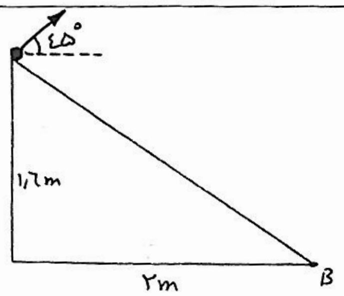
همانگونه که مشاهده می‌شود، مسیر حرکت پرتابه، یک سهمی وارونه است. بنابراین در حل مسائل حرکت پرتابه می‌توان از تمام ویژگی‌های سهمی که در درس ریاضی خوانده‌ایم، استفاده کرد.

مثال ۱۰۸- در شکل مقابل، ورزشکار توپ را با چه سرعتی پرتاب کند تا توپ داخل سبد بیفتد؟

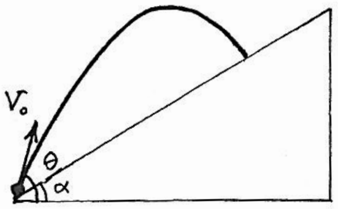


مثال ۱۰۹- جسمی را از بالای برجی به ارتفاع $40\,m$ با زاویه‌ی 30° نسبت به افق به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. اگر سرعت اولیه‌ی پرتاب $20\,m/s$ باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد آن با زمین، تا پای برج چند متر است؟



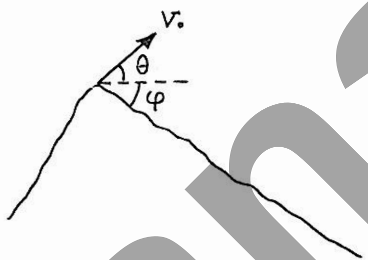


مثال ۱۱۰- مطابق شکل از بالای سطح شیبداری، در شرایط خلاء، گلوله ای تحت زاویه ی ۴۵° با افق پرتاب می شود. سرعت اولیه ی پرتاب چقدر باشد تا گلوله درست به پایین سطح شیبدار (نقطه ی B) برخورد کند؟

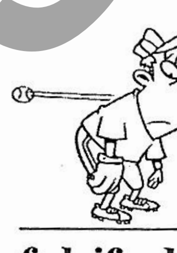


مثال ۱۱۱- مطابق شکل گلوله ای از پایین سطح شیبداری با زاویه ی شیب θ، تحت زاویه ی α نسبت به راستای افق پرتاب می شود. فاصله ی نقطه ی برخورد گلوله با سطح شیبدار تا پایین سطح را بیابید.

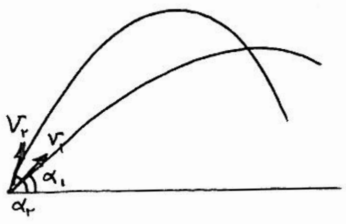
$$R = \frac{2V_0^2\cos^2\theta}{g\cos\alpha}.(\tan\theta - \tan\alpha)$$



مثال ۱۱۲- مطابق شکل، پسربچه ای در بالای تپه ای ایستاده است. این تپه دارای شیب یکنواخت با زاویه ی φ به طرف پایین است. او با چه زاویه ای نسبت به افق (θ) باید سنگی را پرتاب کند تا در دورترین نقطه سطح شیبدار را قطع نماید؟



نکته: اگر دو گلوله با سرعت های اولیه ی V_1 و V_2 به ترتیب با زاویه های α_1 و α_2 بالای افق $(\alpha_2 > \alpha_1)$ در شرایط خلاء پرتاب شوند، برای آنکه با یکدیگر برخورد نمایند، بازه ی زمانی پرتاب دو گلوله از رابطه ی زیر بدست می آید!



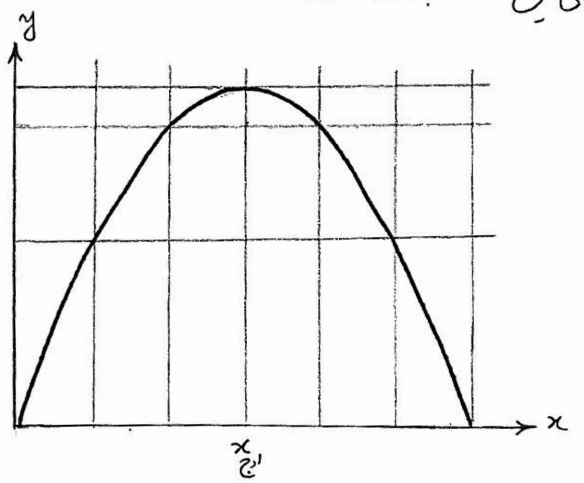
$$\Delta t = \frac{2V_1 V_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{g(V_1 \cos\alpha_1 + V_2 \cos\alpha_2)}$$

مثال ۱۱۳- نکته ی بالا را ثابت کنید.

مثال ۱۱۴- گلوله های A و B را به ترتیب با سرعت های اولیه ی $10\sqrt{2}\ m/s$ و $5\sqrt{3}\ m/s$، تحت زاویه های 45° و 60° به طرف بالا پرتاب می کنیم. بازه ی زمانی میان پرتاب به ها چقدر باشد تا دو گلوله در هوا به هم برخورد نمایند؟ $(\sin 15^\circ \simeq 0/25)$

بررسی حالت های خاص :

حرکت پرتابه را می توان در حالت های خاص زیر بررسی کرد و روابط خاصی برای این حالت ها به دست آورد :



الف) پرتابه ی افق به افق ($y_0 = 0$)

تمام روابطی که در مورد حرکت پرتابی گفته شد، با اعمال شرط $y_0 = 0$، به روابط حرکت پرتابه ی افق به افق تبدیل می شود.

بنابراین می توان نوشت :

$$t_{کل حرکت} = 2t_{اوج} = 2\frac{V_0 \sin\alpha}{g}$$

$$y_{اوج} = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

⚠ **نکته :** در پرتابه ی افق به افق، حداکثر میزان پیشروی جسم در راستای افق - که به آن اصطلاحاً بُرد پرتابه گفته می شود - از رابطه ی زیر بدست می آید :

$$R_{برد پرتابه} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

و با توجه به متقارن بودن مسیر حرکت می توان نتیجه گرفت :

$$x_{اوج} = \frac{1}{2}R = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

⚠ **نکته :** در پرتابه ی افق به افق، می توان برد پرتابه را از رابطه ی زیر نیز به دست آورد.

$$R = \frac{2V_{0x} \cdot V_{0y}}{g}$$

⚠ **نکته :** اگر برد پرتابه ی افق به افق را با R و ارتفاع اوج را با H نمایش دهیم، داریم :

$$\frac{H}{R} = \frac{1}{4}\tan\alpha$$

مثال ۱۱۵ - روابط بالا را اثبات کنید.

⚠ نکته: در حرکت پرتابی افق به افق، اگر سرعت اولیه ثابت باشد، ...

✓ بیشترین برد زمانی اتفاق می‌افتد که پرتابه با زاویه‌ی 45° پرتاب شده باشد.

✓ زاویه‌های متمم دارای بردهای یکسانی هستند.

$$\alpha+\beta=90^\circ \Rightarrow R_\alpha=R_\beta$$

✓ برای زاویه‌های پرتابی که به یک اندازه از زاویه‌ی 45° بیشتر یا کمترند، بردها مساوی هستند.

مثال ۱۱۶- نکته‌های بالا را ثابت کنید.

مثال ۱۱۷- از سطح زمین گلوله‌ای را با زاویه‌ی α و با سرعت اولیه‌ی V_0 به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. اگر سرعت گلوله در نقطه‌ی اوج $\frac{V_0}{2}$ و برد آن $20\sqrt{3}\,m$ باشد،

الف) α چند درجه است؟

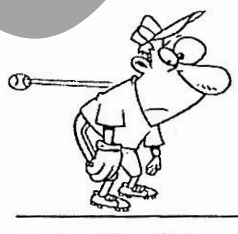
ب) گلوله تا رسیدن به زمین چه مدت در راه بوده است؟

پ) ارتفاع اوج گلوله چند متر است؟

مثال ۱۱۸- از سطح زمین دو گلوله یکی تحت زاویه‌ی 15° و با سرعت اولیه‌ی V_1 و دیگری تحت زاویه‌ی 45° و با سرعت اولیه‌ی V_2 پرتاب می‌شوند. اگر برد دو گلوله برابر باشد،

الف) نسبت $\frac{V_1}{V_2}$ را بیابید.

ب) نسبت ارتفاع اوج گلوله‌ی اول به دوم را تعیین کنید.



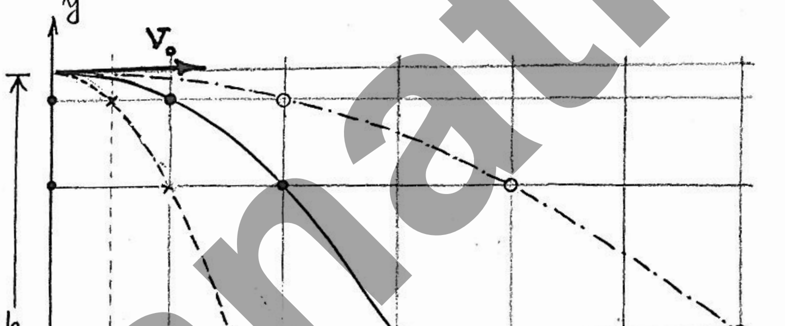
مثال ۱۱۹ـ معادله های حرکت پرتابه ای در SI به صورت $x=10t$ و $y=-5t^2+20t$ است.

الف) سرعت اولیه ی پرتابه و زاویه ی پرتاب را بیابید.

ب) برد و ارتفاع اوج آن را تعیین کنید.

پ) فاصله ی افقی دو وضعیتی که در آنها جسم در ارتفاع ۱۵ متری قرار دارد، چند متر است؟

مثال ۱۲۰ـ معادله ی مسیر پرتابه ای در SI به صورت $y=-\frac{1}{16}x^2+\frac{4}{3}x$ است. متحرک با چه سرعتی از ارتفاع ۵ متری سطح زمین می گذرد؟



ب) پرتابه ی افقی ($\alpha=0$)

تمامی روابط حرکت پرتابه ای با شرط $\alpha=0$، در اینجا به کار می رود.

به ویژه توجه به این نکته بسیار ضروری و مفید است که حرکت پرتابه در راستای عمودی، یک حرکت سقوط آزاد بدون سرعت اولیه است. یعنی:

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+y$$

و همچنین برای حرکت یکنواخت در راستای افق داریم:

$$x=V_0 t$$

⚠ **نکته:** در حرکت پرتابی افقی، زمان حرکت متحرک از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$t_{\text{کل حرکت}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

همانگونه که مشاهده می‌شود، این رابطه مستقل از سرعت اولیه‌ی پرتاب است.

⚠ **نکته:** برد پرتابه در این حالت از رابطه‌ی مقابل تعیین می‌شود:

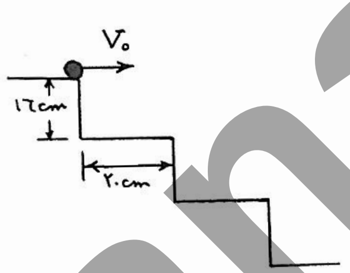
$$R = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot V_0$$

مثال ۱۲۱- یک پرتابه‌ی افقی با سرعت V_0 در شرایط خلاء از ارتفاع ۴۵ متری سطح زمین پرتاب می‌شود.

الف) گلوله چه مدت در راه است؟

ب) اگر در یک نقطه از مسیر، بردار سرعت و شتاب با هم زاویه‌ی 30° بسازند و اندازه‌ی سرعت پرتابه در آن نقطه $20\ m/s$ باشد، V_0 را تعیین کنید.

پ) برد پرتابه چند متر است؟



مثال ۱۲۲- مطابق شکل، گلوله‌ای از بالای پلکانی که ارتفاع هر پله‌ی آن ۱۶cm و عرض هر پله ۲۰cm است، با سرعت $1.6\ m/s$ به طور افقی پرتاب می‌شود. حساب کنید اولین بار به کدام پله برخورد می‌کند؟