مهربان خدایم

وقتی دلم ناآرام است

می‌دانم جایی از زندگی فراموشت کرده‌ام

نیازمندم به تو

به نگاهت به توجهت به مهربانیت

من جز تو کسی را ندارم و جز تو هیچ‌کس و هیچ‌چیز آرامم نمی‌کند

همیشه یار و پناهم باش

موفق باشید

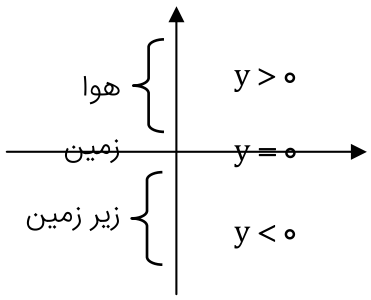
مهدی امینی‌راد

فهرست

۱	درسنامه	۱
۲	تست‌های تابع	۲۷
۳	تست‌های مثلثات	۵۴
۴	تست‌های حد	۷۲
۵	تست‌های مشتق	۸۶
۶	۲ نمونه آزمون تستی برای آمادگی آزمون‌های کشوری دی‌ماه	۸۸
۷	نمونه سوال تشریحی ویژه آزمون دی‌ماه	۱۱۱
۸	مثال‌ها و تمارین کتاب	۱۲۰
۹	جزوه محاسبات	۱۴۱
۱۰	پیوست	۱۴۷

فصل اول: تابع

قسمت اول: تعیین علامت



۱- تعیین علامت معادله درجه اول

$y = ax + b$

$y = 0 \rightarrow ax + b = 0 \rightarrow x = \dfrac{-b}{a}$ (ریشه)

نکته: درتعیین علامت حواسمون به علامت a باشه ☺

x		x	
p	مخالف علامت a	∘	موافق علامت a

۲- تعیین علامت معادله درجه دوم

$y = ax^2 + bx + c$

۱) $\Delta > 0 \rightarrow$ ۲ ریشه متمایز

x		x_1		x_2	
P	موافق علامت a	∘	مخالف علامت a	∘	موافق علامت a

۲) $\Delta = 0 \rightarrow$ ۱ ریشه مضاعف

x		$x_1 = x_2$	
P	موافق علامت a	∘	موافق علامت a

۳) $\Delta \rightarrow$ ۰ریشه

x	$-\infty$		$+\infty$
P		همواره موافق علامت a	

* تعیین علامت به روش ریشه‌های زوج و فرد:

$$P = \frac{(x-1)^2 |x-5|}{x^2 - 16}$$

$(x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$ ریشه زوج

$|x-5| = 0 \rightarrow x = 5$ ریشه زوج

سوال

ریشه‌ی زوج چیه!!!؟؟

عزیزم اگر کل عبارت داخل قدر مطلق یا داخل پرانتز با توان زوج باشد ریشه زوج تولید می‌کند.

$x^{۲}-۱۶=۰ \rightarrow x=\pm ۴$

	ف		ز		ف		ز	کمکی	
$-\infty$	-۴		۱		۴		۵	$+۶$	$+\infty$
+	∞	−	۰	−	∞	+	۰	+	

نکته : حواسمون به ریشه‌های مخرج باشه که غیر قابل قبول هستند.

روش محاسبه : یه عدد کمکی اینجا $(x=۶)$ را داخل سوال انداختیم حاصل مثبت شد بعد اگر به ریشه زوج رسیدیم علامت عوض نمی‌شه اما اگر به ریشه فرد برخورد کردیم علامت عوض می‌شه به همین راحتی (گلابی!!)

نکته : تعیین علامت در قسمت‌های زیادی استفاده میشه مثل تعیین دامنه و حل نا معادلات و ...

(قسمت دوم تابع) معادله و تابع درجه دوم

۱- رسم تابع درجه دوم:

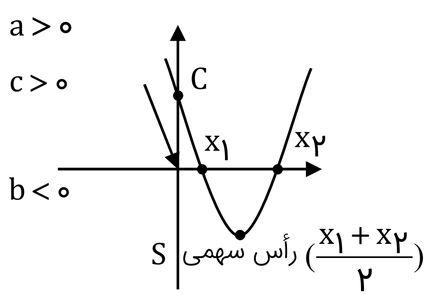
$y=ax^{۲}+bx+c$

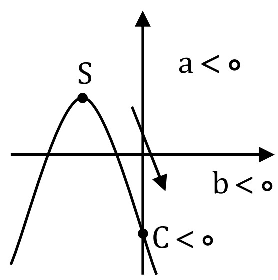
قدم اول $\rightarrow a = x^{۲}$ ضریب $\rightarrow$ $\begin{cases} a>۰ \ \cup \ \text{(دسته‌ها روبه بالا)} \\ a<۰ \ \cap \ \text{(دسته‌ها روبه پایین)} \end{cases}$

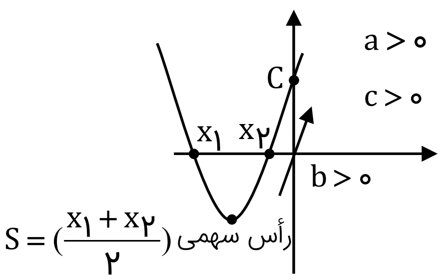
قدم دوم $\rightarrow b = x$ ضریب $\rightarrow x=\dfrac{-b}{۲a}$ (رأس سهمی)

قدم سوم $\rightarrow c =$ ضریب ثابت $\rightarrow$ همیشه روی محور y ها

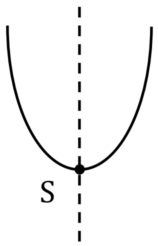
روش تستی برای تشخیص جهت b از چپ به راست به نقطه C نزدیک شو اگر سربالایی رفتی $b>۰$ اگر سرپایینی رفتی $b<۰$.







نکته: نقطه رأس سهمی یا (S)



$$S\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{-b}{2a} \\ y=f(x)=\dfrac{-\Delta}{4a}\end{array}\right.$$

محور تقارن سهمی = (طول رأس سهمی)

(عرض رأس سهمی)

---

۲. حل معادله درجه دوم (بدست آوردن ریشه‌ها)

برای حل معادله درجه دوم راه‌های زیادی وجود دارد.

از جمله استفاده از Δ ، استفاده از اتحاد و تجزیه، استفاده از روش هندسی .

روش دلتا:

$$\Delta=b^2-4ac\rightarrow\left|\begin{array}{l}\Delta>0\rightarrow x_1,x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta=0\rightarrow x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a} \\ \Delta<0\rightarrow x_1,x_2 \text{ ندارد}\end{array}\right.$$

۲ ریشه متمایز

۱ ریشه مضاعف (مماس)

بدون ریشه

استفاده از اتحاد و تجزیه: این قسمت رو اکثر عزیزان اطلاعات کافی دارند و فقط چند مثال می‌زنم.

۱) $x^2+5x+6=0$

$$(x+2)(x+3)=0\rightarrow\left|\begin{array}{l}x=-2\\x=-3\end{array}\right.$$

۲) $2x^2-5x+2=0\xrightarrow{\text{روش تستی به‌جای روش A}}2x^2-5x+2=0$

$$x^2-5x+4=0\rightarrow(x-1)(x-4)=0$$

$$\rightarrow(2x-1)(x-\frac{4}{2})=0\rightarrow\left|\begin{array}{l}2x-1=0\rightarrow x=\dfrac{1}{2}\\x-2=0\rightarrow x=2\end{array}\right.$$

۳) $3x^2-2x-8=0\xrightarrow{\text{روش تستی به‌جای روش A}}3x^2-2x-8=0$

$$x^2-2x-24=0\rightarrow(x-6)(x+4)=0$$

$$(3x+4)(x-\frac{6}{3})=0\rightarrow\left|\begin{array}{l}3x+4=0\rightarrow x=-\dfrac{4}{3}\\x-2=0\rightarrow x=2\end{array}\right.$$

۳ـ روابط بین ریشه‌های معادله درجه دوم

نکته:

$$*S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$*P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

$$*d = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$$

$$x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS$$

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$$

۴ـ نوشتن معادله از روی ریشه‌ها:

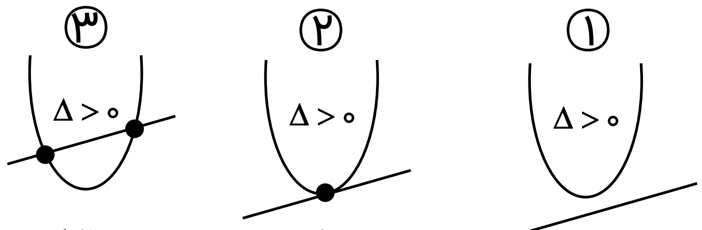
* نوشتن معادله با داشتن S و P $\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$

* اگر α و β ریشه‌های متمایز معادله باشند $\boxed{K(x-\alpha)(x-\beta) = 0}$

* معادله با ریشه مضاعف (تکراری) مانند α $\boxed{K(x-\alpha)^2 = 0}$

نکته: هنگامی معادله ریشه مضاعف دارد که $\Delta = 0$ باشد.

۵ـ وضعیت نسبی خط و صفحه:



بدون برخورد — مماس — متقاطع

مثلاً تو سوال مطرح میشه: خط به معادله‌ی $y = m + 4$ با منحنی به معادله‌ی $y = -x^2 + 2x$ هیچ نقطه مشترک ندارند، خب بچه‌ها این یعنی چی!!!!؟ یعنی اگر این منحنی و خط را مساوی هم قرار بدیم $\Delta < 0$ میشه.

۶ـ تحلیل علامت ریشه‌ها با S و P :

$$\Delta > 0 \rightarrow \begin{cases} S > 0 \text{ و } P > 0 \rightarrow \text{هر دو ریشه مثبت} \\ S < 0 \text{ و } P > 0 \rightarrow \text{هر دو ریشه منفی} \end{cases}$$

و مدل‌های دیگر: عزیزم کمی فکر کن و برای خودت مثال بزن، راحت به جواب می‌رسی. مثلاً اگر جمع ریشه‌ها مثبت و ضرب ریشه‌ها مثبت یعنی هر دو مثبت دیگه !!!

۷. دو حالت مهم برای یافتن سریع جواب در معادلات درجه دوم:

$y = ax^{۲} + bx + c$

$۱)\ a + b + c = ۰ \rightarrow x_{۱} = ۱ \ ,\ x_{۲} = \frac{c}{a}$

$۲)\ a + c = b \rightarrow x_{۱} = -۱ \ ,\ x_{۲} = \frac{-c}{a}$

---

۸. حل معادلات به فرم $a\bigcirc^{۲} + b\bigcirc + c = ۰$

مثال: مجموع ریشه‌های حقیقی $(x^{۲} + x)^{۲} - ۱۸(x^{۲} + x) + ۷۲ = ۰$

حل: اینجا دایره ما $(x^{۲} + x)$ هستش

$x^{۲} + x = t$

$t^{۲} - ۱۸t + ۷۲ = ۰ \rightarrow (t-۶)(t-۱۲) = ۰ \qquad t = ۶ \ ,\ t = ۱۲$

$x^{۲} + x = ۱۲ \rightarrow x^{۲} + x - ۱۲ = ۰ \rightarrow S = \frac{-b}{a} = \frac{-۱}{۱} = -۱ \rightarrow$ مماس $= -۱ - ۱ = -۲$

$x^{۲} + x = ۶ \rightarrow x^{۲} + x - ۶ = ۰ \rightarrow S = \frac{-b}{a} = \frac{-۱}{۱} = -۱$

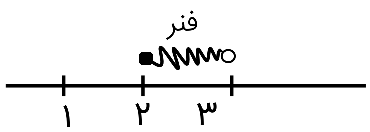
تابع جزء صحیح: (براکت)

$[x] = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{عدد صحیح سمت چپ} & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

معادلات و نامعادلات جزء صحیح

$۱)\ [x] = n \longrightarrow n \le x < n+۱$

مثال: $[x] = ۲ \longrightarrow ۲ \le x < ۳$



$۲)\ [x] \le n \longrightarrow x \ge n$

$۳)\ [x] \le n \longrightarrow x < n+۱$

ویژگی‌های جزء صحیح :

$۱)\ [x+k] = [x] + k$ اگر k عدد صحیحی باشد از براکت خراج می‌شود.

$۲)\ [x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & x \in \mathbb{Z} \\ -۱ & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

۳) $\underbrace{0 \le x-[x]}_{\text{جزء اعشاری}} < 1 \xrightarrow{\text{یا}} [x] \le x \le [x]+1$

نکته: ☁ می‌تواند هر عبارتی باشد.

$0 \le$ ☁ $-[$ ☁ $] < 1$

نمودار توابع جزءصحیح :

$y = a[bx]$

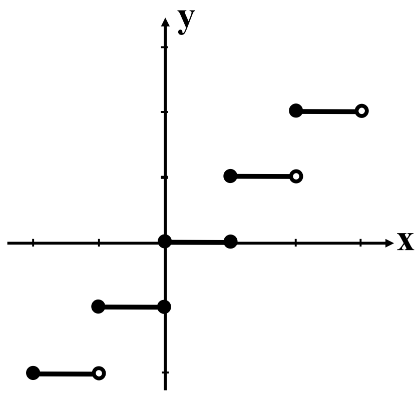
طول پله $= \dfrac{1}{b}$ طول نقطه ناپیوستگی $\Rightarrow bx = k \Rightarrow x = \dfrac{k}{b}$

فاصله عرضی $= a$

چند نمودار مهم توابع جزء صحیح:

۱)

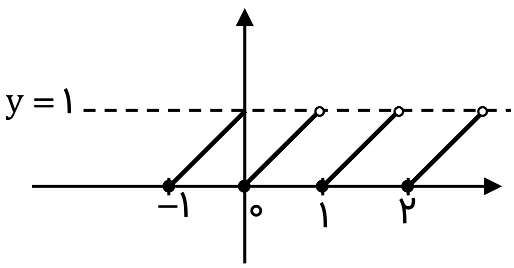
$y = [x]$



در این نمودار همیشه نقاط سمت چپ پاره خط‌ها توپر و شکل تابع شبیه پله است و طول هر پله نیز ۱ است.

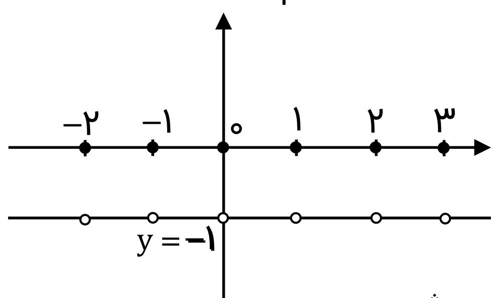
۲)

$y = x - [x]$



۳)

$y = [x] + [-x]$



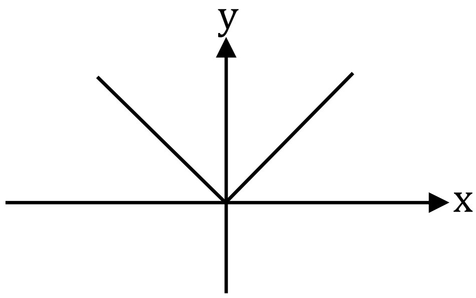
در این نمودار به ازای اعداد صحیح صفر و به ازای بقیه ۱- می‌شود.

قدر مطلق:

تعریف:

$$|\square| = \begin{cases} \square & \square \geq 0 \quad \text{ذات مثبت} \\ -\square & \square < 0 \quad \text{ذات منفی} \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} +x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



چند ویژگی ساده قدر مطلق:

۱) $|a| \geq 0$

۲) $|a| = |-a|$

۳) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

۴) $|ab| = |a||b|$

معادلات قدر مطلق:

۱) $|f(x)| = a \xrightarrow{a \geq 0} f(x) = \pm a$ (با شرط)

۲) $|f(x)| = |g(x)| \longrightarrow f(x) = \pm g(x)$ (بدون هیچ قیدوشرطی)

نامعادلات قدر مطلق:

۱) $|f(x)| < a \xrightarrow{a > 0} -a \leq f(x) \leq +a$

۲) $|f(x)| > a \xrightarrow{a > 0} \begin{cases} f(x) > a \\ a(x) < -a \end{cases}$

نکته : برای نامعادلات بالا: $\Leftarrow$
۱) $a < 0 \leftarrow$ با معنی است.
۲) $a > 0$ همیشه برقرار است.

۳) $|f(x)| < |a| \longrightarrow x^2 < a^2$

$(x^2 - a^2) < 0 \rightarrow (x-a)(x+a) < 0$ به روش اتحاد مزوج حل می‌کنیم.

نا مساوی مثلثی:

۱) $|a+b| \le |a| + |b|$

اگر $ab < 0$ (مختلف العلامه) باشد علامت نامساوی برقرار است و اگر $ab > 0$ (متحدالعلامه) علامت مساوی برقرار است.

تابع یك به یك و تابع معکوس

تابع یک به یک : تابعی که در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی، مؤلفه‌ی دوم تکراری نداشته باشند، البته حواسمان باشد که خود زوج مرتب باید تابع باشد.

بررسی یک به یک بودن از روی نمودار : هر خطی موازی محور x ها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

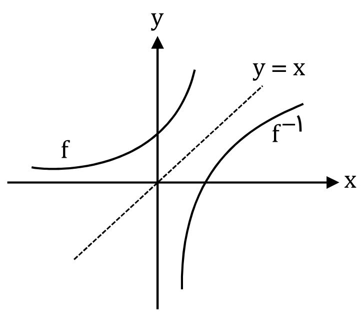
نکته : تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی (یکنوا) یك به یك است.

نکته : تابعی وارون‌پذیر است که یك به یك باشد (اگر f یك به یك باشد، f^{-1} تابع خواهد بود)

پیداکردن تابع وارون

۱ـ **زوج مرتب :** کافی است که جای مؤلفه‌های اول و دوم یعنی x و y را عوض کنیم.

۲ـ **نمودار :** نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه می‌کنیم.



$$f(a) = b \to f^{-1}(b) = a$$

۳ـ **ضابطه :** برای یافتن ضابطه‌های تابع وارون از روی ضابطه ۲ روش وجود دارد.

روش اول : ابتدا x را برحسب y محاسبه می‌کنیم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم (x را تنها می‌کنیم)

مثال $\to y = 2x - 3 \to y + 3 = 2x \to x = \dfrac{y+3}{2}$

حالا جای x و y را عوض می‌کنیم

$$f^{-1}(x) = y = \frac{x+3}{2}$$

نکته : برای حل تست‌های این قسمت می‌توان از روش عددگذاری هم استفاده کرد.

روش دوم : در ضابطه‌ی f به جای x، y و به جای y، x قرار می‌دهیم و سپس y را بر حسب x به دست می‌آوریم. ضابطه‌ی به دست آمده، ضابطه‌ی تابع وارون f است.

مثال $\to y = -4x + 5$

$$x = -4y + 5 \to 4y = -x + 5 \to y = \frac{-x+5}{4} \to f^{-1}(x) = \frac{-x+5}{4}$$

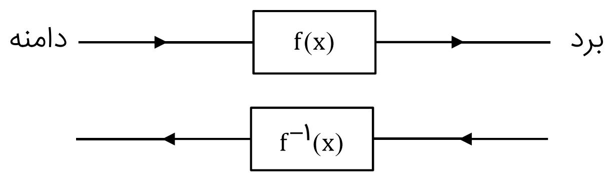
نکته : $D_f = R_{f^{-1}}$ و $R_f = D_{f^{-1}}$ و $f(a)=b \to f^{-1}(b)=a$

نکته : در تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a+d=0$ باشد، آن‌گاه وارون تابع با خود آن برابر می‌شود.

نکته : ترکیب f و f^{-1}

۱) $f^{-1}of(x)=fof^{-1}(x)=x$

نکته : استفاده از تابع f و f^{-1} به شکل ماشین



مسیر حرکت عوض شود تابع معکوس می‌شود.

اعمال جبری روی توابع و ترکیب توابع

منظور از اعمال جبری یعنی $(f \overset{\times}{\underset{\div}{\pm}} g)$ می‌باشد که برای این منظور ابتدا باید شرط $Df \cap Dg$ را بررسی کنیم و سپس اعمال جبری را روی توابع اجرا می‌کنیم.

$$(f \overset{\times}{\pm} g)(x)=f(x)\overset{\times}{\pm} g(x) \xrightarrow{\text{به شرط}} Df\cap Dg$$
$$\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{\text{به شرط}} Df\cap Dg-\{g(x)=0\}$$

نکته ۱ : برای محاسبه اعمال جبری در توابع زوج مرتبی ابتدا زوج‌های مرتبی که مؤلفه‌ی اول یکسان دارند را مشخص می‌کنیم و سپس مؤلفه‌های دوم آن را $+$ یا $-$ یا $\times$ یا $\div$ می‌کنیم.

خلاصه در دامنه مشترک، اعمال جبری روی برد انجام می‌شود.

نکته ۲ : تساوی دو تابع : هنگامی دو تابع f و g با هم برابراند که دو شرط زیر برقرار باشد.

$$\begin{cases} \text{اول} \to Df=Dg \\ \text{دوم} \to \text{ساده شده تابع } f = \text{ساده شده تابع } g \text{ باشد} \end{cases}$$

ترکیب دو تابع

ترکیب دو تابع به صورت ضابطه : ترکیب دو تابع f و g را به صورت

$fog(x)=f(g(x)) \qquad x \to \boxed{g} \to \boxed{f} \to fog$

$gof(x)=g(f(x)) \qquad x \to \boxed{f} \to \boxed{g} \to gof$

دامنه‌ی ترکیب توابع

$f(g(x)) =$

$Dfog = \{x \mid x \in Dg, g(x) \in Df\} \rightarrow$

روش حفظ‌کردن متوجه‌شدن

$x \rightarrow \boxed{g} \rightarrow \boxed{f} \rightarrow$ خروجی

روش حفظ‌کردن متوجه‌شدن مسیر حرکت ماشین است.

$Dgof = \{x \mid x \in Df, f(x) \in Dg\} \rightarrow$

$g(f(x))$

$x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow$ خروجی

تابع (نمودارشناسی 1)

دستگاه مختصات x = عرض h = طول O = مبدأ

تابع درجه اول $y = ax + b \,,\, y = mx + h \longrightarrow$

توضیحات m و h $(\alpha$ = حاده$)$ $\tan\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ تندی = شیب خط m

$m > 0$ و $m < 0$ و $m = 0$ و $m =$ ت ن

$\nearrow \quad \searrow \quad \longrightarrow \quad \uparrow$

محور yها = ارتفاع خط= عرض از مبدأ: h

برای نوشتن معادله خط
$$\begin{cases} y = mx + h \\ y - y_0 = m(x - x_0) \begin{cases} m \,,\, A\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \\ A\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} , B\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \end{cases} \end{cases}$$

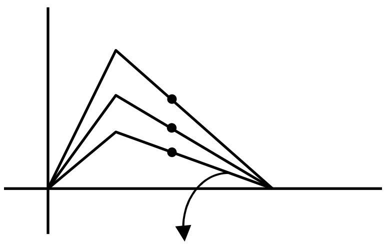
انبساط و انقباض

۱- انبساط و انقباض عمودی $\longleftarrow$ تغییرات در برد

$$y = Kf(x)$$

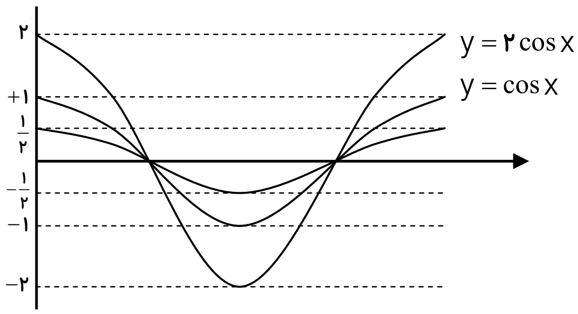
انقباض $0 < K < 1$ انبساط $K > 1$

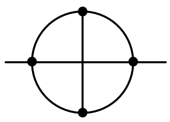
به عنوان مثال $f(x)\,A\left|\begin{matrix} x_0 \\ Ky_0 \end{matrix}\right.$



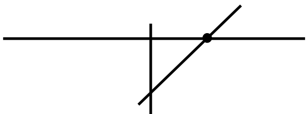
$y = \frac{1}{3} f(x) \qquad A\left|\begin{matrix} x_0 \\ Ky_0 \end{matrix}\right.$

مثال ۱: $\qquad [0\,,\,2\pi] \qquad y = \cos x$

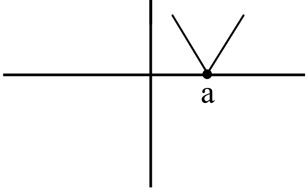




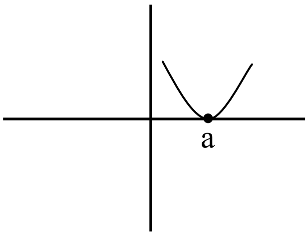
$(x-a)$



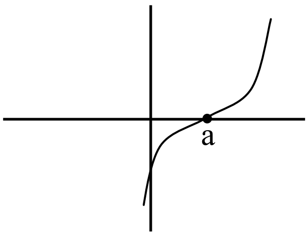
مفهوم قدر مطلق $|(x-a)|$



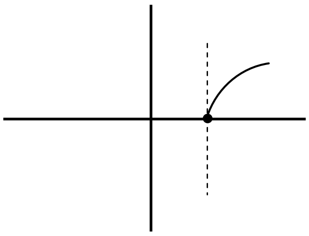
فشار بالا پایین $(x-a)^{2K}$



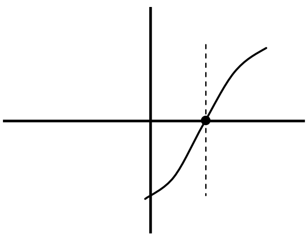
فشار $(x-a)^{2K+1}$



تعیین علامت – فشار از چپ و راست $\sqrt[\text{زوج}]{(x-a)}$



فشار از چپ و راست $\sqrt[\text{فرد}]{(x-a)}$

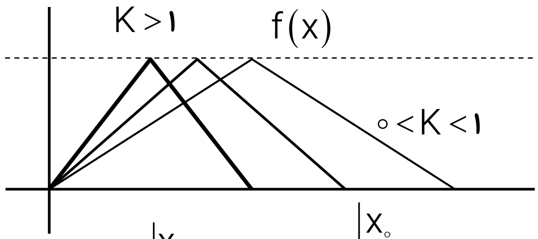


۲- انبساط و انقباض افقی ⟵ تغییر در دامنه

$$y = f(Kx)$$

جمع: $K > 1$ انقباض افقی

باز: $0 < K < 1$ انبساط افقی



$$A\left|\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix}\right. \longrightarrow A'\left|\begin{matrix} \frac{x_0}{K} \\ y_0 \end{matrix}\right.$$

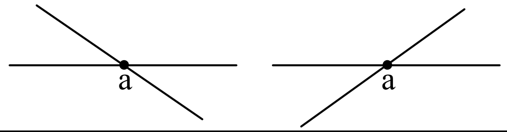
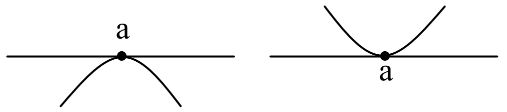
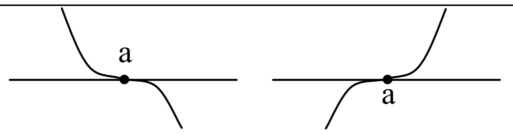
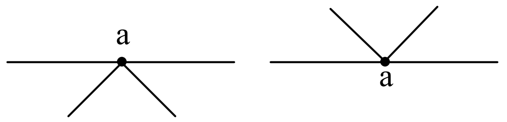
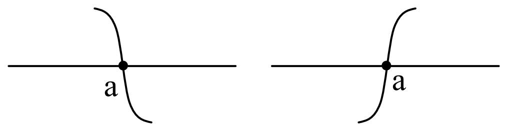
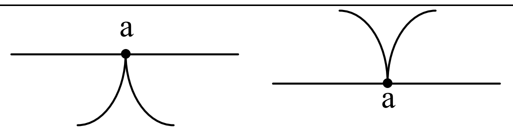
نکته: $2x \in D_f \longrightarrow x \in \frac{1}{2}D_f$

$$y = f(Kx)$$

$$K > 1 \longrightarrow y = f(2x)$$

$$0 < K < 1 \longrightarrow y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$\frac{1}{2}x \in D_f \longrightarrow x \in rDf$$

عنوان	فرم ضابطه	شکل‌ها
ریشه ساده	$(x-a)\cdot f(x)$	
ریشه مضاعف	$(x-a)^{2K}\cdot f(x)$	
ریشه مکرر فرد	$(x-a)^{2K+1}\cdot f(x)$	
نقطه گوشه	$\|x-a\|\cdot f(x)$	
عطف قائم	$\sqrt[\text{فرد}]{(x-a)^{\text{فرد}}}\cdot f(x)$	
بازگشت	$\sqrt[\text{زوج}]{(x-a)^{\text{زوج}}}\cdot f(x)$	

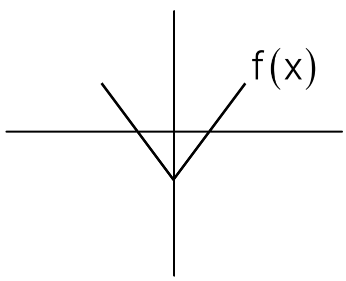
نکته:

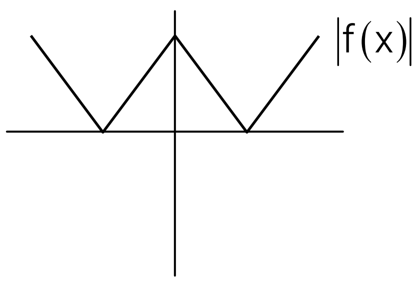
$$f(x) \rightarrow \begin{cases} |f(x)| \\ f(|x|) \end{cases}$$

۱) $y=|f(x)| \rightarrow \begin{cases} f(x) & f(x)\geq 0 \\ -f(x) & f(x)<0 \end{cases}$

محور yها -

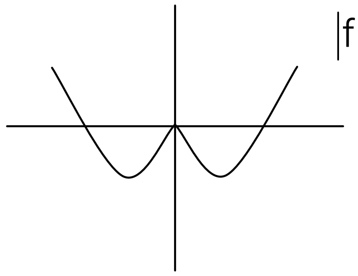
محور yها +





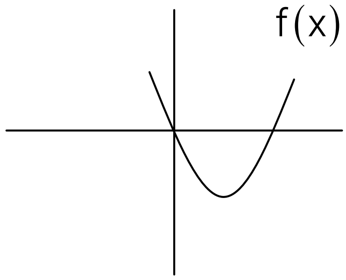
۲) $f(|x|) \rightarrow \begin{cases} f(x) & f(x) \geq ۰ \\ f(-x) & f(x) < ۰ \end{cases}$

$|f(x)|$



$x \geq ۰$

$f(x)$

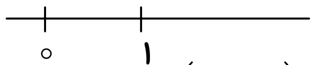


$x < ۰$

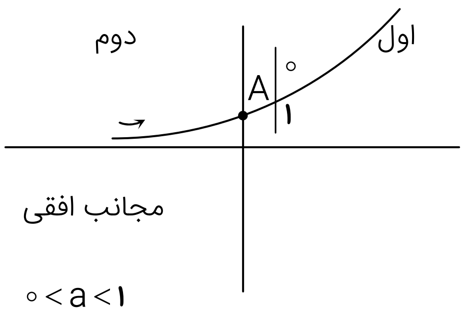
قسمت‌هایی از تابع که در xهای منفی هستند در صورت وجود حذف و قرینه قسمت (xهای +) را نسبت به محور yها رسم می‌کنیم.

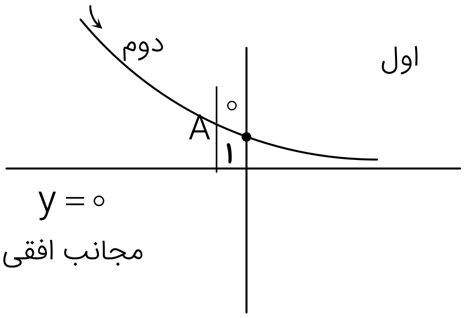
رسم توابع نمایی و لگاریتمی

$y = a^x$ $\qquad a > ۰ \,, a \neq ۱$



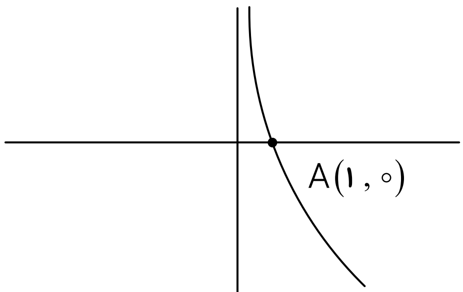
$a > ۱$ (صعودی) $\qquad ۰ < a < ۱$ (نزولی)





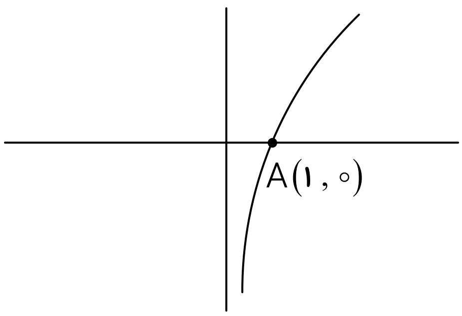
$a > ۱$ $\qquad ۰ < a < ۱$

$y = \log_a^x \qquad D = \begin{cases} x > ۰ \\ a > ۰ \,, a \neq ۱ \end{cases}$



$x = ۰$ مجانب قائم

$y = \log_a^x \qquad D = \begin{cases} x > ۰ \\ a > ۰ \,, a \neq ۱ \end{cases}$



$x = ۰$ مجانب قائم

فصل دوم: مثلثات

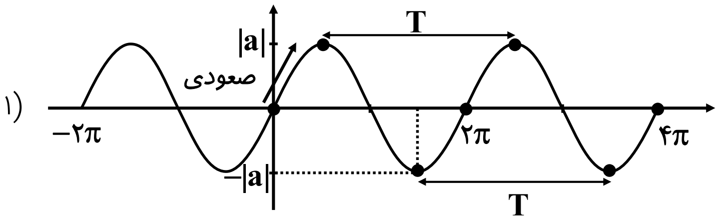
تابع متناوب

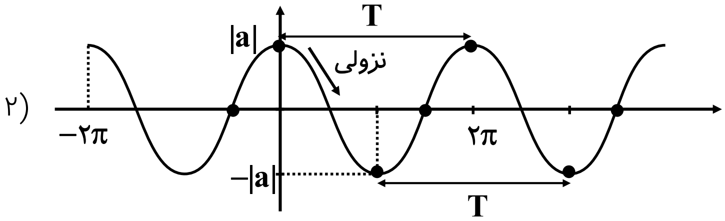
تابع f را متناوب گوییم هر گاه هر عدد حقیقی چون T وجود داشته باشد به طوری که برای هر x در دامنه تابع f، $f(x+T)=f(x)$ باشد عدد T را تناوب تابع f می‌نامند و کوچکترین مقدار مثبت T را در صورت وجود دوره تناوب تابع f می‌نامند.

مثال:

نکته ۱: فاصله بین ۲Min یا ۲Max برابر یک دوره تناوب است. $\sin(x \pm 2k\pi)=\sin x$

نکته ۲: فاصله بین Max و یک Min تناوب، $\frac{T}{2}$ است. $\cos(x \pm 2k\pi)=\cos x$

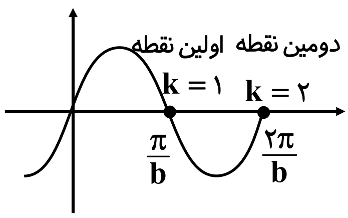




$y=a\sin bx$

$y=a\cos bx$

نکته ۳: طول محل تلاقی تابع با محور $\cos x$، $\frac{k\pi}{b}$ است.



$$y=a\sin\underbrace{(bx+c)}_{\text{دامنه}}+d \rightarrow \text{عدد تنها}$$

نکات مهم دیگر:

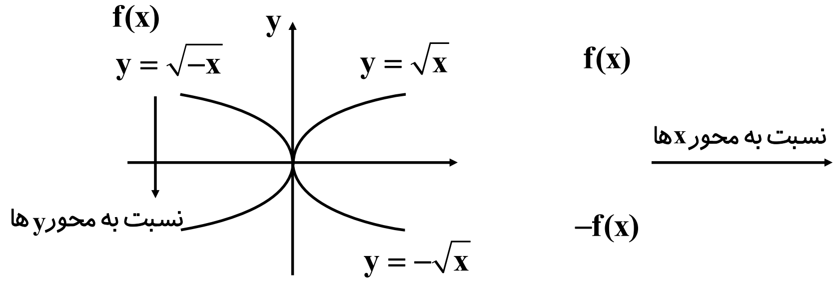
$\text{Max}=|a|+d$

$\text{Min}=-|a|+d$

مقدار میانگین Max و Min است. $d=$

نکته ۱: اگر a منفی شود نمودار نسبت به محور xها قرینه می‌شود.

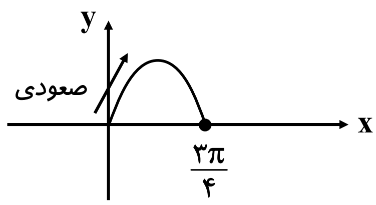
نکته ۲: اگر b منفی شود نمودار نسبت به محور yها قرینه می‌شود.



مثال: قسمتی از نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\operatorname{Sin}Kx$ به‌صورت زیر است K کدام است.

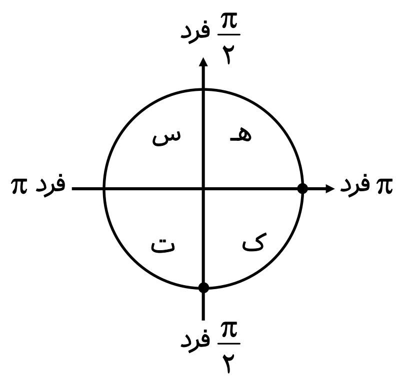
۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ٤) $\frac{۴}{۳}$

نکته: شکل نصف دوره تناوب تابع Sin است.



فرمول $T=\frac{۲\pi}{|k|} \Rightarrow \frac{۱}{\cancel{۲}}\left(\frac{\cancel{۲}\cancel{\pi}}{|k|}\right)=\frac{\cancel{۳\pi}}{۴} \rightarrow |k|=\frac{۴}{۳} \rightarrow K=\pm\frac{۴}{۳} \Rightarrow \boxed{K=\frac{۴}{۳}}$

نکته: یادآوری

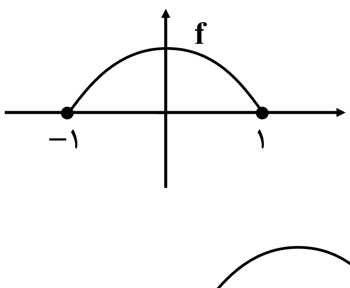


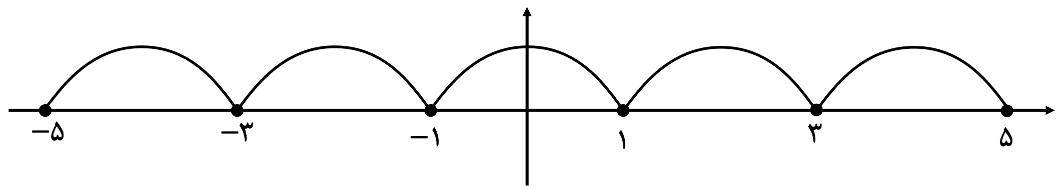
$\operatorname{Cos}x=\operatorname{Cos}(۲\pi+x)=\operatorname{Cos}(۴\pi+x)=\operatorname{Cos}(۶\pi+x)=\operatorname{Cos}(\text{زوج}\,\pi+x)$

$\operatorname{Sin}=\operatorname{Sin}\ (۲\pi+x)=\operatorname{Sin}(۴\pi+x)=\operatorname{Sin}(۶\pi+x)=\operatorname{Sin}(\text{زوج}\,\pi+x)$

یعنی ۲π و ۴π و ۶π و ... دوره تناوب ما هستند اما کوچکترین آنها $T=۲\pi$

مثال: اگر f تابعی متناوب باشد با دوره تناوب $T=۲$





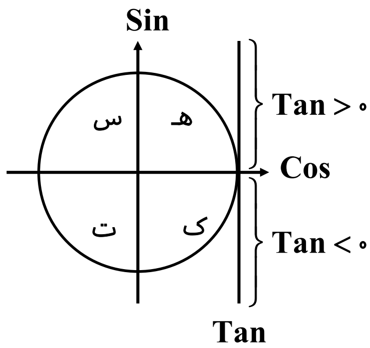
نکته مهم: دوره تناوب

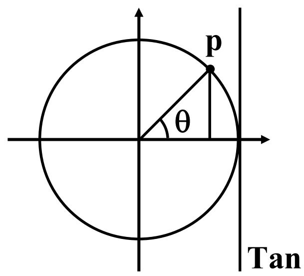
$$\left.\begin{array}{l} y=a\operatorname{Sin}(bx+c)+d \\ y=a\operatorname{Cos}(bx+c)+d \end{array}\right\} \rightarrow T=\frac{۲\pi}{|b|}$$

$|b| \rightarrow$ ضریب x

نکته مهم:

$$\left.\begin{array}{l} y = a\,Tan(bx+c)+d \\ y = a\,Cot(bx+c)+d \end{array}\right. \rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$ ضریب x





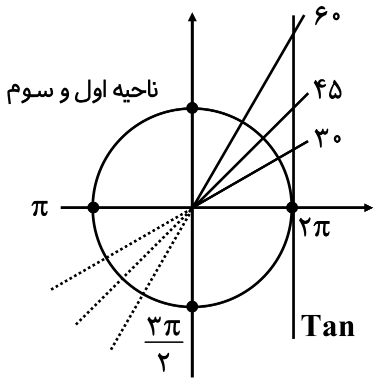
$$Tan\,\theta = \frac{Sin\,\theta}{Cos\,\theta}$$

نکته:

$D = \mathbb{R} - \{Cos\,x = 0\} \rightarrow D = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq ka + \frac{\pi}{2}\}$

برد $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

نکته) $Tan(\pi + x) = Tan\,x$ $\quad T = \pi$

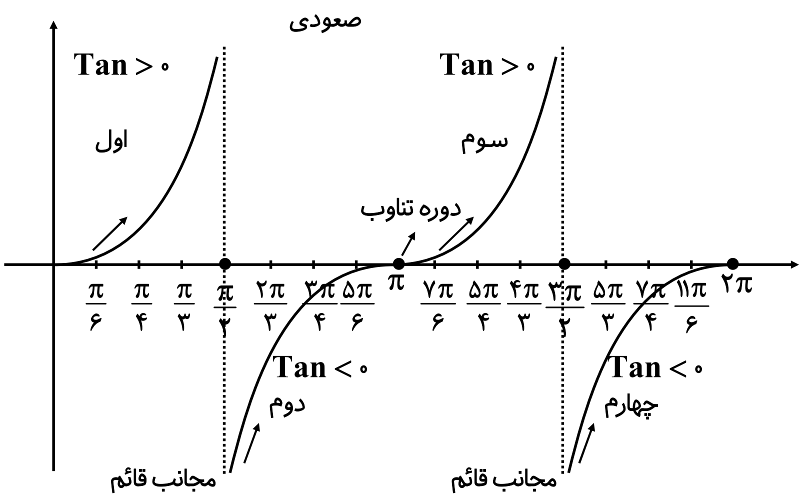


هـ: $0 <$ اول $< \frac{\pi}{2}$

$Tan > 0$

ت: $\pi <$ سوم $<$ ۳π

$Tan > 0$

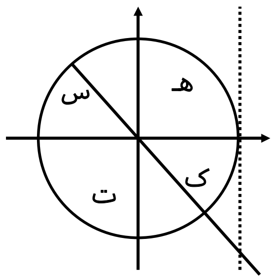


جایی که مخرج صفر است

حدی: $\text{Tan}\,\boxed{\frac{\pi}{۲}} = \frac{\text{Sin}\frac{\pi}{۲}}{\text{Cos}\frac{\pi}{۲}} = \frac{۱}{۰} = +\infty$ اول $< \frac{\pi}{۲}$

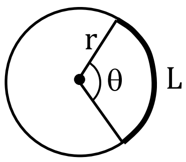
جایی که مخرج صفر است

حدی: $\text{Tan}\,\boxed{\frac{۳\pi}{۲}} = \frac{\text{Sin}\frac{۳\pi}{۲}}{\text{Cos}\frac{۲\pi}{۲}} = \frac{-۱}{۰} = -\infty$ اول $< \frac{\pi}{۲}$

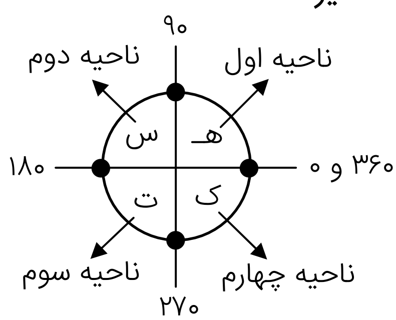


نکات مثلثات

۱- زاویه برحسب رادیان $\leftarrow L = r \times \theta$ (شعاع: r ، طول کمان: L)



۲- شناخت دایره



هـ = همه مثبت

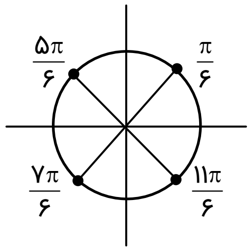
س = sin مثبت

ت = tan و cot مثبت

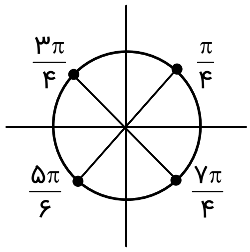
ک = cos مثبت

۳- زاویه‌های مهم در مثلثات

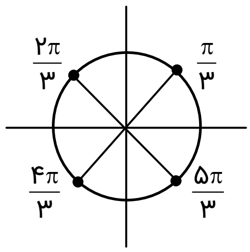
دایره برحسب ۳۰ درجه $(\frac{\pi}{6})$



دایره برحسب ۴۵ درجه $(\frac{\pi}{4})$



دایره برحسب ۶۰ درجه $(\frac{\pi}{3})$



روابط مثلثاتی

بسته ۱

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha$$
$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha$$

بسته ۲

$$\sin^2\alpha=\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{1+\cot^2\alpha}$$
$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}$$

بسته ۳

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha.\cos\beta\boxed{\pm}\cos\alpha.\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha.\cos\beta\boxed{\mp}\sin\alpha.\sin\beta$$
$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\boxed{\pm}\tan\beta}{1+\boxed{\mp}\tan\alpha.\tan\beta}$$

بسته ٤

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

بسته ۵

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

بسته ٦

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$ (یادآوری)

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$ (یادآوری)

بسته ۷

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$$

بسته ۸

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha = 1 - \frac{2}{4}\sin^2 2\alpha$$

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$$

بسته ۹

$$(\sin\alpha \pm \cos\alpha)^2 = 1 \pm \sin 2\alpha$$

$$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$\tan\alpha - \cot\alpha = -2\cot 2\alpha$$

بسته ۱۰

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

حل معادلات مثلثاتی (عقربه‌های n سر)

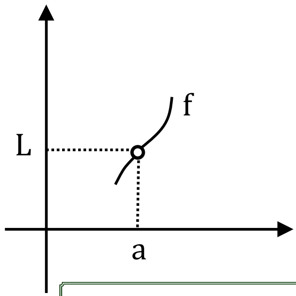
① $\sin x = \sin\alpha \left\langle \begin{array}{l} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{array} \right.$

② $\cos x = \cos\alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$

③ $\tan x = \tan\alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha$

فصل سوم: حد و پیوستگی

تعریف حد : تابع f در $x=a$ دارای حد L است هرگاه وقتی از روی نمودار f به عدد حقیقی a نزدیک می‌شویم، مقادیر f به عدد حقیقی و منحصر به فرد L نزدیک شوند.



$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a} f(x)=L \\ \lim\limits_{x\to a^+} = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L\end{cases}$$

محاسبه حد از روی ضابطه

برای محاسبه حد $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ اول باید ضابطه‌ی f را تا حد ممکن ساده کنیم حتماً باید قدرمطلق و براکت (جزءصحیح) را برداریم و در توابع چندضابطه‌ای باید معلوم کنیم که از کدام ضابطه استفاده می‌کنیم.

رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ جبری (هوپیتال)

اگر حد به صورت $\frac{۰}{۰}$ رسید می‌توانیم از رفع ابهام Hop استفاده کنیم.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

حالا اگر در حد جدید $x=a$ را قرار دادیم و باز هم $\frac{۰}{۰}$ شده می‌توانیم دوباره Hop بزنیم.

نکته : هوپیتال در دو جا عمل نمی‌کند.

۱- اگر عبارت زیر رادیکال صفر شود ⟵ باید رادیکال را از بین ببریم.

مثال:

$$۱)\ \sqrt{x^۲-۲x+۱}=\sqrt{(x-۱)^۲}=|x-۱|$$

$$۲)\ \sqrt{۱+\cos x}=\sqrt{۲\cos^۲\frac{x}{۲}}=\sqrt{۲}\,|\cos\frac{x}{۲}|$$

۲- اگر چند عبارت در هم ضرب شوند که حد همگی صفر باشد ⟵ باید حدها را به چند قسمت تفکیک کرده یا کسر را ساده کرد.

رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ مثلثاتی

اگر f یا g شامل توابع مثلثاتی باشند و حاصل $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ به صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ درآمد به یکی از دو روش ابهام را انجام داده و حاصل حد را می‌یابیم.

۱- هم‌ارزی (بدل)

	هم‌ارزی اولیه	هم‌ارزی ثانویه
$\sin x$	x	$x-\frac{x^۳}{۳!}$
$\tan x$	x	$x+\frac{x^۳}{۳}$

$$\to x-\frac{x^۳}{۳!}=x-\frac{x^۳}{۶}$$

جبری $x^۳-x^۲-۲x\sim -۲x$
کم‌توان $x\to ۰$

$$\sin \underset{\to ۰}{\square} \simeq \square \qquad \tan \underset{\to ۰}{\square} \simeq \square$$

هم‌ارزی کسینوس:

$$۱-\cos \underset{\to ۰}{\square} \simeq \frac{\square^۲}{۲!}$$

* $\square$ = بسته = یا هر عبارتی که به سمت صفر میل کند.

$$\cos^m \underset{\to ۰}{\square} \simeq ۱-m(\frac{\square^۲}{۲})$$

هم‌ارزی برنولی $\longrightarrow (۱+x)^n\sim ۱+nx$

$$\tan \underset{\to ۰}{\square}-\sin \underset{\to ۰}{\square} \sim \frac{\square^۳}{۲}$$

۲- استفاده از روش Hop

قضیه فشردگی

اگر به ازای هر x از بازه‌ی شامل a داشته باشیم $g(x) < f(x) < k(x)$ و حد توابع k و g در $x = a$ با هم مساوی و برابر عدد حقیقی L باشند آنگاه حد تابع f در $x = a$ برابر L است.

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = L$$

حد بی‌نهایت

در این نوع حدها که معمولاً حد توابع کسری هستند به این حالت‌ها برخورد می‌کنیم.

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty \qquad \frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty \qquad \frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$$

حد در بی‌نهایت و رفع ابهام $\frac{\infty}{\infty}$

$$1)\ \lim \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + c}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots} \xrightarrow{\text{قضیه پرتوان}} \begin{cases} 0 & m > n \\ \frac{a}{a'} & m = n \\ \infty & m < n \end{cases}$$

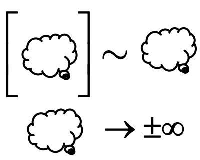
۲)

$$\underset{x \to \pm\infty}{\sqrt[P]{ax^P + bx^{P-1} + \dots}} \simeq \sqrt[P]{a}\left(x + \frac{b}{aP}\right)$$

$$\underset{x \to \pm\infty}{\sqrt[2]{ax^2 + bx + c}} = \sqrt{a}\left|x + \frac{b}{2a}\right|$$ (فرجه‌های زوج قدر مطلق دارد)

$$\underset{x \to \pm\infty}{\sqrt[3]{ax^3 + bx^2 + cx + d}} = \sqrt[3]{a}\left(x + \frac{b}{3a}\right)$$

۳) حد توابع جزءصحیح:



هم‌ارزی فیل و فنجون (1^{∞})

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n} \simeq e(\text{عدد نپر}) \simeq 2/718$$

$$\lim(1+\underset{\to 0}{\bigcirc})^{\overset{\triangle\to\infty}{}} = e^{\lim \underset{\to 0}{\bigcirc} \times \triangle\to\infty}$$

مثال: $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{4x^2})^{x^2} = e^{\frac{1}{4x^2}\times x^2} = e^{\frac{1}{4}}$

پیوستگی

۱-پیوستگی در یک نقطه: تابع $f(x)$ در $x=a$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ یعنی حد تابع در نقطه $x=a$ با مقدار تابع در آن نقطه برابر باشد. اگر تابعی در تمام نقاط دامنه‌ی خود پیوسته باشد آن را تابعی پیوسته می‌گوییم.

۲-پیوستگی در یک بازه: در این سوال‌ها وظیفه ما بررسی پیوستگی در نقاط شکستگی دامنه f است و به سایر نقاط دامنه کاری نداریم.

$$f(x)=\begin{cases}\triangle & x\ge a\\ \bigcirc & x<a\end{cases} \Rightarrow \text{بررسی در نقطه } x=a$$

نکته: بنابراین هرگاه تابعی روی یک بازه تعریف شده باشد و در یک نقطه از دامنه خود حداقل یکی از دو شرط (حد داشتن و برابری حد با مقدار) را نداشته باشد پیوسته نیست.

تعریف مشتق

مشتق = شیب خط مماس بر نمودار

فرمول ۱:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

فرمول ۲:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

فرمول ۳:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

۱ اگر $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ و $fog(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$، مقدار $g(1)$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۲ اگر $f(x)=|x|-x$ ضابطه تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟

۱) x
۲) $|x|$
۳) $x+|x|$
۴) 0

۳ اگر دو تابع $f=\{(a,1)(3,2)(0,1)\}$ و $g=\{(a,b-2)(0,1)(c,a)\}$ باهم مساوی باشند آن‌گاه $2c-b+a$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۵
۳) ۳
۴) ۴

۴ اگر توابع $f=\{(2,2)(3,4)\}$ و $g=\{(3,4)(5,6)(2,3)\}$ مفروض باشند آن‌گاه حاصل $\frac{4f}{2g+1}$ کدام است؟

۱) $\left\{(2,\frac{8}{7})\right\}$
۲) $\left\{(2,\frac{8}{7})(3,\frac{16}{9})\right\}$
۳) $\left\{(3,\frac{16}{9})\right\}$
۴) $\varnothing$

۵ اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت $x \to f \to g \to ۲x$ باشند و $g(x) = ۳x + ۴$ ، مقدار $f(۵)$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۶ اگر $f(x) = x^۲ - x - ۲$ و $f(g(x)) = x^۲ + x - ۲$ ، آن‌گاه $(f+g)(x)$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) $x^۲ - ۱$

۲) $x^۲ + ۱$

۳) $x^۲ - ۲x$

۴) $x^۲ + ۲x$

۷ اگر $f(x) = \frac{x}{x-۱}$ باشد، ضابطه تابع $f(x^۲) - ۲f(x) + ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱-x^۲}$

۲) $\frac{۲x}{x^۲-۱}$

۳) $\frac{۲x+۱}{۱-x^۲}$

۴) $\frac{۲x-۱}{x^۲-۱}$

۸ دامنه تعریف تابع $y = \frac{\sqrt{۱۶-x^۲}}{[x]-۴}$ کدام است؟

۱) $[-۴,۴]$

۲) $[-۴,۳)$

۳) $[-۴,۴)$

۴) $[-۴,۳) \cup \{۴\}$

۹ اگر $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۹}{x-۳} & x\neq ۳\\ \dfrac{x+۳k}{x-k} & x=۳\end{cases}$ و $g(x)=x+۳$ باشد، اگر $f=g$ باشد k کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) ۱
۴) هیچ مقدار k

۱۰ اگر $y=f(x)$ یک تابع خطی گذرنده از نقاط $(۰,a)$ و $(a,۰)$ باشد. ضابطه‌ی $fof(x)$ کدام است؟

۱) ۰
۲) x
۳) $f(x)$
۴) $x+۲a$

۱۱ اگر $f=\{(۲,۱),(-۱,۲),(۴,۲)\}$ و $g=\{(۲,-۲),(۴,۳),(-۱,۰)\}$ باشند. حاصل $\dfrac{۳f+g}{g}$ کدام است؟

۱) $\{(۲,۳),(۴,۱)\}$
۲) $\{(۲,\frac{-۱}{۲}),(۴,۳)\}$
۳) $\{(۲,۰),(۴,۱)\}$
۴) $\{(۲,-۱),(۴,۵)\}$

۱۲ اگر $f(x)=\sqrt{x+|x|}$ و $g(x)=\dfrac{۱}{x^{۲}-۴x}$، دامنه‌ی تعریف تابع gof کدام است؟

۱) $(۰,۸)\cup(۸,+\infty)$
۲) $\mathbb{R}-\{۰,۸\}$
۳) $\mathbb{R}-\{۰\}$
۴) $(۰,+\infty)$

۱۳ نمودار تابع $y=|\frac{۱}{۲}x|-۲$ را، ۴ واحد به طرف xهای منفی و یک واحد به طرف yهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه، با کدام طول متقاطع‌اند؟

۱) $-۳/۵$
۲) -۳
۳) $-۲/۵$
۴) -۲

۱۴ اگر $f=\{(۱,a+b),(۲,b+c),(۳,c+a)\}$ تابع همانی باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۱۵ اگر $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ و $g=\{(-۳,۵),(-۱,۴),(۰,۷)\}$ آن‌گاه بیش‌ترین مقدار تابع $۲g.(g-f)$ کدام است؟

۱) ۳۲
۲) ۶۴
۳) ۸۴
۴) ۴۲

۱۶ تابع با ضابطه‌ی $y=x|x-۲|$، در یک بازه، نزولی است. ضابطه‌ی معکوس آن در این بازه، کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=۱-\sqrt{۱+x}\,,x<۰$
۲) $f^{-۱}(x)=۱-\sqrt{۱-x}\,,\ x<۱$
۳) $f^{-۱}(x)=۱+\sqrt{۱-x}\,,\ ۰<x<۱$
۴) $f^{-۱}(x)=۱-\sqrt{۱-x}\,,۰<x<۱$

۱۷ **نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^2 - 3x - 10$ را، حداقل چند واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم، تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور xها غیر منفی باشد؟**

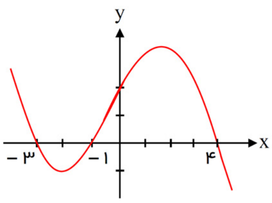
۱) ۱

۲) ۱/۵

۳) ۲

۴) ۳

۱۸ **شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x-2)$ است: دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $\sqrt{xf(x)}$، کدام است؟**



۱) $[-1,1]\cup[0,6]$

۲) $[-3,1]\cup[0,2]$

۳) $[-5,-3]\cup[-1,2]$

۴) $[-5,-3]\cup[0,2]$

۱۹ **تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |2x-6| - |x+1|$، در یک بازه، صعودی است. ضابطه‌ی معکوس آن، در این بازه کدام است؟**

۱) $f^{-1}(x) = -x+7, x>8$

۲) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x+2, x>3$

۳) $f^{-1}(x) = x+7, x>-4$

۴) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x-1, -4<x<8$

۲۰ **ضابطه‌ی وارون تابع $y = \frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟**

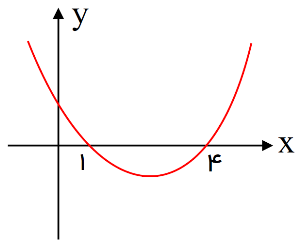
۱) $f^{-1}_{(x)}(x) = \frac{x}{1-|x|}, |x|<1$

۲) $f^{-1}(x) = \frac{1-|x|}{|x|}, |x|>1$

۳) $f^{-1}(x) = \frac{x}{|x|-1}, |x|>1$

۴) $f^{-1}(x) = \frac{|x|-1}{x}, |x|<1$

۲۱ نمودار تابع $f(x)=(x-a)(x-b)$ به صورت زیر است. اگر این تابع در هر یک از بازه‌های $(-\infty,c]$ و $[c,+\infty)$ یک‌به‌یک باشد، حاصل abc کدام است؟



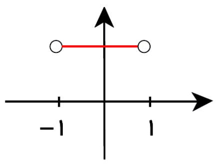
۱) ۱۰

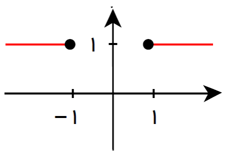
۲) ۲۰

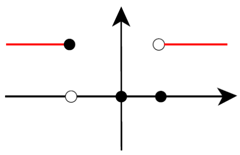
۳) $\frac{۵}{۲}$

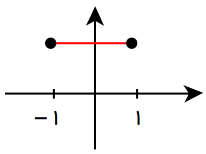
۴) ۴۰

۲۲ اگر $f(x)=x+\sqrt{x^۲-۱}$ و $g(x)=x-\sqrt{x^۲-۱}$ باشد آن‌گاه نمودار $(f.g)(x)$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۳ اگر $۵f(x-۲)+f(۲-x)=۴x+۱$ باشد، آنگاه $f(۳)$ کدام است؟

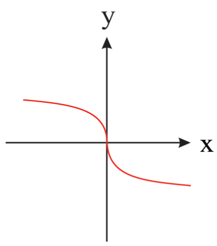
۱) ۴

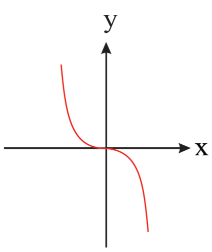
۲) ۴/۵

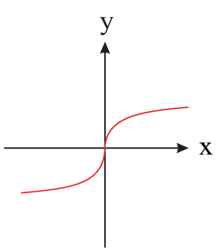
۳) ۵

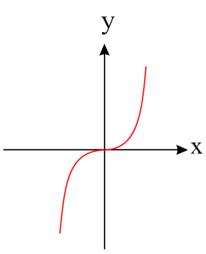
۴) ۵/۵

۲۴ اگر $f(x)=x|x|$ باشد، نمودار تابع $y=f^{-۱}(x)$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۵ اگر $f(\frac{۷+x}{۷-x}) = x^۷ + x^۶$ باشد در این صورت حاصل $f(\frac{۷-x}{۷+x})$ کدام است؟

۱) $x^۷ + x^۶$

۲) $-x^۷ + x^۶$

۳) $x^۷ - x^۶$

۴) $-x^۷ - x^۶$

۲۶ نمودار تابع $f(x) = \log(ax+b)$ با دامنه‌ی $(-\infty,۱)$ را ۲ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم و سپس آن را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. اگر طول نقطه‌ی برخورد نمودار حاصل با نمودار f، برابر $\sqrt{۵}$ باشد، آنگاه $f(-۱۹)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) -۱

۳) ۱

۴) $\log ۹$

۲۷ نمودار تابع $f(x) = \frac{x+۴}{x-۲}$، با دامنه‌ی $\mathbb{R} - \{۲\}$، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $-۱, -۴$

۲) $-۱, ۴$

۳) $۱, -۴$

۴) $۱, ۴$

۲۸ اگر $f(x) = \frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}$ و $g(x) = \sqrt{x - x^۲}$ باشند، دامنه‌ی تعریف تابع gof، کدام است؟

۱) $[۰,۱]$ ۲) $[-۱,۱]$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\mathbb{R} - (-۱,۱)$

۲۹ کدام یک از توابع زیر یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x)=|x|$

۲) $f(x)=|\sqrt{x}|$

۳) $f=\{(۱,۲),(۳,-۱),(۰,۳),(۴,۲)\}$

۴) $f(x)=x^۳-x^۲$

۳۰ اگر در تابع $f=\{(۳,۴),(۱,a^۲+۴a),(a+۲,a^۲-a),(۲a,a^۴)\}$ داشته باشیم $f(۱)=۵$، مقدار $f(-۳)$ کدام است؟

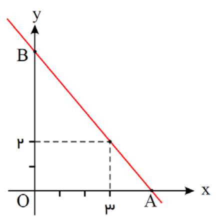
۱) صفر

۲) ۵

۳) ۳۰

۴) ۴

۳۱ به ازای هر خط که از نقطه‌ی $(۳,۲)$ می‌گذرد و جهت مثبت محورهای مختصات را در نقاط $A(x,۰)$ و $B(۰,y)$ قطع می‌کند. یک مثلث قائم‌الزاویه در ناحیه‌ی اول تشکیل می‌شود. تابعی که مساحت این مثلث را به عنوان تابعی از x به دست دهد. کدام است؟



۱) $S(x)=\frac{۲x^۲}{x-۳}$

۲) $S(x)=\frac{x^۲}{۲x-۶}$

۳) $S(x)=\frac{x^۲}{x-۳}$

۴) $S(x)=\frac{x^۳}{۲x-۶}$

۳۲ با توجه به اینکه $f(x+۱)=x^۳+۳x^۲+۳x-۱$ می‌باشد. مقدار a از معادله‌ی $f(a)=۰$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۲}$

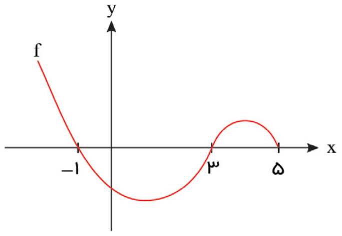
۲) $-\sqrt[۳]{۲}$

۳) $\sqrt[۳]{۲}-۲$

۴) $۲-\sqrt[۳]{۲}$

۳۳ اگر نمودار تابع f مطابق شکل مقابل باشد، دامنه‌ی تابع $g(x)=\sqrt{\frac{4x-x^2}{f(x)}}$ چگونه خواهد بود؟

۱) دو بازه‌ی باز
۲) دو بازه‌ی نیم باز
۳) دو بازه‌ی بسته
۴) یک بازه‌ی بسته



۳۴ دامنه‌ی تابع $f(x)=\log_2^{(ax+b)}$ به صورت بازه $(-\frac{2}{3},+\infty)$ است. اگر این تابع شامل زوج مرتب $(2,1)$ بوده باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{4}$
۲) $\frac{10}{9}$
۳) $\frac{4}{3}$
۴) $\frac{9}{8}$

۳۵ دامنه‌ی تابع f با ضابطه $y=\frac{4-x^2}{(x-2)(\sqrt[3]{x}+1)}$ چند عضو از $\mathbb{R}$ را در خود ندارد؟

۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۳۶ به ازای چند مقدار صحیح m، تابع $f(x)=(\frac{3m+1}{4})^x$ نزولی است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) هیچ مقدار m

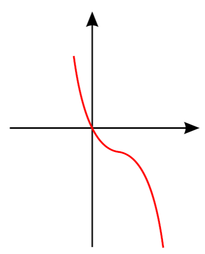
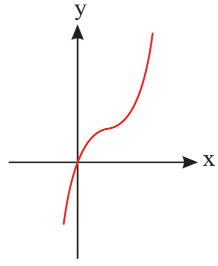
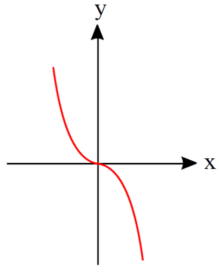
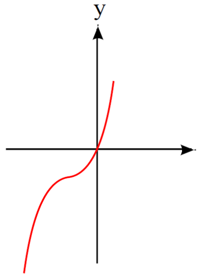
۳۷ اگر ضابطه‌ی تابع f به صورت $f(x)=\begin{cases}-x^۲+۶x-۵ & , x>۳\\ \frac{۴}{۵}x+\frac{۸}{۵} & , -۲\le x\le ۳\\ x^۲+۶x+۸ & , x<-۲\end{cases}$ باشد، آن‌گاه طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که در آن f(x) اکیداً صعودی است، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۴

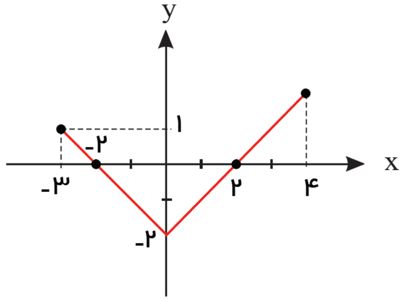
۳۸ اگر تابع f اکیداً صعودی و $f(۱)=۰$ باشد، آن‌گاه دامنه‌ی $g(x)=\sqrt{(x^۳-x)f(x)}$ برابر $\mathbb{R}-(a,b)$ است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱
۲) صفر
۳) -۱
۴) ۲

۳۹ نمودار تابع $f(x)=۶x^۲-x^۳-۱۲x$ شبیه کدام گزینه است؟

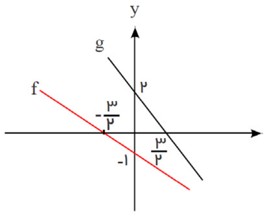
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

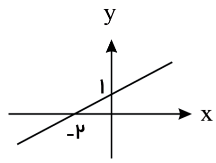
۴۰ اگر شکل زیر نمودار تابع $y=f(x-۲)$ باشد، آن‌گاه برد تابع $y=\sqrt{|۳f(x)-۱|}$ کدام است؟

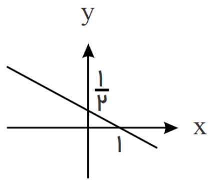


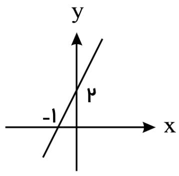
۱) $[۰,\sqrt{۵}]$
۲) $[-۲,۳]$
۳) $[۰,\sqrt{۸}]$
۴) $[۰,\sqrt{۷}]$

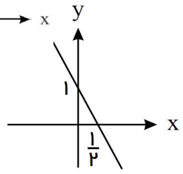
۴۱ نمودار توابع خطی f و g را مطابق شکل در اختیار داریم. نمودار تابع $f+g$ چگونه است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۴۲ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x\tan\frac{۱}{x}$ به ازای مقادیر کدام گزینه همواره معین است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\mathbb{R}-\{\frac{۱}{k\pi}\}$

۲) $\mathbb{R}-\{۰,\frac{۲}{(۲k+۱)\pi}\}$

۳) $\mathbb{R}-\{\frac{۲}{(۲k+۱)\pi}\}$

۴) $\mathbb{R}-\{۰\}$

۴۳ تابع f با ضابطه‌ی $y=\begin{cases}-\sqrt{-x}+۱, & x\le ۰\\ g(x), & x>۰\end{cases}$ با کدام انتخاب برای $g(x)$ تبدیل به یک تابع وارون‌پذیر می‌شود؟

۱) $x^۲-x$

۲) $۲x-۱$

۳) $-x+۲$

۴) $|x|+۲$

۴۴ نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=۲x-x|x|$ در بازه‌ی $(-۱,۱)$ چگونه است؟

۱) ابتدا نزولی، سپس صعودی

۲) صعودی

۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی

۴) نزولی

۱- گزینه‌ی ۴

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}\Rightarrow f(g(x))=\dfrac{g(x)+1}{g(x)-1} \\ fog(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\Rightarrow f(g(x))=\dfrac{x^2+2}{x^2+1} \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{g(x)+1}{g(x)-1}=\frac{x^2+2}{x^2+1}$$

$$\xrightarrow{x=1}\frac{g(1)+1}{g(1)-1}=\frac{3}{2}\Rightarrow 3g(1)-3=2g(1)+2\Rightarrow g(1)=5$$

۲- گزینه‌ی ۴

$$f(x)=|x|-x\to f(x)=\begin{cases} x-x & x\ge 0\\ -x-x & x<0\end{cases}=\begin{cases} 0 & x\ge 0\\ -2x & x<0\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x\ge 0\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow f(f(x))=f(0)=0 \\ x<0\Rightarrow f(x)=-2x\Rightarrow f(f(x))=f(\underbrace{-2x}_{+})=0 \end{array}\right\}\Rightarrow fof(x)=0$$

۳- گزینه‌ی ۲

دو تابع به صورت زوج مرتب، در صورتی مساوی یکدیگرند که اولاً مولفه‌های اول برابر باشند و ثانیاً به ازای مولفه‌ی اول، باید مولفه‌ی دوم هم برابر باشد.

$$D_f=D_g\Rightarrow\{a,3,0\}=\{a,0,c\}\Rightarrow c=3$$

$$f(a)=g(a)\Rightarrow 1=b-2\Rightarrow b=3$$

$$f(3)=g(3)\Rightarrow 2=a\Rightarrow 2(3)-(3)+2=5$$

پس $2c-b+a=6-3+2=5$ است.

۴- گزینه‌ی ۲

اعمال روی توابع فقط در دامنه‌های مشترک انجام می‌شود، بنابراین ابتدا باید اشتراک دامنه‌ها را بیابیم.

$$D_f\cap D_g=\{2,3\}$$

$$\frac{4f}{2g+1}=\{(2,\frac{4(2)}{2(3)+1}),(3,\frac{4(4)}{2(4)+1})\}=\{(2,\frac{8}{7})(3,\frac{16}{9})\}$$

۵- گزینه‌ی ۲

اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت $x\to f\to g\to 2x$ باشند، نتیجه می‌گیریم که:

$$g(f(x))=2x$$

$$g(x)=3x+4\Rightarrow g(f(x))=3f(x)+4\Rightarrow 3f(x)+4=2x\Rightarrow f(x)=\frac{2x-4}{3}\Rightarrow f(5)=\frac{6}{3}=2$$

۶- گزینه‌ی ۱

$$\begin{cases} f(x)=x^{۲}-x-۲ \Rightarrow f(g(x))=(g(x))^{۲}-(g(x))-۲ \\ f(g(x))=x^{۲}+x-۲ \end{cases}$$

حال با تغییر متغیر $g(x)=t$ و تساوی دو رابطه‌ی بالا داریم:

$$\Rightarrow t^{۲}-t-۲=x^{۲}+x-۲ \Rightarrow t^{۲}-t=x^{۲}+x$$
$$\Rightarrow (t-\frac{۱}{۲})^{۲}-\frac{۱}{۴}=(x+\frac{۱}{۲})^{۲}-\frac{۱}{۴} \rightarrow (t-\frac{۱}{۲})^{۲}=(x+\frac{۱}{۲})^{۲} \Rightarrow (t-\frac{۱}{۲})=\pm(x+\frac{۱}{۲})$$
$$\Rightarrow \begin{cases} t-\frac{۱}{۲}=x+\frac{۱}{۲} \Rightarrow t=x+۱ \Rightarrow g(x)=x+۱ \\ t-\frac{۱}{۲}=-x-\frac{۱}{۲} \Rightarrow t=-x \Rightarrow g(x)=-x \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} (f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^{۲}-x-۲+(-x)=x^{۲}-۲x-۲ \\ (f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^{۲}-x-۲+x+۱=x^{۲}-۱ \end{cases}$$

۷- گزینه‌ی ۳

روش اول:

$$f(x^{۲})-۲f(x)+۱=\frac{x^{۲}}{x^{۲}-۱}-\frac{۲x}{x-۱}+۱=\frac{x^{۲}}{(x+۱)(x-۱)}-\frac{۲x}{x-۱}+۱$$
$$=\frac{x^{۲}-۲x(x+۱)+(x+۱)(x-۱)}{(x+۱)(x-۱)}=\frac{x^{۲}+۲x^{۲}-۲x+x^{۲}-۱}{x^{۲}-۱}=\frac{-۲x-۱}{x^{۲}-۱}=\frac{-(۲x+۱)}{x^{۲}-۱}=\frac{۲x+۱}{۱-x^{۲}}$$

روش دوم:

کافی است در رابطه‌ی $f(x^{۲})-۲f(x)+۱$ به جای x مقدار دلخواهی قرار داده و حاصل این عبارت را مشخص کنیم. به عنوان مثال داریم:

$$x=۲ \rightarrow f(۴)-۲f(۲)+۱=\frac{۴}{۴-۱}-۲(\frac{۲}{۲-۱})+۱=\frac{۴}{۳}-۳=-\frac{۵}{۳}$$

حال در میان گزینه‌ها، گزینه‌ای را انتخاب می‌کنیم که با جای‌گذاری $x=۲$ مقدارش $-\frac{۵}{۳}$ گردد. پس جواب درست گزینه‌ی (۳) است.

۸- گزینه‌ی ۳

زیر رادیکال با فرجه زوج باید بزرگ‌تر مساوی صفر باشد. $\Rightarrow ۱۶-x^{۲}\geq ۰ \Rightarrow x^{۲}\leq ۱۶ \Rightarrow -۴\leq x\leq ۴$

درضمن مخرج نیز نباید صفر شود. $\Rightarrow [x]-۴=۰ \Rightarrow [x]=۴ \Rightarrow ۴\leq x<۵$ باید از دامنه حذف شوند.

۹- گزینه‌ی ۱

چون دامنه‌ی تعریف هر دو تابع برابراست کافی است ضابطه‌ی هر دو تابع به ازای هر x دلخواه برابر شوند.

$$f(3)=g(3)\Rightarrow \frac{3+3k}{3-k}=6\Rightarrow 3+3k=18-6k\Rightarrow 9k=15\Rightarrow k=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}$$

۱۰- گزینه‌ی ۲

ابتدا با داشتن دو نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}0\\a\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}a\\0\end{vmatrix}$ معادله‌ی خط گذرنده از این دو نقطه را می‌نویسیم:

$$\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\Rightarrow \frac{y-a}{x}=\frac{a}{-a}=-1\Rightarrow y-a=-x\Rightarrow f(x)=a-x$$

$$fof(x)=f(f(x))=a-(a-x)=x$$

۱۱- گزینه‌ی ۲

$$\left.\begin{array}{l}3f=\{(2,3),(-1,6),(4,6)\}\\ g=\{(2,-2),(4,3),(-1,0)\}\end{array}\right\}\Rightarrow 3f+g=\{(2,1),(-1,6),(4,9)\}$$

$$\left.\begin{array}{l}3f+g=\{(2,1),(-1,6),(4,9)\}\\ g=\{(2,-2),(4,3),(-1,0)\}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{3f+g}{g}=\{(2,-\frac{1}{2}),(4,3)\}$$

دقت کنید که تمام عملیات جبری، روی مولفه‌ی دوم انجام می‌شود. و برای انجام عملیات جبری روی دو تابع که به صورت زوج مرتب داده شده است کافی است زوج‌هایی از دو تابع را که دارای xهای برابر هستند را در نظر گرفته و پس از نوشتن x، عملیات جبری را روی مولفه‌ی دومشان انجام دهید.

۱۲- گزینه‌ی ۱

برای تعیین دامنه‌ی تعریف تابع gof ابتدا باید دامنه‌های تعریف f و g را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$f(x)=\sqrt{x+|x|}\to x+|x|\ge 0\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0: 2x\ge 0\Rightarrow x\ge 0\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}}x\ge 0\\ x<0: x-x\ge 0\Rightarrow 0\ge 0\ \text{همواره برقرار}\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}}x<0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اجتماع}}x\in\mathbb{R}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$$

$$g(x)=\frac{1}{x^2-4x}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{0,4\}$$

حال با توجه به دامنه‌ی تعریف تابع مرکب، می‌نویسیم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}\mid \sqrt{x+|x|}\in(\mathbb{R}-\{0,4\})\}$$

باید مقادیری از x که به ازای آن‌ها $f(x)=\sqrt{x+|x|}$ برابر ۰ یا ۴ می‌شوند را از $\mathbb{R}$ کنار بگذاریم. داریم:

$$\sqrt{x+|x|}=0\Rightarrow x+|x|=0\Rightarrow |x|=-x\Rightarrow x\le 0,\ \sqrt{x+|x|}=4\Rightarrow x+|x|=16$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0: 2x=16\Rightarrow x=8\\ x<0: x-x=16\Rightarrow 0=16\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

بنابراین اگر از $\mathbb{R}$، $x\le 0$ و $x=8$ را کنار بگذاریم، دامنه‌ی تعریف gof به‌دست می‌آید:

$D_{gof}:\{x\in\mathbb{R} \mid x \not\leq ۰, x\neq ۸\}=\mathbb{R}>۰-\{۸\}=(۰,۸)\cup(۸,+\infty)$

۱۳- گزینه‌ی ۲

اگر نمودار تابع $y=|\frac{۱}{۲}x|-۲$ را ۴ واحد به سمت چپ منتقل کنیم معادله به صورت $y=|\frac{۱}{۲}(x+۴)|-۲$ در می‌آید و اگر یک واحد به بالا منتقل کنیم به صورت $y=|\frac{۱}{۲}(x+۴)|-۲+۱$ در می‌آید.

$$\begin{cases} y_{\text{قدیم}}=|\frac{۱}{۲}x|-۲ \\ y_{\text{جدید}}=|\frac{۱}{۲}x+۲|-۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} |\frac{۱}{۲}x|-۲=|\frac{۱}{۲}x+۲|-۱$$

$$\xrightarrow{\times ۲} |x|-۴=|x+۴|-۲ \Rightarrow |x|-|x+۴|=۲ \xrightarrow{\text{مشاهده‌ی گزینه‌ها}} x=-۳$$

۱۴- گزینه‌ی ۱

با توجه به این که زوج مرتب‌های تابع همانی $(y=x)$، به صورت (x,x) هستند، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{cases} a+b=۱ \\ b+c=۲ \\ c+a=۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} ۲(a+b+c)=۶ \Rightarrow a+b+c=۳$$

۱۵- گزینه‌ی ۳

$D_f:۱-x^۲\geq ۰ \Rightarrow x^۲\leq ۱ \Rightarrow -۱\leq x\leq ۱, D_g=\{-۳,-۱,۰\}$

کاملاً مشخص است که دامنه‌ی $(g-f).۲g$ برابر است با: $D_f\cap D_g$ یعنی $D_f\cap D_g=\{-۱,۰\}$

$$\left.\begin{matrix} ((g-f).۲g)(-۱)=(g(-۱)-f(-۱)).۲g(-۱)=(۴-۰)\times ۲(۴)=۳۲ \\ ((g-f).۲g)(۰)=(g(۰)-f(۰)).۲g(۰)=(۷-۱)\times ۲(۷)=۸۴ \end{matrix}\right\} \Rightarrow (g-f).۲g=\{(-۱,۳۲),(۰,۸۴)\} \Rightarrow$$

بیشترین مقدار تابع برابر ۸۴ است.

۱۶- گزینه‌ی ۳

ابتدا با تعیین علامت، قدرمطلق را برمی‌داریم:

$$y=\begin{cases} x^۲-۲x & x\geq ۲ \\ -x^۲+۲x & x<۲ \end{cases}$$

برای تشخیص نزولی بودن از تابع مشتق گرفته کوچک‌تر از صفر قرار می‌دهیم.

$$x\geq ۲: y=x^۲-۲x \to y'=۲x-۲<۰ \to ۲x<۲ \to x<۱ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \varnothing$$

$$x<۲: y=-x^۲+۲x \to y'=-۲x+۲<۰ \to -۲x<-۲ \to x>۱ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} ۱<x<۲$$

پس تابع در $(۱,۲)$ نزولی است حال ضابطه‌ی معکوس را پیدا می‌کنیم.

$$y=-x^۲+۲x \to y=-(x^۲-۲x) \to y=-((x-۱)^۲-۱) \to y=-(x-۱)^۲+۱$$

$$\to (x-۱)^۲ = ۱-y \to x-۱ = \pm\sqrt{۱-y} \xrightarrow[\text{سمت چپ مثبت است}]{۱<x<۲} x-۱=\sqrt{۱-y} \to x = ۱+\sqrt{۱-y} \to f^{-۱}(x) = ۱+\sqrt{۱-x}$$

روش دوم:

متوجه شریم که تابع $(۱<x<۲)y=-x^۲+۲x$ است یک عدد دلخواه مثلاً $x=\frac{۳}{۲}$ در تابع قرار می‌دهیم.

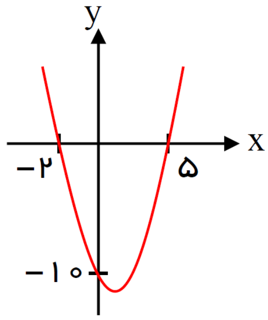
$$x=\frac{۳}{۲} \to y=\frac{۳}{۴} \to \left|\begin{matrix}\frac{۳}{۲}\\ \frac{۳}{۴}\end{matrix}\right. \in f \to \left|\begin{matrix}\frac{۳}{۴}\\ \frac{۳}{۲}\end{matrix}\right. \in f^{-۱} \to$$ فقط در گزینه‌ی سوم صدق می‌کند.

۱۷- گزینه‌ی ۳

کافی است تابع درجه‌ی دوم را رسم کنیم در این تابع چون ضریب $x^۲$ مثبت است تابع دارای Min است حال محل برخورد تابع با محورهای مختصات را به دست می‌آوریم.

$$y=۰ \to x^۲-۳x-۱۰=۰ \to (x-۵)(x+۲)=۰ \to x=-۲, x=۵$$

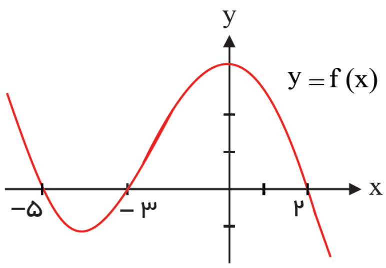
$$x=۰ \to y=-۱۰$$



واضح است اگر نمودار تابع f را حداقل دو واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم طول نقاط برخورد نمودار تابع f با محور xها غیر منفی می‌باشد.

۱۸- گزینه‌ی۴

اگر نمودار $f(x-۲)$ را دو واحد به سمت چپ منتقل کنیم نمودار تابع $f(x)$ به دست می‌آید



برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف $\sqrt{xf(x)}$ باید زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.

$$xf(x) \geq ۰ \to xy \geq ۰ \xrightarrow{x,y \text{ باید هم علامت باشند}} [-۵,-۳] \cup [۰,۲]$$

۱۹- گزینه‌ی۳

در ابتدا باید تکلیف قدرمطلق‌ها را معلوم کنیم. پس از تابع مشتق گرفته و بزرگ‌تر از صفر قرار دهیم.

x	$-\infty$		-۱		۳		$+\infty$
$۲x-۶$		$-$		$-$	۰	$+$	
$x+۱$		$-$	۰	$+$		$+$	

$x<-۱: y=-۲x+۶-(-x-۱) \to y=-x+۷ \to y'=-۱<۰$ نزولی

$-1\le x\le 3: y=-2x+6-(x+1)\rightarrow y=-3x+5\rightarrow y'=-3<0\rightarrow$ نزولی

$x>3: y=2x-6-(x+1)\rightarrow y=x-7\rightarrow y'=1>0\rightarrow$ صعودی

پس باید ضابطه‌ی معکوس تابع $y=x-7$ را به ازای $x>3$ به دست آوریم.

$y=x-7\rightarrow x=y+7\rightarrow f^{-1}(x)=x+7, x>-4$

توجه کنید: $y=x-7\xrightarrow{x>3} y>-4$

دقت کنید $y>-4$ برد تابع f است که در حقیقت دامنه‌ی تابع معکوس است.

۲۰- گزینه‌ی ۱

روش اول:

$$\begin{cases} x\ge 0; y=\dfrac{x}{1+x}\Rightarrow y+xy=x\Rightarrow x=\dfrac{y}{1-y}\xrightarrow{x\ge 0}\dfrac{y}{1-y}\ge 0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0\le y<1 \quad (1)\\ x\le 0; y=\dfrac{x}{1-x}\Rightarrow y-xy=x\Rightarrow x=\dfrac{y}{1+y}\xrightarrow{x\le 0}\dfrac{y}{1+y}\le 0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1<y\le 0 \quad (2)\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$x=\begin{cases}\dfrac{y}{1-y}; 0\le y<1\\ \dfrac{y}{1+y}; -1<y\le 0\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{y}{1-|y|}, |y|<1\rightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{x}{1-|x|}; |x|<1$$

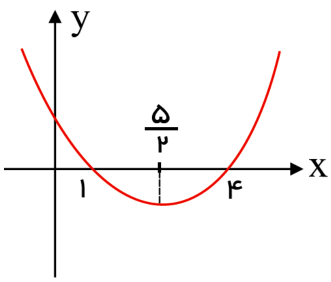
روش دوم:

می‌توانید نقطه‌ی دلخواهی از تابع را در نظر گرفته و جای x و y را عوض کرده و کنترل کنیم که این مختصات در کدام ضابطه صدق می‌کند. به عنوان مثال، نقطه‌ی $(2,\frac{2}{3})$ متعلق به تابع است. پس نقطه‌ی $(\frac{2}{3},2)$ متعلق به ضابطه‌ی وارون می‌باشد. با کمی دقت پی می‌بریم که این مختصات تنها در گزینه‌ی ۱ صدق می‌کند.

۲۱- گزینه‌ی ۱

چون $x=1$ و $x=4$ ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $f(x)=0$ می‌باشند بنابراین می‌توان، عبارت درجه‌ی دوم را به صورت $f(x)=(x-1)(x-4)$ نشان داد. بنابراین $a=1$ و $b=4$ می‌باشد.

$f(x)=x^2-5x+4\rightarrow x_S=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{5}{2}\xrightarrow{\text{به شکل دقت کنید}}$



تابع درجه‌ی دوم در $(-\infty,\frac{5}{2}]$ و $[\frac{5}{2},+\infty)$ یک‌به‌یک می‌باشد پس $c=\frac{5}{2}$ می‌باشد بنابراین $abc=(1)(4)(\frac{5}{2})=10$ است.

توجه کنید که تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ در $x\le\frac{-b}{۲a}$ و $x\ge\frac{-b}{۲a}$ یک‌به‌یک است.

۲۲- گزینه‌ی ۲

$y=(f.g)(x)=f(x)g(x)=x^۲-x^۲+۱=۱\to$ خط افقی

از طرفی: $D_{f.g}=D_f\cap D_g$

$$\to\begin{cases}g(x)=x-\sqrt{x^۲-۱}\\ f(x)=x+\sqrt{x^۲-۱}\end{cases}\Rightarrow x^۲-۱\ge ۰\Rightarrow x^۲\ge ۱\Rightarrow |x|\ge ۱\Rightarrow x\le -۱ \text{ یا } x\ge ۱$$

۲۳- گزینه‌ی ۲

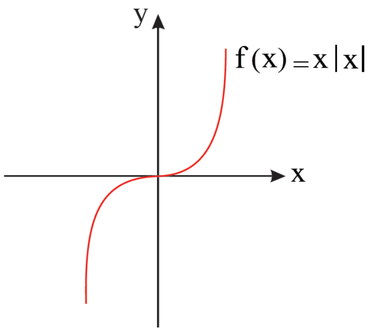
چون در صورت سوال $f(۳)$ را خواسته، ابتدا هر یک از عبارت‌های $x-۲$ و $۲-x$ را مساوی ۳ قرار می‌دهیم:

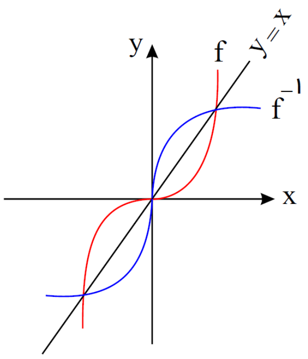
$x-۲=۳\to x=۵, ۲-x=۳\to x=-۱$

$$\left.\begin{array}{l}x=۵\to ۵f(۳)+f(-۳)=۲۱\\ x=-۱\to ۵f(-۳)+f(۳)=-۳\end{array}\right\}\xrightarrow{\times(-۵)}-۲۴f(۳)=-۱۰۸\to f(۳)=۴/۵$$

۲۴- گزینه‌ی ۳

$$f(x)=x|x|=\begin{cases}x^۲ & x\ge ۰\\ -x^۲ & x<۰\end{cases}\to$$





برای رسم تابع معکوس، کافی است قرینه ی شکل را نسبت به نیمساز ناحیه ی اول و سوم، رسم کنیم.

۲۵- گزینه‌ی ۲

اگر در $\frac{۷+x}{۷-x}$، x را به $-x$ تبدیل کنیم در این صورت عبارت خواسته شده حاصل می‌گردد.

$$f\left(\frac{۷+x}{۷-x}\right)=x^۷+x^۶\xrightarrow{x\to -x}f\left(\frac{۷-x}{۷+x}\right)=(-x)^۷+(-x)^۶=-x^۷+x^۶$$

۲۶- گزینه‌ی ۳

می‌دانیم : $\boxed{\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab}}$

جلوی لگاریتم مثبت باشد.

$$ax+b>0\rightarrow ax>-b\rightarrow\begin{cases}a>0\rightarrow x>\frac{-b}{a}\\ a<0\rightarrow x<\frac{-b}{a}\xrightarrow{x<1}\frac{-b}{a}=1\rightarrow b=-a\end{cases}$$

$$f(x)=\log(ax-a)\rightarrow f(x)=\log a(x-1)\xrightarrow{\text{۲ واحد به سمت چپ}}g(x)=\log a(x+2-1)$$

$$=\log a(x+1)\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور xها}}h(x)=-\log a(x+1)$$

دو منحنی را تلاقی می‌دهیم $\rightarrow\log a(x-1)=-\log a(x+1)\rightarrow\log a(x-1)+\log a(x+1)=0$

$$\rightarrow\log a^2(x+1)(x-1)=0\rightarrow\log a^2(x^2-1)=0\xrightarrow{x=\sqrt{5}}\log 4a^2=0$$

$$\xrightarrow{\log 1=0}4a^2=1\rightarrow a^2=\frac{1}{4}\rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\ \text{غ ق ق (با توجه به دامنه)}\\ a=\frac{-1}{2}\end{cases}$$

پس: $f(x)=\log\frac{-1}{2}(x-1)\rightarrow f(-19)=\log\frac{-1}{2}(20)=\log 10=1$

۲۷- گزینه‌ی ۲

ابتدا وارون تابع داده شده را پیدا کرده و آن را با تابع اصلی تلاقی می‌دهیم و می‌دانیم برای پیدا کردن تابع وارون کافی است که x را برحسب y به دست آورده و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$y=\frac{x+4}{x-2}\rightarrow xy-2y=x+4\rightarrow xy-x=2y+4\rightarrow x(y-1)=2y+4\rightarrow x=\frac{2y+4}{y-1}$$

$$\rightarrow f^{-1}(x)=\frac{2x+4}{x-1}$$

تلاقی: $f(x)=f^{-1}(x)\rightarrow\frac{x+4}{x-2}=\frac{2x+4}{x-1}\rightarrow 2x^2-4x+4x-8=x^2-x+4x-4$

$$\rightarrow x^2-3x-4=0\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}x=-1\\ x=-\frac{c}{a}=4\end{cases}$$

۲۸- گزینه‌ی ۲

ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع f و g را بدست می‌آوریم.

$$f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}\rightarrow D_f=\mathbb{R}$$

$$g(x)=\sqrt{x-x^2} \to D_g : x-x^2 \geq 0 \to x(1-x)\geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0\leq x\leq 1$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f , f(x)\in D_g\}=\{\underbrace{x\in\mathbb{R}}_{I}, 0\leq \frac{1-x^2}{1+x^2}\leq 1\}$$

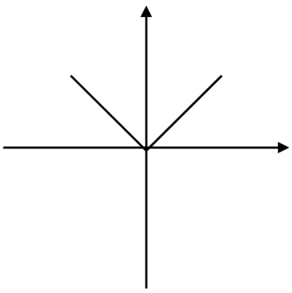
$$\frac{1-x^2}{\underbrace{1+x^2}_{+}}\geq 0 \to 1-x^2\geq 0 \to x^2\leq 1 \to -1\leq x\leq 1: \quad II$$

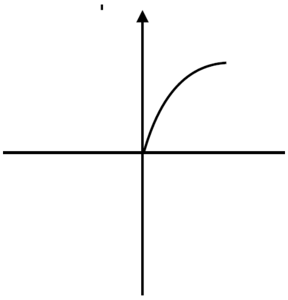
$$\frac{1-x^2}{1+x^2}\leq 1 \to \frac{1-x^2}{1+x^2}-1\leq 0 \to \frac{1-x^2-1-x^2}{1+x^2}\leq 0 \to \frac{\overbrace{-2x^2}^{\text{منفی یا صفر}}}{\underbrace{1+x^2}_{+}}\leq 0 \qquad III: \text{همواره برقرار است}$$

از اشتراک سه جواب به دست آمده به جواب $-1\leq x\leq 1$ می‌رسیم. $(x\in[-1,1])$

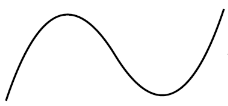
۲۹- گزینه‌ی ۲

شکل معرّف تابع یک‌به‌یک است که اگر هر خطی موازی محور طول رسم کنیم شکل را حداکثر در یک نقطه قطع کند نه بیشتر. تابعی که به صورت زوج مرتب داده شده است زمانی یک‌به‌یک است که هیچ دو زوج متمایزی در آن دارای مولفه‌ی دوم یکسان نباشد.

گزینه‌ی اول: $f(x)=|x| \to$  $\to$ یک به یک نمی‌باشد.

گزینه‌ی دوم: $f(x)=|\sqrt{x}| \to$  $\to$ یک به یک است.

گزینه‌ی سوم: $f=\{(1,2),(3,-1),(0,3),(4,2)\} \to (1,2),(4,2) \to$ یک به یک نیست

گزینه‌ی چهارم: $f(x)=x^3-x^2 \to$  $\to$ یک به یک نیست

۳۰- گزینه‌ی ۳

$$f(1)=5 \to a^2+4a=5 \to a^2+4a-5=0 \to (a+5)(a-1)=0 \to a=-5, a=1$$

اکنون قابل قبول بودن این دو مقدار را بررسی می‌کنیم:

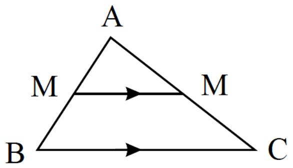
$a=1 \to f=\{(3,4),(1,5),(3,0),(2,1)\} \to$ تابع نمی‌باشد.

$a=-5 \to f=\{(3,4),(1,5),(-3,30),(-10,625)\} \to$ تابع است.

پس $f(-3)=30$ است.

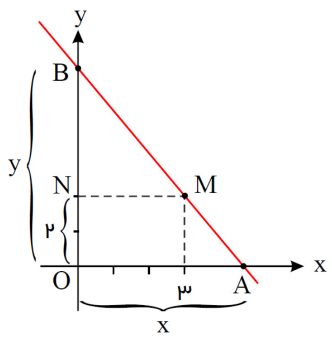
۳۱- گزینه‌ی ۳

با توجه به قضیه‌ی تالس در مثلث ABC، اگر MN موازی BC باشد، آنگاه:



$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

در شکل روبه‌رو $MN \| OA$، پس طبق قضیه‌ی تالس داریم:



$$\frac{BN}{OB}=\frac{MN}{OA} \Rightarrow \frac{y-2}{y}=\frac{3}{x}$$

حال از تساوی بالا y را برحسب x به‌دست می‌آوریم:

$$xy-2x=3y \Rightarrow 2x=xy-3y \to 2x=y(x-3) \to y=\frac{2x}{x-3}$$

بنابراین مساحت مثلث OAB برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}OA\times OB=\frac{1}{2}x\times y=\frac{1}{2}x\times\frac{2x}{x-3}=\frac{x^2}{x-3}$$

۳۲- گزینه‌ی ۱

ضابطه‌ی تابع ما را به یاد اتحاد $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$ انداخته و کافی است به جای عبارت x^3-2x^2+3x در رابطه‌ی داده شده از $(x+1)^3-1$ استفاده کنیم. داریم:

$$f(x+1)=(x+1)^3-1-1=(x+1)^3-2 \xrightarrow[x+1=t]{\text{با فرض}} f(t)=t^3-2$$

که اگر معادله‌ی $f(a)=a^3-2=0$ را حل کنیم به جواب $a=\sqrt[3]{2}$ می‌رسیم.

۳۳- گزینه‌ی ۲

روشن است که برای تعیین دامنه‌ی g نیاز به حل نامعادله‌ی $\frac{۴x-x^{۲}}{f(x)} \geq ۰$ داریم. برای این منظور می‌بایستی عبارت $P=۴x-x^{۲}$ را در یک جدول جداگانه تعیین علامت کنیم و در سطر آخر علامت عبارت کسری مورد نظر را از ضرب علامت‌های دو عبارت P، $f(x)$ به دست آوریم. دقت کنید که در نمودار f محل تلاقی نمودار ریشه‌های $f(x)=۰$ هستند که تابع g در آن‌ها تعریف نمی‌شود. همچنین از نمودار f پیداست که علامت مقادیر تابع برای $x<-۱$ مثبت، برای $-۱<x<۳$ منفی و برای $۳<x<۵$ نیز مثبت است.

x		-۱		۰		۳		۴		۵
P	$-$		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$	
$f(x)$	$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$		$+$	۰
$\frac{P}{f(x)}$	$-$		$+$		$-$		$+$		$-$	

$\xrightarrow{\text{با توجه به جدول}} D_g=(-۱,۰]\cup(۳,۴] \rightarrow$ که در بازه‌ی نیم‌باز می‌باشد.

۳۴- گزینه‌ی ۱

ابتدا باید دقت کنید که این تابع زمانی معین است که $ax+b>۰$ یا $ax>-b$ باشد و اما این نامعادله بسته به علامت a می‌تواند به یکی از دو حالت $x>\frac{-b}{a}$ یا $x<\frac{-b}{a}$ باشد که با توجه به دامنه‌ی $D_f=(-\frac{۲}{۳},+\infty)$ حالت $x>\frac{-b}{a}$ (یعنی برای $a>۰$) قابل قبول است که با مقایسه‌ی این دو (یعنی $x>-\frac{۲}{۳}$ با $x>\frac{-b}{a}$) به این نتیجه می‌رسیم که $\frac{-b}{a}=\frac{-۲}{۳}$ یا $b=\frac{۲}{۳}a$ است. از طرف دیگر تابع از نقطه‌ی $(۲,۱)$ عبور کرده و داریم:

$$۱=\log_{۲}^{(۲a+b)} \rightarrow ۲a+b=۲^{۱}=۲$$

حال برای تعیین b,a با توجه به روابط $b=\frac{۲}{۳}a$ و $۲a+b=۲$ داریم:

$$۲a+\frac{۲}{۳}a=۲ \rightarrow \frac{۸}{۳}a=۲ \xrightarrow{\times\frac{۳}{۸}} a=۲\times\frac{۳}{۸}=\frac{۳}{۴}, b=\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۲} \rightarrow a+b=\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۴}$$

۳۵- گزینه‌ی ۳

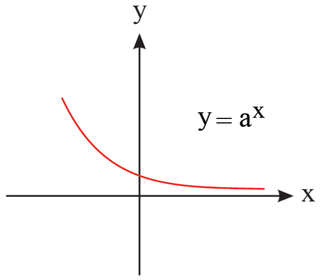
کافی است ریشه‌های مخرج را شمارش کنیم:

$$\text{مخرج}=(x-۲)(\sqrt[۳]{x}+۱)=۰ \xrightarrow{\text{ویژگی حاصل ضرب صفر}} \begin{cases} x-۲=۰ \rightarrow x=۲ \\ \text{یا} \\ \sqrt[۳]{x}+۱=۰ \rightarrow \sqrt[۳]{x}=-۱ \xrightarrow{\text{به توان ۳ می‌رسانیم}} x=(-۱)^{۳}=-۱ \end{cases}$$

$$D_f=\mathbb{R}-\{۲,-۱\}$$

۳۶- گزینه‌ی ۲

تابع $y=a^x$ به ازای $0<a<1$ اکیداً نزولی است و به صورت



است و به ازای $a=0$ و $a=1$ تابع ثابت و در نتیجه هم صعودی و هم نزولی است پس برای آنکه تابع داده شده نزولی باشد باید:

$$0 \le \frac{3m+1}{4} \le 1 \to 0 \le 3m+1 \le 4 \to -1 \le 3m \le 3 \to \frac{-1}{3} \le m \le 1$$

که در این بازه، اعداد صحیح صفر و یک قرار دارند.

۳۷- گزینه‌ی ۳

تابع داده شده را رسم می‌کنیم.

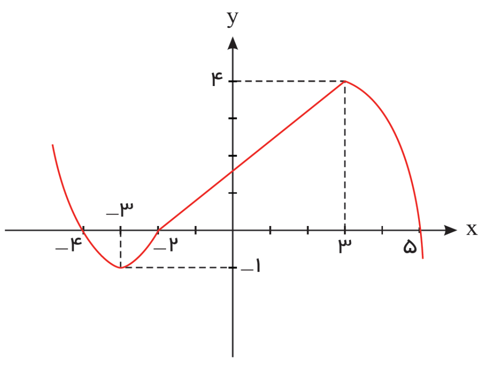
$$y_1=-x^2+6x-5=-(x^2-6x+5)=-(x-1)(x-5)\xrightarrow{\text{محل برخورد تابع با محور طول‌ها}}x=1,x=5$$

$$\to S\left|\begin{matrix}\frac{-b}{2a}\\ \frac{4ac-b^2}{4a}\end{matrix}\right. \to S\left|\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right.$$

$$y_2=\frac{4}{5}x+\frac{8}{5}\to\left|\begin{matrix}-2\\0\end{matrix}\right., \left|\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right.$$ دو نقطه برای رسم

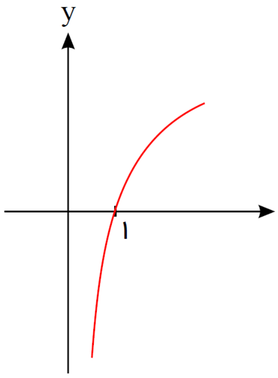
$$y_3=x^2+6x+8=(x+4)(x+2)\xrightarrow{\text{محل برخورد تابع با محور طول‌ها}}x=-4,x=-2$$

$$\to S=\left|\begin{matrix}\frac{-b}{2a}\\ \frac{4ac-b^2}{4a}\end{matrix}\right. \to S\left|\begin{matrix}-3\\-1\end{matrix}\right.$$



تابع داده شده در بازه‌ی $[-3,3]$ اکیداً صعودی است و طول این بازه برابر ۶ است.

۳۸- گزینه‌ی ۳

شکل فرضی  را می‌توان برای تابع f در نظر گرفت. برای تعیین دامنه‌ی تعریف توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج، کافی است زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم.

$$(x^۳ - x)f(x) \geq ۰ \to \begin{cases} x^۳ - x = ۰ \to x(x^۲ - ۱) = ۰ \to x = ۰, x = \pm ۱ \\ f(x) = ۰ \to x = ۱ \end{cases}$$

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
$x^۳ + x$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$f(x)$		$-$		$-$		$-$	۰	$+$	
عبارت $\geq x$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$+$	

بنابراین دامنه‌ی تعریف تابع داده شده به صورت $\mathbb{R} - (-۱, ۰)$ است پس:

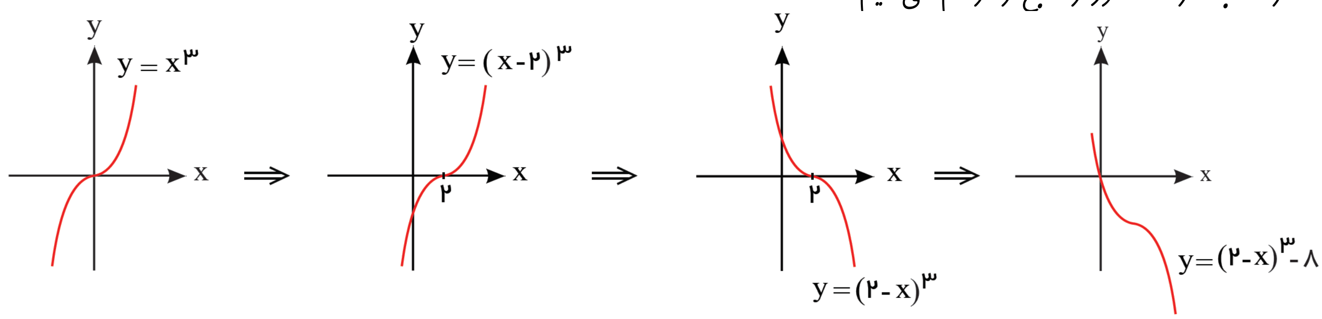
$$\begin{cases} a = -۱ \\ b = ۰ \end{cases} \to a + b = -۱$$

۳۹- گزینه‌ی ۱

عدد ۸ را اضافه و کم می‌کنیم:

$$f(x) = \underbrace{۶x^۲ - x^۳ - ۱۲x + ۸}_{(۲-x)^۳} - ۸ = (۲ - x)^۳ - ۸$$

حالا مرحله به مرحله نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



۴۰- گزینه‌ی ۴

ابتدا معادله‌ی خطی را می‌نویسیم که از دو نقطه‌ی $A\Big|_{۰}^{۲}$ و $B\Big|_{-۲}^{۰}$ می‌گذرد:

$$AB: \frac{y-y_A}{x-x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \to \frac{y}{x-۲} = \frac{۲}{۲} = ۱ \to y = x-۲ \xrightarrow{x=۴} y = ۲$$

برد تابع $f(x-۲)$ با تابع $f(x)$ برابراست. بنابراین:

$$R_{f(x)} = [-۲,۲] \Rightarrow R_{۳f(x)} = [-۶,۶] \Rightarrow R_{۳f(x)-۱} = [-۷,۵]$$
$$\Rightarrow ۰ \le |۳f(x)-۱| \le ۷ \Rightarrow ۰ \le \sqrt{|۳f(x)-۱|} \le \sqrt{۷}$$

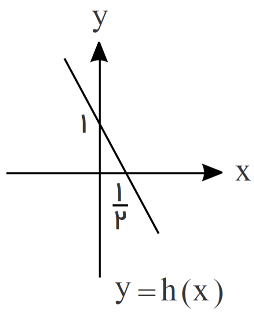
۴۱- گزینه‌ی ۴

برای رسیدن به نمودار تابع $h=f+g$ بهترین راهکار داشتن ضابطه‌ی آن است. با داشتن ضابطه‌های f و g به این مهم خواهیم رسید و اما برای ضابطه‌های f و g، با توجه به نمودارهای مربوطه داریم:

$$f: (\frac{-۳}{۲},۰),(۰,-۱) \to y+۱ = \frac{۰+۱}{\frac{-۳}{۲}-۰}(x-۰) \to y+۱ = -\frac{۲}{۳}x \to y = \frac{-۲}{۳}x - ۱ = f(x)$$

$$g: (۰,۲),(\frac{۳}{۲},۰) \to y-۲ = \frac{۲-۰}{۰-\frac{۳}{۲}}(x-۰) \to y-۲ = -\frac{۴}{۳}x \to y = \frac{-۴}{۳}x + ۲ = g(x)$$

$$\to h(x) = f(x)+g(x) = \frac{-۲}{۳}x - ۱ - \frac{۴}{۳}x + ۲ = -۲x+۱ \longrightarrow$$



برای رسم نمودار h به راحتی می‌توانیم دو نقطه از آن مانند $(۰,۱)$ و $(\frac{۱}{۲},۰)$ را پیدا و به هم وصل کرده و از دو طرف ادامه دهیم.

۴۲- گزینه‌ی ۲

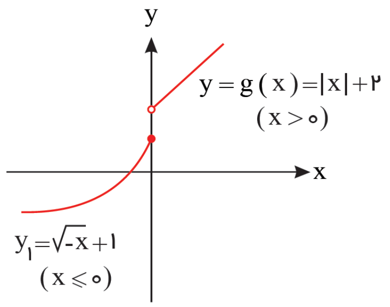
تابع f از حاصل‌ضرب دو تابع $g(x)=x$ و $h(x)=\tan\frac{۱}{x}$ تشکیل شده و دامنه‌ی آن اشتراک دامنه‌ی این دو تابع می‌باشد. تابع g برای همه‌ی xهای حقیقی معین بوده و فقط باید دامنه‌ی h را بیابیم و اما تابع h ذاتاً یک تابع کسری بوده و داریم:

$$h(x) = \tan\frac{۱}{x} = \frac{\sin\frac{۱}{x}}{\cos\frac{۱}{x}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}\neq 0 \rightarrow x\neq 0 \\ \text{و} \\ \cos\frac{1}{x}\neq 0 \rightarrow \frac{1}{x}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{2k\pi+\pi}{2}\rightarrow x\neq\frac{2}{2k\pi+\pi}\rightarrow x\neq \frac{2}{(2k+1)\pi}\end{cases} \rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{0,\frac{2}{(2k+1)\pi}\}$$

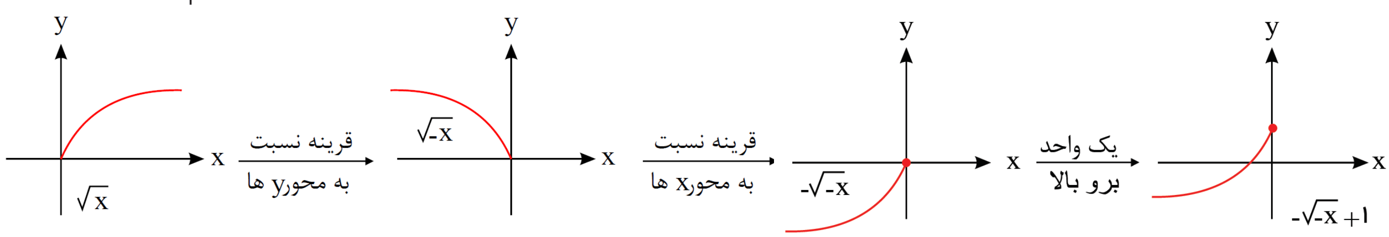
۴۳- گزینه‌ی ۴

بهتر است نمودار تابع f را برای $x \leq 0$ (که ضابطه‌ای مشخص دارد) رسم کرده و بررسی کنیم ببینیم با انتخاب کدام گزینه برای ضابطه‌ی g (که حالت $x > 0$ را شامل می‌شود) هر خط افقی در بیش از یک نقطه نمودار آن را قطع نمی‌کند:



می‌بینیم که با انتخاب $g(x) = |x| + 2$ نمودار تابع f به گونه‌ای می‌شود که هیچ خط افقی پیدا نمی‌شود که نمودار آن را در پیش نقطه قطع کند.

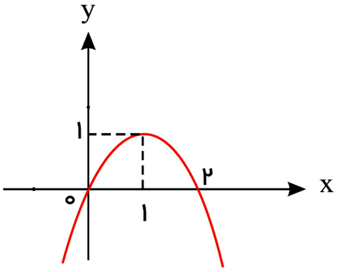
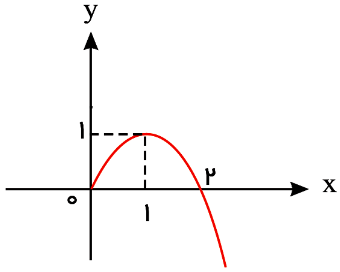
روند ترسیم نمودار $y_1 = -\sqrt{-x} + 1$ را ببینید:

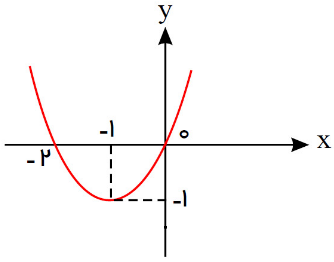
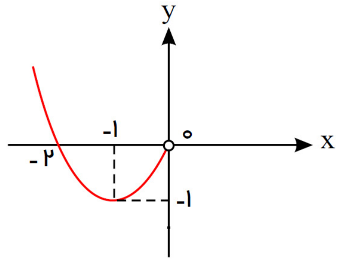


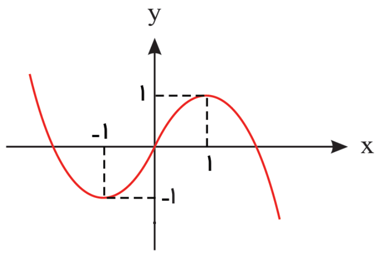
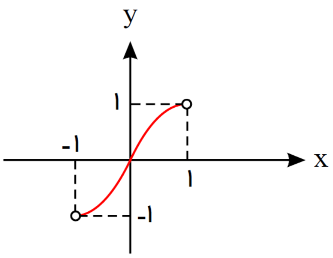
۴۴- گزینه‌ی ۲

ابتدا با گذاشتن شرط، قدرمطلق را از بین می‌بریم:

$$x \geq 0 \rightarrow y = 2x - x^2 \rightarrow S\left|\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\frac{-b}{2a} \\ \frac{4ac-b^2}{4a}\end{matrix}\right\} \rightarrow S\left|\begin{matrix}1 \\ 1\end{matrix}\right. \\ \left.\begin{matrix}\frac{-b}{2a} \\ \frac{4ac-b^2}{4a}\end{matrix}\right\} \rightarrow S\left|\begin{matrix}-1 \\ -1\end{matrix}\right.\end{matrix}\right.$$

$y = ۲x - x^۲ \longrightarrow$  $\xrightarrow{x \geqslant ۰}$ 

$y = ۲x + x^۲ \longrightarrow$  $\xrightarrow{x < ۰}$ 

از ترکیب در شکل به  می‌رسیم که در بازه‌ی $(-۱,۱)$ به صورت  است صعودی است.

۱ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2\sin(\pi-x)\cos(\frac{3\pi}{2}+x)+3\cot x\sin(\pi+x)=0$ کدام است؟

۱) $x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$

۲) $x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$

۳) $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

۴) $x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

۲ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $(1+\tan^2 x)\cos(\pi+2x)=2$ به کدام صورت است؟

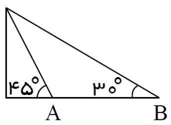
۱) $x=k\pi+\frac{\pi}{6}$

۲) $x=k\pi+\frac{\pi}{3}$

۳) $x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

۴) $x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

۳ از نوک پرچمی دو کابل در نقاط مشخص شده و در یک طرف دیگر به زمین متصل شده‌اند. اگر ارتفاع تیر $2\sqrt{2}$ متر باشد فاصله‌ی دو نقطه کدام است؟



۱) $2(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

۲) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

۳) $2(\sqrt{6}+2\sqrt{2})$

۴) $2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

۴ حاصل $\sin\frac{7\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$

۲) $\frac{1}{4}$

۳) $\frac{-1}{4}$

۴) $\frac{-1}{3}$

۵ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin^۴ x - \cos^۴ x = \sin^۲ \frac{۵\pi}{۴}$ به کدام صورت است؟

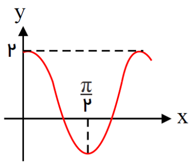
۱) $x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$

۲) $x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

۳) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$

۴) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

۶ اگر نمودار تابع $y = a\cos bx$ به صورت روبه‌رو باشد، کدام مقدار برای $a+b$ ممکن است؟



۱) ۳

۲) ۲

۳) ۶

۴) ۴

۷ اگر $\cos\alpha = ۲m + ۱$, $-\frac{\pi}{۳} < \alpha < \frac{\pi}{۳}$ باشد، حدود m کدام است؟

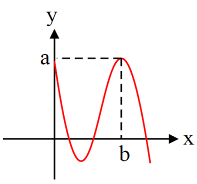
۱) $-\frac{۱}{۴} < m \leq ۰$

۲) $-\frac{۱}{۴} \leq m \leq \frac{۱}{۴}$

۳) فقط $m = -\frac{۱}{۴}$

۴) $-\frac{۱}{۲} \leq m \leq \frac{۱}{۲}$

۸ اگر نمودار $y = \cos^۲ x - \sin^۲ x$ به شکل مقابل باشد، دوتایی (a,b) کدام گزینه خواهد بود؟



۱) $(۲, ۲\pi)$

۲) $(۱, ۲\pi)$

۳) $(۲, \pi)$

۴) $(۱, \pi)$

۹ حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$، با فرض $\tan 15^\circ = 0/28$ کدام است؟

۱) $-\frac{16}{9}$

۲) $-\frac{9}{16}$

۳) $\frac{9}{16}$

۴) $\frac{16}{9}$

۱۰ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2}+x)} = 1$ به کدام صورت است؟

۱) $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

۲) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

۳) $x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$

۴) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

۱۱ نمودار تابع $y = 3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ روی بازه‌ی $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ در چند نقطه محور x ها را قطع می‌کند؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

۱۲ اگر $\tan\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2} = 1$ باشد، مقدار $\tan 2x$ کدام است؟

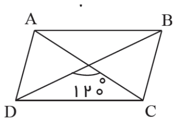
۱) $-\frac{3}{2}$

۲) $\frac{3}{4}$

۳) $\frac{4}{3}$

۴) $\frac{3}{2}$

۱۳ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ اندازه‌ی قطرها برابر ۶ و ۱۲ و زاویه‌ی بین دو قطر ۱۲۰° است. مساحت مثلث ACD کدام است؟

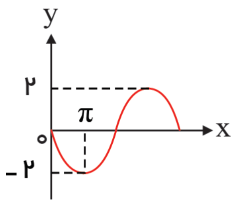


۱) $۱۸\sqrt{۳}$
۲) $۹\sqrt{۳}$
۳) ۱۸
۴) ۹

۱۴ مجموع تمام جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin ۵x + \sin ۴x = ۱ + \cos \pi$ در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟

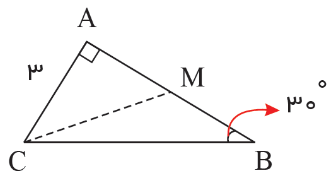
۱) ۸π
۲) ۹π
۳) ۱۰π
۴) ۱۱π

۱۵ اگر نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = b\cos(\frac{۳\pi}{۲} + ax)$ به صورت زیر باشد، ab کدام است؟ $(a > ۰)$



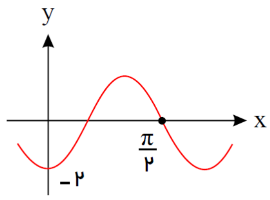
۱) -۲
۲) -۱
۳) $-\frac{۳}{۲}$
۴) ۱

۱۶ در شکل زیر، $AC = ۳$ ، $\hat{A} = ۹۰^\circ$ و $\hat{B} = ۳۰^\circ$، اگر M وسط AB باشد، مساحت مثلث $\overset{\Delta}{MBC}$ کدام است؟



۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$
۲) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$
۳) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۵}$
۴) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$

۱۷ شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = a\sin(bx + \frac{\pi}{۲})$ است. مقدار $f(\frac{\pi}{۱۲})$ کدام است؟



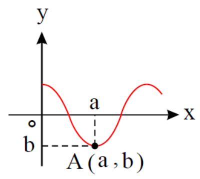
۱) $\sqrt{۲}$

۲) $۲\sqrt{۲}$

۳) $-\sqrt{۲}$

۴) $-۲\sqrt{۲}$

۱۸ اگر قسمتی از نمودار تابع $y = ۱ - ۲\sin^۲ x$ به صورت زیر باشد، مقدار $a \times b$ کدام است؟



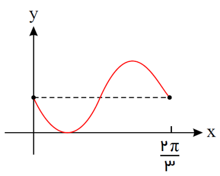
۱) π

۲) $-\pi$

۳) $\frac{\pi}{۲}$

۴) $-\frac{\pi}{۲}$

۱۹ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = ۱ - \sin mx$ است. مقدار تابع در نقطه‌ی $x = \frac{۷\pi}{۶}$، کدام است؟



۱) صفر

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۱

۴) ۲

۲۰ حاصل $\cot^۴ \frac{\pi}{۸} - \tan^۴ \frac{\pi}{۸}$ چند برابر $\sqrt{۲}$ است؟

۱) ۱۲

۲) -۱۲

۳) ۲۴

۴) -۲۴

۲۱ اگر $\cos x - \sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{4\sin x}$، حاصل $\sin 4x$ کدام است؟

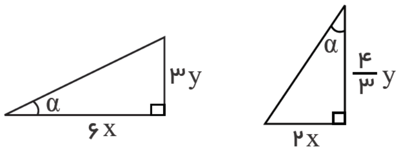
۱) $\frac{1}{2}-\sqrt{2}$

۲) $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$

۳) $\sqrt{2}-1$

۴) $1-\sqrt{2}$

۲۲ با توجه به شکل‌های روبه‌رو حاصل x^2+y^2 چقدر است؟



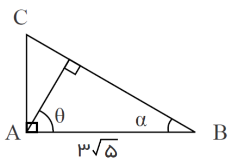
۱) $3x^2$

۲) $3y^2$

۳) $4x^2$

۴) $5y^2$

۲۳ در شکل مقابل زاویه‌ی θ چند درجه است؟ $(BC = 2\sqrt{15})$



۱) 30°

۲) 45°

۳) 53°

۴) 60°

۲۴ اگر انتهای کمان α در ربع چهارم باشد، آن‌گاه کدام رابطه صحیح است؟

۱) $\dfrac{\tan\alpha}{\cot\alpha} < 0$

۲) $\sin\alpha.\cos\alpha < 0$

۳) $\cos\alpha.\tan\alpha > 0$

۴) $\sin\alpha.\cot\alpha < 0$

۲۵ **اگر $\sin\alpha.\cos\alpha < 0$ و $\cos\alpha.\cot\alpha > 0$ باشد، α در کدام ناحیه قرار دارد؟**

۱) ربع اول

۲) ربع دوم

۳) ربع سوم

۴) ربع چهارم

۱- گزینه‌ی ۳

$$۲\sin(\pi-x)\cos(\frac{۳\pi}{۲}+x)+۳\cot x\sin(\pi+x)=۰\Rightarrow ۲\sin x.\sin x+۳\frac{\cos x}{\sin x}(-\sin x)=۰$$

$$\Rightarrow ۲\sin^{۲}x-۳\cos x=۰\Rightarrow ۲(۱-\cos^{۲}x)-۳\cos x=۰\Rightarrow ۲\cos^{۲}x+۳\cos x-۲=۰$$

$$\xrightarrow{\cos x=A} ۲A^{۲}+۳A-۲=۰\Rightarrow \Delta=b^{۲}-۴ac=۹+۱۶=۲۵\to\begin{cases}A=\dfrac{-۳+۵}{۴}=\dfrac{۱}{۲}\\ A=\dfrac{-۳-۵}{۴}=۲\end{cases}$$

$$A=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \cos x=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\alpha\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

$A=-۲\Rightarrow \cos x=-۲$ امکان ندارد $(-۱\le\cos x\le۱)$

۲- گزینه‌ی ۴

می‌دانیم: $\boxed{۱+\tan^{۲}\alpha=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha},۲\cos^{۲}x=۱+\cos۲x}$

$$(۱+\tan^{۲}x).\cos(\pi+۲x)=۲\Rightarrow(\frac{۱}{\cos^{۲}x})(-\cos۲x)=۲\Rightarrow ۲\cos^{۲}x=-\cos۲x$$

$$\Rightarrow ۱+\cos۲x=-\cos۲x\Rightarrow ۲\cos۲x=-۱\Rightarrow \cos۲x=-\frac{۱}{۲}=\cos\frac{۲\pi}{۳}$$

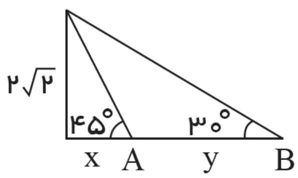
$$\xrightarrow{x=۲k\pi\pm\alpha} ۲x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

۳- گزینه‌ی ۴

$$\tan۴۵=\frac{۲\sqrt{۲}}{x}\to ۱==\frac{۲\sqrt{۲}}{x}\to x=۲\sqrt{۲}$$

$$\tan۳۰=\frac{۲\sqrt{۲}}{x+y}\to\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۲\sqrt{۲}}{x+y}\to x+y=\frac{۶\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۶}$$

پس: $x+y=۲\sqrt{۶}\to ۲\sqrt{۲}+y=۲\sqrt{۶}\to y=۲(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})$



۴- گزینه‌ی ۲

می‌دانیم: $\boxed{\sin u.\cos u=\frac{۱}{۲}\sin۲u}$

$$\sin\frac{\pi}{۱۲}\sin\frac{۷\pi}{۱۲}=\sin\frac{\pi}{۱۲}\sin(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۱۲})=\sin\frac{\pi}{۱۲}\cos\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\sin(\frac{۲\pi}{۱۲})=\frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۴}$$

۵- گزینه‌ی ۴

می‌دانیم: $\boxed{\cos۲\alpha=\cos^{۲}\alpha-\sin^{۲}\alpha}$

$$\sin^4 x-\text{coos}^4 x=\sin^2\frac{5\pi}{4}\Rightarrow(\sin^2 x-\cos^2 x)(\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1})=\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2\Rightarrow-\cos 2x=\frac{1}{2}$$

$$\cos 2x=-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}\xrightarrow{x=2k\pi\pm\alpha}2x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

توجه کنید که $\sin\frac{5\pi}{4}=\sin(\pi+\frac{\pi}{4})=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

۶- گزینه‌ی ۴

می‌دانیم: دوره‌ی تناوب تابع $y=k.\cos ax$ برابر $T=\frac{2\pi}{|a|}$ است.

با توجه به شکل، نقطه‌ی $(0,2)$ عضو تابع است پس در آن صدق می‌کند:

$$y(0)=2\Rightarrow 2=a\cos 0\Rightarrow a=2$$

از طرفی نصف دوره‌ی تناوب تابع با توجه به شکل برابر $\frac{\pi}{2}$ است، بنابراین:

$$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow T=\pi\Rightarrow\frac{2\pi}{|b|}=\pi\Rightarrow|b|=2\Rightarrow b=\pm 2$$

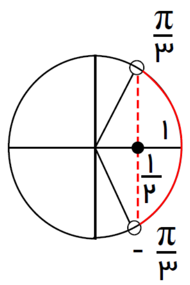
هر دو مقدار b قابل قبول است. پس $a+b$ می‌تواند برابر مقادیر صفر یا ۴ باشد.

۷- گزینه‌ی ۱

با توجه به دایره‌ی مثلثاتی وقتی $-\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{\pi}{3}$، کسینوس زاویه‌ی α در فاصله‌ی $(\frac{1}{2},1]$ قرار دارد، لذا:

$$\frac{1}{2}<\cos\alpha\le\Rightarrow\frac{1}{2}<2m+1\le 1$$

$$\rightarrow-\frac{1}{2}<2m\le 0\Rightarrow-\frac{1}{4}<m\le 0$$



۸- گزینه‌ی ۴

تابع $y=\cos^2 x-\sin^2 x$ برابر است با $y=\cos 2x$. با توجه به نمودار، مقدار a به ازای $x=0$ در تابع موردنظر به دست می‌آید:

$$y=\cos 2x\xrightarrow{x=0}y=\cos 2(0)=\cos 0=1\Rightarrow a=1$$

از طرفی در $x=b$، دوباره مقدار y به $a=1$ می‌رسد.

پس:

$$f(b)=1\rightarrow\cos 2b=1\rightarrow\begin{cases}2b=0\rightarrow b=0 & \text{غ ق ق}\\ 2b=2\pi\rightarrow b=\pi\end{cases}$$

۹- گزینه‌ی ۱

ابتدا تمام زوایا را برحسب $۱۵°$ می‌نویسیم:

$$\cos ۲۸۵° = \cos(۲۷۰° + ۱۵°) = \sin ۱۵°, \sin ۲۵۵° = \sin(۲۷۰° - ۱۵°) = -\cos ۱۵°$$

$$\sin ۵۲۵° = \sin(۵۴۰° - ۱۵°) = \sin(۱۸۰° - ۱۵°) = \sin ۱۵°, \sin ۱۰۵° = \sin(۹۰° + ۱۵°) = \cos$$

بنابراین داریم: $\dfrac{\cos ۲۸۵° - \sin ۲۵۵°}{\sin ۵۲۵° - \sin ۱۰۵°} = \dfrac{\sin ۱۵° + \cos ۱۵°}{\sin ۱۵° - \cos ۱۵°}$

تمام جملات را بر $\cos ۱۵°$ تقسیم می‌کنیم در نتیجه:

$$\frac{\tan ۱۵° + ۱}{\tan ۱۵° - ۱} = \frac{۰/۲۸ + ۱}{۰/۲۸ - ۱} = \frac{۱/۲۸}{-۰/۷۲} = \frac{-۱۲۸}{۷۲} = -\frac{۱۶}{۹}$$

۱۰- گزینه‌ی ۴

$$\frac{\sin ۳x}{\cos(\frac{۳\pi}{۲} + x)} = ۱ \rightarrow \frac{\sin ۳x}{s\sin x} = ۱ \xrightarrow{\sin x \neq ۰ \rightarrow x \neq k\pi} \sin ۳x = \sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x = ۲k\pi + \alpha} ۳x = ۲k\pi + x \rightarrow ۲x = ۲k\pi \rightarrow x = k\pi \\ \xrightarrow{x = ۲k\pi + \pi - \alpha} ۳x = ۲k\pi + \pi - x \rightarrow ۴x = ۲k\pi + \pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

چون $x \neq k\pi$ می‌باشد پس جواب $x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$ است.

۱۱- گزینه‌ی ۴

برای پیدا کردن نقاط برخورد نمودار تابع $y = ۳\sin(\frac{\pi}{۴} - ۲x)$ با محور xها روی بازه‌ی $[-\pi, \frac{۳\pi}{۲}]$ قرار دارند به دست می‌آوریم:

$$۳\sin(\frac{\pi}{۴} - ۲x) = ۰ \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{۴} - ۲x) = ۰$$

$$\xrightarrow[x = k\pi]{\text{حالت خاص}} \frac{\pi}{۴} - ۲x = k\pi \Rightarrow -۲x = k\pi - \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۸} - \frac{k\pi}{۲}$$

حال، جواب‌های قابل قبول x را که در بازه‌ی $[-\pi, \frac{۳\pi}{۲}]$ قرار دارند به دست می‌آوریم:

$$k = ۲ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۸} - \pi = -\frac{۷\pi}{۸}, k = ۱ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۸} - \frac{\pi}{۲} = -\frac{۳\pi}{۸}$$

$$k = ۰ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۸}, k = -۱ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۸} + \frac{\pi}{۲} = \frac{۵\pi}{۸}$$

$$k = -۲ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۸} + \pi = \frac{۹\pi}{۸}$$

در نتیجه، پنج جواب قابل قبول وجود دارد.

۱۲- گزینه‌ی ۳

می‌دانیم: $\boxed{\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}, \cot\alpha - \tan\alpha = ۲\cot ۲\alpha}$

$$\tan\frac{x}{۲} - \cot\frac{x}{۲} = ۱ \rightarrow \cot\frac{x}{۲} - \tan\frac{x}{۲} = -۱ \rightarrow ۲\cot x = -۱ \rightarrow \cot x = \frac{-۱}{۲} \rightarrow \tan x = -۲$$

$$\tan ۲x = \frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x} \rightarrow \tan ۲x = \frac{۲(-۲)}{۱-۴} = \frac{-۴}{-۳} = \frac{۴}{۳}$$

۱۳- گزینه‌ی ۲

مساحت متوازی‌الاضلاع برابر نصف حاصل ضرب دو قطر در سینوس زاویه‌ی بین آن‌ها می‌باشد.

$$S = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۱۲ \times \sin ۱۲۰ = ۳۶\sin ۶۰ = ۳۶(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = ۱۸\sqrt{۳}$$

مساحت مثلث ACD نصف مساحت متوازی‌الاضلاع، یعنی $۹\sqrt{۳}$ می‌باشد.

۱۴- گزینه‌ی ۴

$$\sin ۵x + \sin ۴x = ۱ + \underbrace{\cos\pi}_{-۱} \rightarrow \sin ۵x = -\sin ۴x \rightarrow \sin ۵x = \sin(-۴x)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x=۲k\pi+\alpha} ۵x = ۲k\pi - ۴x \rightarrow ۹x = ۲k\pi \rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۹} \\ \xrightarrow{x=۲k\pi+\pi-\alpha} ۵x = ۲k\pi + \pi + ۴x \rightarrow x = ۲k\pi + \pi \end{cases}$$

$x = \frac{۲k\pi}{۹} \rightarrow$

k	۰	۱	۲	۳	۴	...	۹
x	۰	$\frac{۲\pi}{۹}$	$\frac{۴\pi}{۹}$	$\frac{۶\pi}{۹}$	$\frac{۸\pi}{۹}$	...	۲π

$x = ۲k\pi + \pi \rightarrow$

k	۰	۱
x	π	۲π

مجموع جواب‌ها: $\frac{۲\pi + ۴\pi + ۶\pi + ... + ۱۸\pi}{۹} + \underbrace{\pi}_{\text{جدول پایین}}$

$$= \frac{(۲+۴+۶+...+۱۸)\pi}{۹} + \pi = \frac{۹۰\pi}{۹} + \pi = ۱۰\pi + \pi = ۱۱\pi$$

دقت کنید که $۲+۴+۶+...+۲n = n(n+۱)$ است روی همین اصل داریم:

$$۲+۴+۶+...+۱۸ = ۹(۹+۱) = ۹۰$$

۱۵- گزینه‌ی ۲

می‌دانیم $\cos(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha) = \sin\alpha$ بنابراین $y = b\sin ax$ است.

از طرفی دوره‌ی تناوب تابع $f(x)=b\sin ax$ به صورت $\frac{۲\pi}{|a|}$ می‌باشد.

همچنین از روی نمودار تابع دوره‌ی تناوب تابع برابر است با ۴π در نتیجه:

$$\frac{۲\pi}{|a|}=۴\pi \to |a|=\frac{۱}{۲} \to a=\pm\frac{۱}{۲} \xrightarrow{a>۰} a=\frac{۱}{۲}$$

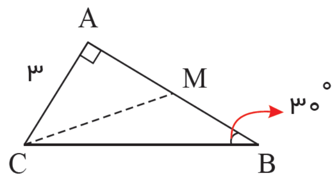
با توجه به نمودار $f(\pi)=-۲$ می‌باشد.

$$f(\pi)b\sin a\pi \overset{a=\frac{۱}{۲}}{=\!=\!=} b\sin\frac{\pi}{۲}=b=-۲ \to ab=\frac{۱}{۲}\times(-۲)=-۱$$

۱۶- گزینه‌ی ۴

ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی ۳۰° نصف وتر است $\leftarrow BC=۶$

ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی $(\hat{C})۶۰^\circ$ ، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است $AB=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۶)=۳\sqrt{۳}$



از طرفی : $MB=\frac{AB}{۲}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

$$S_{\overset{\Delta}{MBC}}=\frac{۱}{۲}MB\times BC\times\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}(\frac{۳\sqrt{۳}}{۲})(۶)(\frac{۱}{۲})=\frac{۱۸\sqrt{۳}}{۸}=\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$$

۱۷- گزینه‌ی ۳

$$f(x)=a\sin(\frac{\pi}{۲}+bx)\xrightarrow{\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha} f(x)=a\cos bx$$

نمودار تابع از نقطه‌ی $\begin{vmatrix}۰\\-۲\end{vmatrix}$ عبور می‌کند بنابراین این نقطه در تابع صدق می‌کند.

$$\begin{vmatrix}۰\\-۲\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{صدق}} -۲=a\cos ۰ \to a=-۲ \to f(x)=-۲\cos bx$$

می‌دانیم دوره‌ی تناوب $y=\cos bx$ برابر $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ است و از روی نمودار داریم:

$$\frac{۳T}{۴}=\frac{\pi}{۲}\to T=\frac{۲\pi}{۳}\to\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۳}\to|b|=۳\to b=\pm۳$$

پس : $f(x)=-۲\cos(\pm۳x)\xrightarrow{\cos(-\alpha)=\cos\alpha} f(x)=-۲\cos ۳x\to f(\frac{\pi}{۱۲})=-۲\cos\frac{\pi}{۴}=-۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-\sqrt{۲}$

۱۸- گزینه‌ی ۴

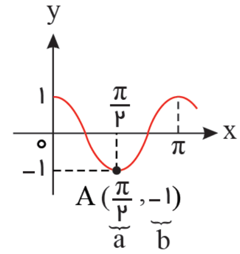
می‌دانیم: $\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha$

ابتدا تابع داده شده را ساده می‌کنیم: $y=۱-۲\sin^۲ x=\cos ۲x$

می‌دانیم دوره‌ی تناوب $y=\cos ax$ از رابطه‌ی $T=\frac{۲\pi}{|a|}$ بدست می‌آید و Max تابع $y=\cos ۲x$ برابر ۱ و Min آن برابر ۱- است.

$$T=\frac{۲\pi}{|a|}=\frac{۲\pi}{|۲|}=\pi, Max=۱, Min=-۱$$

شکل تابع را رسم کرده و مختصات نقطه‌ی A را پیدا می‌کنیم:



$$\rightarrow A\left|\begin{array}{l}\frac{\pi}{۲}\rightarrow a\\ -۱\rightarrow b\end{array}\right. \rightarrow a\times b=-\frac{\pi}{۲}$$

۱۹- گزینه‌ی ۴

می‌دانیم دوره‌ی تناوب تابع $y=a\sin bx$ برابر $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ است. از روی شکل مشخص است که دوره‌ی تناوب تابع برابر $\frac{۲\pi}{۳}$ است.

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}\rightarrow\frac{۲\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{|m|}\rightarrow|m|=۳\rightarrow m=۳, m=-۳$$

از طرفی تابع در همسایگی راست $x=۰$ نزولی است پس $m>۰$ است یعنی $m=۳$ قابل قبول است.

$$y=۱-\sin ۳x\rightarrow y(\frac{۷\pi}{۶})=۱-\sin\frac{۲۱\pi}{۶}=۱-\sin\frac{۷\pi}{۲}=۱-\sin(۴\pi-\frac{\pi}{۲})$$

$$=۱-\sin(-\frac{\pi}{۲})=۱-(-۱)=۲$$

۲۰- گزینه‌ی ۴

می‌دانیم: $\boxed{\cot a+\tan a=\frac{۲}{\sin ۲a}, \cot a-\tan a=۲\cot ۲a, a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab}$

$$\tan^۴\frac{\pi}{۸}-\cot^۴\frac{\pi}{۸}=(\tan^۲\frac{\pi}{۸}+\cot^۲\frac{\pi}{۸})(\tan^۲\frac{\pi}{۸}-\cot^۲\frac{\pi}{۸})$$

$$=((\tan\frac{\pi}{۸}+\cot\frac{\pi}{۸})^۲-\underbrace{۲\tan\frac{\pi}{۸}\cot\frac{\pi}{۸}}_{۱})(\tan\frac{\pi}{۸}+\cot\frac{\pi}{۸})(\tan\frac{\pi}{۸}-\cot\frac{\pi}{۸})$$

$$=((\frac{۲}{\sin\frac{\pi}{۴}})^۲-۲)(\frac{۲}{\sin\frac{\pi}{۴}})(-۲\cot\frac{\pi}{۴})$$

$$=((\frac{۲}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}})^۲-۲)(\frac{۲}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}})(-۲(۱))=(۶)(\frac{۴}{\sqrt{۲}})(-۲)=\frac{-۴۸}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=-۲۴\sqrt{۲}$$

که مجموع حاصل ۲۴- برابر $\sqrt{۲}$ است.

۲۱- گزینه‌ی ۱

می‌دانیم: $\boxed{\sin a\cos a=\frac{1}{2}\sin 2a, \sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}}$

$$\cos x-\sin x=\frac{-\sqrt{2}}{4\sin x}\rightarrow \sin x\cos x-\sin^2 x=\frac{-\sqrt{2}}{4}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x-(\frac{1-\cos 2x}{2})=\frac{-\sqrt{2}}{4}\xrightarrow{\times 2}\sin 2x-1+\cos 2x=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \sin 2x+\cos 2x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\underbrace{\sin^2 2x+\cos^2 2x}_{1}+\underbrace{2\sin 2x\cos 2x}_{\frac{1}{2}\sin 4x}=1+\frac{1}{2}-\sqrt{2}$$

$$\rightarrow 1+\sin 4x=\frac{3}{2}-\sqrt{2}\rightarrow \sin 4x=\frac{1}{2}-\sqrt{2}$$

۲۲- گزینه‌ی ۳

چون زاویه‌ی مشخص شده در هر دو مثلث برابر a است، بنابراین تانژانت هر دو زاویه برابر است. در نتیجه داریم:

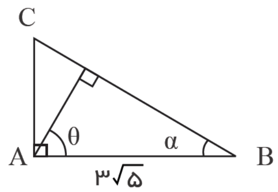
$$\begin{cases}\tan\alpha=\frac{3y}{6x}\\ \tan\alpha=\frac{2x}{\frac{4}{3}y}\end{cases}\rightarrow \frac{3y}{6x}=\frac{2x}{\frac{4}{3}y}\rightarrow 12x^2=4y^2\rightarrow 3x^2=y^2\rightarrow x^2+y^2=x^2+3x^2=4x^2$$

۲۳- گزینه‌ی ۴

با توجه به شکل داریم:

$$\cos\alpha=\frac{AB}{BC}=\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{15}}=\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{5}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rightarrow \alpha=30\xrightarrow{\alpha+\theta=90^\circ}\theta=60^\circ$$



۲۴- گزینه‌ی ۲

در ربع چهارم علامت نسبت‌های مثلثاتی به صورت مقابل است:

$$\sin\alpha<0, \cos\alpha>0, \tan\alpha<0, \cot\alpha<0$$

پس گزینه‌ی ۲ درست است. $\begin{cases}\sin\alpha<0\\ \cos\alpha>0\end{cases}\rightarrow \sin\alpha.\cos\alpha<0$

حال بررسی سایر گزینه‌ها

گزینه‌ی ۱: چون همواره $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ هم علامت‌اند، $\frac{\tan\alpha}{\cot\alpha}>0$ است. یعنی گزینه‌ی ۱ نادرست است.

گزینه‌ی ۳: نادرست است زیرا:

$$\cos\alpha.\tan\alpha=\cos\alpha.\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sin\alpha$$

و چون در ربع چهارم $\sin\alpha$ منفی است پس این گزینه نادرست است.

گزینه ۴: $\sin\alpha.\cot\alpha=\sin\alpha.\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cos\alpha$

چون در ربع چهارم $\cos\alpha$ مثبت است، پس این گزینه نیز نادرست است.

۲۵- گزینه‌ی ۲

چون $\sin\alpha.\cos\alpha<0$ است، پس $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ مختلف‌العلامت‌اند. بنابراین α یا در ناحیه‌ی دوم است یا در ناحیه‌ی چهارم.

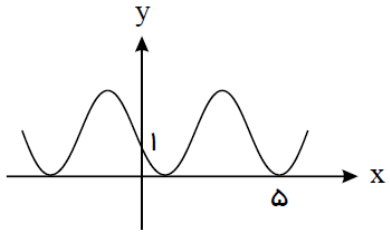
از طرفی چون $\cos\alpha.\cot\alpha>0$ است، داریم:

$$\cos\alpha.\cot\alpha>0\Rightarrow\cos\alpha.\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}>0\rightarrow\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}>0\xrightarrow{\cos^2\alpha>0}\sin\alpha>0$$

چون $\sin\alpha$ مثبت است، α در یکی از نواحی **۱** یا **۲** قرار دارد.

چون هر دو نامساوی هم‌زمان برقرار است بین نتایج بالا اشتراک می‌گیریم. بنابراین α در ربع دوم قرار دارد.

۱ قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a-\cos(\pi(\frac{1}{2}+bx))$ به صورت زیر است. $a+b$ کدام است؟



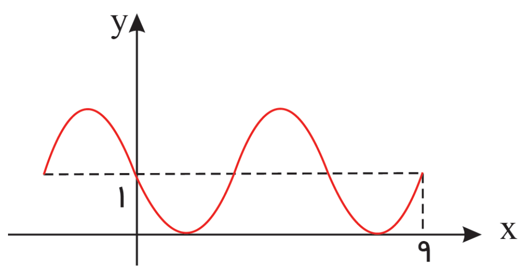
۱) صفر

۲) $1/5$

۳) 1

۴) $0/5$

۲ نموار زیر مربوط به تابع $f(x)=a+\cos(-\frac{1}{2}+bx)\pi$ می‌باشد. حاصل $f(29)$ کدام است؟



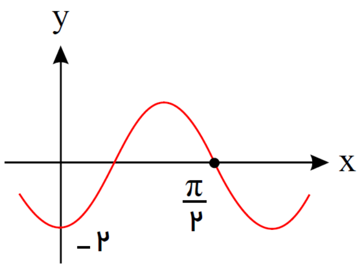
۱) $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲) $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳) $\frac{1}{2}$

۴) $\frac{3}{2}$

۳ شکل زیر، نمودار تابع $g(x)=a\sin(bx+\frac{\pi}{2})$ است. مقدار $f(\frac{\pi}{12})$ کدام است؟



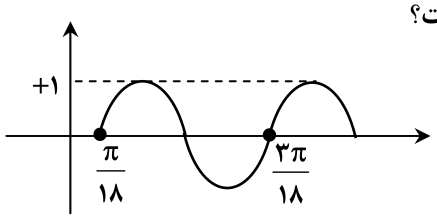
۱) $\sqrt{2}$

۲) $2\sqrt{2}$

۳) $-\sqrt{2}$

۴) $-2\sqrt{2}$

۴ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a-2\cos(bx+\frac{\pi}{2})$ است $a+b$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{2}$

۲) 1

۳) $\frac{3}{2}$

۴) 2

۱- گزینه‌ی ۴

$$f(x)=a-\cos(\frac{\pi}{2}+b\pi x)=a+\sin b\pi x$$

با توجه به نمودار، نقطه‌ی $(0,1)$ روی نمودار قرار دارد:

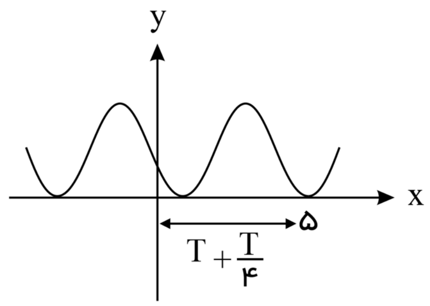
$$f(0)=1\Rightarrow a+\sin 0=1\Rightarrow a=1$$

از طرفی مطابق شکل زیر، دوره تناوب تابع را می‌یابیم:

$$T+\frac{T}{4}=5\Rightarrow \frac{5}{4}T=5\Rightarrow T=4$$

دوره تناوب تابع $y=\sin ax$ از رابطه $T=\frac{2\pi}{|a|}$ بدست می‌آید.

$$\frac{2\pi}{|b\pi|}=4\Rightarrow |b|=\frac{1}{2}\Rightarrow b=\pm\frac{1}{2}$$



چون بلافاصله بعد از محور yها نمودار در حال کاهش است، پس $b=-\frac{1}{2}$ قابل قبول است.

$$\Rightarrow a+b=1+(-\frac{1}{2})=0/5$$

۲- گزینه‌ی ۱

می‌دانیم: $\boxed{y=\sin ax \xrightarrow{\text{دوره تناوب}} T=\frac{2\pi}{|a|}}$

$$y=a+\cos(-\frac{1}{2}+bx)\pi \rightarrow y=a+\cos(\frac{-\pi}{2}+\pi bx)$$

$$\rightarrow y=a+\cos(\frac{\pi}{2}-\pi bx)\xrightarrow{\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha} y=a+\sin\pi bx$$

با توجه به شکل $\rightarrow \frac{3}{2}T=9\rightarrow T=6\rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|}=6\rightarrow |b|=\frac{1}{3}\rightarrow b=\pm\frac{1}{3}$

چون بلافاصله بعد از محور عرض، نمودار نزول پیدا می‌کند و بنابراین ضریب کمان سینوس می‌باید منفی باشد پس $b=\frac{-1}{3}$ است.

$$f(x)=a+\sin(\frac{-\pi}{3}x)\xrightarrow{\text{صدق}\ \left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.} 1=a+0\rightarrow a=1\rightarrow f(x)=1+\sin(\frac{-\pi}{3}x)=1-\sin\frac{\pi}{3}x$$

$$\rightarrow f(۲۹) = ۱ - \sin\frac{۲۹\pi}{۳} = ۱ - \sin(۱۰\pi - \frac{\pi}{۳}) = ۱ - \sin(\frac{-\pi}{۳}) = ۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۳- گزینه‌ی ۳

$$f(x) = a\sin(\frac{\pi}{۲} + bx) \xrightarrow{\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha} f(x) = a\cos bx$$

نمودار تابع از نقطه $\begin{vmatrix} ۰ \\ -۲ \end{vmatrix}$ عبور می‌کند بنابراین این نقطه در تابع صدق می‌کند.

$$\begin{vmatrix} ۰ \\ -۲ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} -۲ = a\cos ۰ \rightarrow a = -۲ \rightarrow f(x) = -۲\cos bx$$

می‌دانیم دوره تناوب $y = \cos bx$ برابر $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ است و از روی نمودار داریم:

$$\frac{۳T}{۴} = \frac{\pi}{۲} \rightarrow T = \frac{۲\pi}{۳} \rightarrow \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{۳} \rightarrow |b| = ۳ \rightarrow b = \pm ۳$$

پس؛ $f(x) = -۲\cos(\pm ۳x) \xrightarrow{\cos(-\alpha)=\cos\alpha} f(x) = -۲\cos ۳x \rightarrow f(\frac{\pi}{۱۲})$

$$= -۲\cos\frac{\pi}{۴} = -۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = -\sqrt{۲}$$

۴- گزینه‌ی ۴

$$y = a - ۲\cos(bx + \frac{\pi}{۲}) = a + ۲\sin bx$$

$$y_{max} = ۱ \rightarrow a + ۲ = ۱ \rightarrow \underline{a = -۱}$$

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} \quad \text{و} \quad T = \frac{۱۲\pi}{۱۸} = \frac{۲\pi}{۳}$$

$$\frac{۲\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{|b|} \rightarrow |b| = ۳ \rightarrow b = \pm ۳ \begin{cases} \boxed{b = +۳} \\ b = -۳ \end{cases}$$ در نقطه شروع صعودی است

$$\rightarrow a + b = -۱ + ۳ = ۲$$

۱ حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos 2x}$ کدام است؟

۱) -2
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۱
۴) ۲

۲ حد کسر $\frac{x^{m+3} + nx + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1}$ با شرط $n > 3$، وقتی $x \to \infty$ برابر ۲- است. $m + n$ کدام است؟

۱) ۳/۵
۲) ۴
۳) ۴/۵
۴) ۵

۳ حد عبارت $\frac{\cos x}{1 - \sin x}$ وقتی $x \to (\frac{\pi}{2})^+$، کدام است؟

۱) $+\infty$
۲) ۲
۳) ۱
۴) $-\infty$

۴ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax^n - 3x + 1}{3x^2 + x}$، اگر $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{2}{3}$ باشد، $f(-1)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۵ حد چپ تابع $f(x)=\frac{(۳-[x])\sqrt{x^۲-۶x+۹}}{x-۳}$ در نقطه‌ی $x=۳$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است)

۱) ۱
۲) -۱
۳) ۰
۴) ∞

۶ حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲x-\sqrt{۹x^۲-x}}{\sqrt{x+۱۲}-۳x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$
۲) ۱
۳) -۱
۴) $\frac{۱}{۳}$

۷ اگر $f(x+۲)=\frac{\cos\pi x}{۱+\sin\pi x}$، حاصل $\lim\limits_{x\to۳}f(x)$ کدام است؟

۱) ۰
۲) -۱
۳) ۱
۴) $+\infty$

۸ اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲}=-۱$، آن‌گاه حد راست این عبارت در نقطه‌ی $x=-۲$ کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$
۲) $-\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

۹ اگر حد $f(x)=\dfrac{a(x-1)}{2x-\sqrt{x^2+3}}$ وقتی $x\to -\infty$ برابر $\dfrac{2}{3}$، باشد حاصل $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{5}{3}$
۲) $\dfrac{4}{3}$
۳) $\dfrac{2}{3}$
۴) $\dfrac{1}{3}$

۱۰ با شرط $n<2$ و $m>4$ و $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n^2x^{m-3}+nx+m}{mx^{-n+3}mx-3}=3$ مقدار $m-n$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۶
۳) ۹
۴) ۱۸

۱۱ حاصل $\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{2})^-}\left(\dfrac{1+x}{1+\sin x}\right)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) صفر
۳) $+\infty$
۴) $-\infty$

۱۲ اگر تابع $f(x)=\dfrac{ax+\sqrt{4x^2+5}}{bx-2}$ از نقطه‌ی $(1,2)$ بگذرد و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱۱
۲) ۸
۳) ۵
۴) ۲

۱۳ در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{ax+\sqrt{4x^2+5}}{2x+2}$، اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{5}{2}$ باشد، آنگاه حد (x) وقتی $x\to -1$، کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$

۲) $\frac{5}{6}$

۳) $\frac{3}{2}$

۴) $\frac{5}{4}$

۱۴ حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12^x-3^x+4^x-1}{16^x-1}$، کدام است؟

۱) ۱

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۱۲

۱۵ حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$ کدام است؟

۱) ∞

۲) ۳

۳) $\frac{1}{2}$

۴) $\frac{1}{4}$

۱۶ تابع $f(x)=\begin{cases} ax+2b\ ; & x>3 \\ ax^2+bx+2\ ; & x<3 \end{cases}$ مفروض است. اگر $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=6$ و $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=2$ آن‌گاه $a+b$ کدام است؟

۱) ۲

۲) ۱

۳) -3

۴) ۴

۱۷ اگر $f(x)=\begin{cases}[x] & ; \quad x>-1\\ 1-[x] & ; \quad x\le -1\end{cases}$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2-1)$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

۱) -1

۲) -2

۳) وجود ندارد.

۴) صفر

۱۸ مجموع حد چپ و راست تابع $f(x)=[\frac{2}{1+x}]$ وقتی $x\to 0$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۱

۴) ۲

۱۹ در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{ax+b\sqrt{x^2+3}}{x^2-3x+2}$، اگر $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ باشد، آن‌گاه حد تابع $g(x)=xf(x)$ وقتی $x\to -\infty$ کدام است؟

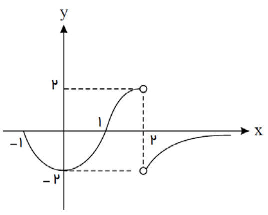
۱) ۴

۲) -8

۳) ۸

۴) -4

۲۰ اگر نمودار تابع f به‌صورت زیر باشد، آن‌گاه کدام‌یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟



۱) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$

۲) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0$

۳) $\lim\limits_{x\to 2} |f(x)|=2$

۴) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

۲۱ حد چپ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{ax}{3x+[-x]}$ در نقطه‌ی $x=1$، به اندازه‌ی ۲ واحد از حد راست آن در این نقطه بیش‌تراست. مقدار a کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

۱) ۱

۲) ۲−

۳) ۴

۴) ۴−

۲۲ اگر $b=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2-\sqrt{ax-2}}{\sqrt[3]{3x-1}-2}$ ، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$

۲) ۴

۳) ۳

۴) صفر

۲۳ حاصل $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1}$ ، کدام است؟

۱) ۱۱۲−

۲) ۹۶−

۳) ۸۴−

۴) ۷۲−

۲۴ حاصل $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+\sqrt{2x+8}}{x+2}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$

۲) $\frac{5}{2}$

۳) $\frac{-3}{2}$

۴) $\frac{-5}{2}$

۲۵ حاصل $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{2x+1}}{2-\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$

۲) $\frac{3}{4}$

۳) $\frac{4}{3}$

۴) $\frac{3}{2}$

۲۶ اگر حد تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+a}-2}{x^2-1}$، در $x=1$ عددی حقیقی باشد، حاصل این حد کدام است؟

۱) $\frac{1}{16}$

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{8}$

۴) $\frac{1}{4}$

۲۷ حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)}$ کدام است؟

۱) 6 ۲) -6 ۳) $-\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۱- گزینه‌ی ۱

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{\tan^2 x-1}{\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x(\cos^2 x-\sin^2 x)}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{-1}{\cos^2 x}=\frac{-1}{\frac{1}{2}}=-2$$

توجه کنید $\tan\frac{3\pi}{4}=-1$ می‌باشد.

۲- گزینه‌ی ۲

در حدهای کسری وقتی x به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و جواب عدد شود باید بزرگترین توان x صورت و مخرج باید با هم برابر باشد و دقت کنید چون $n>3$ است در نتیجه $n-2>1$ و جمله‌ی پرتوان مخرج حتماً mx^{n-2} است.

$$m+3=n-2\Rightarrow m-n=-5$$

پرتوان صورت و مخرج $\rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+3}}{mx^{n-2}}=\frac{1}{m}=-2\Rightarrow m=\frac{-1}{2},n=\frac{9}{2}\Rightarrow m+n=4$

۳- گزینه‌ی ۴

روش اول:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{(1-\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{-\sin x}{-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty$$

دقت کنید $(\frac{\pi}{2})^+$ در ناحیه‌ی دوم است و در ناحیه‌ی دوم، تانژانت منفی است.

۴- گزینه‌ی ۴

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{2}{3}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n-3x+1}{3x^2+x}\xrightarrow{\text{پرتوان}}\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n}{3x^2}\xrightarrow{n=2}\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2}{3x^2}=\frac{a}{3}=\frac{2}{3}\Rightarrow a$$

حال با معلوم بودن مقادیر a و n، مقدار $f(-1)$ را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$\xrightarrow[a=2]{n=2}f(x)=\frac{2x^2-3x+1}{3x^2+x}\Rightarrow f(-1)=\frac{2(-1)^2-3(-1)+1}{3(-1)^2+(-1)}=\frac{2+3+1}{3-1}=3$$

۵- گزینه‌ی ۲

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{(۳-[x])\sqrt{x^۲-۶x+۹}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{(۳-\overset{\overset{۲}{\uparrow}}{[۳^-]})\sqrt{(x-۳)^۲}}{x-۳}$$

$$=\lim_{x\to ۳^-}\frac{|\overbrace{x-۳}^{-}|}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{-(x-۳)}{x-۳}=-۱$$

۶- گزینه‌ی ۴

چون $x\to\infty$ برای محاسبه‌ی حد، کافی است فقط جملات با بیشترین توان صورت و مخرج را در نظر بگیریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x-\sqrt{۹x^۲-x}}{\sqrt{x+۱۲}-۳x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x-\sqrt{۹x^۲}}{-۳x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x-|\overbrace{۳x}^{+}|}{-۳x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x-۳x}{-۳x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{-۳x}=\frac{۱}{۳}$$

۷- گزینه‌ی ۲

$$\lim_{x\to ۳}f(x)=\lim_{x\to ۱}f(x+۲)$$

$$\lim_{x\to ۳}f(x)=\lim_{x\to ۱}\frac{\cos\pi}{۱+\sin\pi}=\frac{-۱}{۱+۰}=-۱$$

۸- گزینه‌ی ۴

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|\overbrace{x^۲-۴}^{+}|}{ax^۲-x+۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲-۴}{ax^۲-x+۲}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲}{ax^۲}=\frac{۱}{a}=-۱\Rightarrow a=-۱$$

وقتی $\to(-۱)^+$، $x^۲-۴<۰$ و لذا $|x^۲-۴|=۴-x^۲$ می‌شود. بنابراین:

$$\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲}=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{۴-x^۲}{-x^۲-x+۲}=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{-(x-۲)(x+۲)}{-(x+۲)(x-۱)}=\frac{۴}{۳}$$

دقت کنید $(-۲)^+$ را حدوداً $-۱/۹۹$ در نظر می‌گیریم.

۹- گزینه‌ی ۲

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\!=\!=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{۲x-\sqrt{x^۲}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{۲x-|\underset{-}{x}|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{۲x+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{۳x}=\frac{a}{۳}$$

$$=\frac{۲}{۳}\Rightarrow a=۲$$

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۱}\frac{۲(x-۱)}{۲x-\sqrt{x^۲+۳}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۱}\frac{۲}{۲-\frac{۲x}{۲-\sqrt{x^۲+۳}}}=\frac{۲}{۲-\frac{۱}{۲}}=\frac{۴}{۳}$$

۱۰- گزینه‌ی ۴

چون جواب حد، عددی غیر از صفرشده است بنابراین بزرگترین توان x صورت و مخرج باید با هم برابر باشند.

بزرگترین توان x صورت برابر $m-۳$ است. $m>۴\to m-۳>۱\to$

بزرگترین توان x مخرج برابر $-n+۳$ است. $n<۲\to -n>-۲\to -n+۳>۱\to$

بزرگترین توان x صورت = بزرگترین توان x مخرج $\to m-۳=-n+۳\to m+n=۶$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{n^۲\cdot x^{m-۳}}{m\cdot x^{-n+۳}}=\frac{n^۲}{m}=۳\to n^۲=۳m\to m=\frac{n^۲}{۳}$$

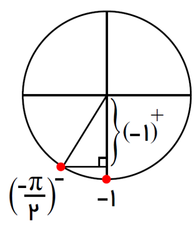
$$\xrightarrow{m+n=۶}\frac{n^۲}{۳}+n=۶\to n^۲+۳n-۱۸=۰\to (n+۶)(n-۳)=۰$$

$$\to\begin{cases} n=-۶\to m=۱۲\to m-n=۱۸\\ n=۳\ \text{غ‌ق‌ق}\ (n<۲)\end{cases}$$

۱۱- گزینه‌ی ۴

وقتی $x\to(-\frac{\pi}{۲})^-$ در این صورت $\sin x$ در ناحیه‌ی سوم با مقادیر بیشتر از ۱- به عدد ۱- نزدیک می‌شود.

$$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{۲})^-}\left(\frac{۱+x}{۱+\sin x}\right)=\frac{۱-\frac{\pi}{۲}}{۱+\underbrace{(-۱)^+}_{-۰/۹}}=\frac{\text{عدد منفی}}{۰^+}=-\infty$$



۱۲- گزینه‌ی ۱

ابتدا نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$ در تابع داده شده صدق می‌دهیم.

$$\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{صدق در تابع}}۲=\frac{a+۳}{b-۲}\to a+۳=۲b-۴\to a-۲b=-۴$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+\sqrt{۴x^۲}}{bx}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+۲|\overset{-}{x}|}{bx}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax-۲x}{bx}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(a-۲)x}{bx}=\frac{a-۲}{b}=۱\to a-۲=b\to a-b=۲$$

$$\begin{cases}a-۲b=-۷\\ a-b=۲\end{cases}\Rightarrow a=۱۱, b=۹$$

۱۳- گزینه‌ی ۲

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+\sqrt{۴x^۲}}{۲x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+۲|\overset{+}{x}|}{۲x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+۲x}{۲x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+۲)x}{۲x}=\frac{a+۲}{۲}=\frac{۵}{۲}\to a=۳$$

$$\lim_{x\to-۱}\frac{۳x+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to-۱}\frac{۳+\frac{۱(۸x)}{۲\sqrt{۴x^۲+۵}}}{۲}=\frac{۳-\frac{۸}{۶}}{۲}=\frac{\frac{۱۰}{۶}}{\frac{۲}{۱}}=\frac{۱۰}{۱۲}=\frac{۵}{۶}$$

۱۴- گزینه‌ی ۱

$$\lim_{x\to۰}\frac{۱۲^x-۳^x+۴^x-۱}{۱۶^x-۱}=\lim_{x\to۰}\frac{۳^x(۴^x-۱)+(۴^x-۱)}{(۴^x-۱)(۴^x+۱)}=\lim_{x\to۰}\frac{۳^x+۱}{۴^x+۱}=\frac{۲}{۲}=۱$$

۱۵- گزینه‌ی ۴

$$\lim_{x\to۰}\frac{۱-\sqrt{\cos x}}{\sin^۲x}=\lim_{x\to۰}\frac{(۱-\sqrt{\cos x})}{(۱-\cos x)(۱+\cos x)}=\lim_{x\to۰}\frac{(۱-\sqrt{\cos x})}{(۱-\sqrt{\cos x})(۱+\sqrt{\cos x})(۱+\cos x)}=\frac{۱}{۲\times۲}=\frac{۱}{۴}$$

۱۶- گزینه‌ی ۴

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to۳^+} f(x)=۶\to\lim\limits_{x\to۳^+}(ax+۲b)=۶\to۳a+۲b=۶\\ \lim\limits_{x\to۳^-} f(x)=۲\to\lim\limits_{x\to۳^-}(ax^۲+bx+۲)=۲\to۹a+۳b=۰\end{array}\right\}\to b=۶,a=-۲$$

پس $a+b=۴$ است.

۱۷- گزینه‌ی ۱

$$x\to۰\Rightarrow x^۲\to۰^+\Rightarrow x^۲-۱\to(-۱)^+$$

پس: $\lim\limits_{x\to۰} f(x^۲-۱)=\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)^+}[x]=[(-۱)^+]=-۱$

۱۸- گزینه‌ی ۱

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to۰^+}\left[\frac{۲}{۱+x}\right]=\left[\frac{۲}{۱^+}\right]=[۲^-]=۱\\ \lim\limits_{x\to۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to۰^-}\left[\frac{۲}{۱+x}\right]=\left[\frac{۲}{۱^-}\right]=[۲^+]=۲\end{array}\right.\to\lim_{x\to۰^+} f(x)+\lim_{x\to۰^-} f(x)=۱+۲=۳$$

۱۹- گزینه‌ی ۴

$$\lim_{x\to ۱}\frac{ax+b\sqrt{x^۲+۳}}{x^۲-۳x+۲}=\frac{a+۲b}{۰}\xrightarrow[\text{بنابراین،این کسر حتما } \frac{۰}{۰} \text{ بوده است.}]{\text{چون جواب حد عدد شده است}}a+۲b=۰\to a=-۲b$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{ax+b\sqrt{x^۲+۳}}{x^۲-۳x+۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to ۱}\frac{a+b\frac{۱(۲x)}{۲\sqrt{x^۲+۳}}}{۲x-۳}=\frac{a+\frac{b}{۲}}{-۱}$$

$$=-a-\frac{b}{۲}=۲b-\frac{b}{۲}=\frac{۳b}{۲}=۲\to b=\frac{۴}{۳},a=-\frac{۸}{۳}$$

$$\lim_{x\to -\infty}xf(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{ax^۲+bx\sqrt{x^۲+۳}}{x^۲-۳x+۲}=\lim_{x\to -\infty}\frac{ax^۲-bx|x|}{x^۲}=\lim_{x\to -\infty}\frac{ax^۲-bx^۲}{x^۲}$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{(a-b)x^۲}{x^۲}=a-b=\frac{-۸}{۳}-\frac{۴}{۳}=\frac{-۱۲}{۳}=-۴$$

۲۰- گزینه‌ی ۳

با توجه به شکل درصورت سوال، حاصل حدها به صورت زیر است:

$$\lim_{x\to -۱}f(x)=۰$$
$$\lim_{x\to ۱}f(x)=۰$$
$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=۰$$

در مورد حد گزینه‌ی ۳، چون حد چپ تابع در $x=۲$ برابر ۲ و حد راست تابع برابر ۲- است، بنابراین:

$$\lim_{x\to ۲}|f(x)|=۲$$

۲۱- گزینه‌ی ۴

ابتدا حد راست و حد چپ تابع را در $x=۱$ حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{ax}{۳x+[-x]}=\frac{a}{۳+[(-۱)^-]}=\frac{a}{۳-۲}=a$$

$$\lim_{x\to ۱^-}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{ax}{۳x+[-x]}=\frac{a}{۳[(-۱)^+]}=\frac{a}{۳-۱}=\frac{a}{۲}$$

طبق فرض: $\lim_{x\to ۱^-}f(x)=۲+\lim_{x\to ۱^+}f(x)\to\frac{a}{۲}=۲+a\to a=۴+۲a\to a=-۴$

۲۲- گزینه‌ی ۴

چون مخرج کسر، به ازای $x=۳$، صفر می‌باشد و حاصل حد نیز متناهی است، پس صورت کسر نیز باید به ازای $x=۳$ صفر شود.

$$۲-\sqrt{۳a-۲}=۰\Rightarrow \sqrt{۳a-۲}=۲\Rightarrow a=۲$$

روش اول: $a=۲$ را جایگذاری کرده، حد تابع را می‌گیریم:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{۲-\sqrt{۲-۲}}{\sqrt[۳]{۳x-۱}-۲}-\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۳}\frac{-\frac{۲}{۲\sqrt{۲x-۲}}}{\frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(۳x-۱)^۲}}}=\frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۴}}=-۲\Rightarrow b=-۲\Rightarrow a+b=۰$$

روش دوم:

$$b=\lim_{x\to ۳}\frac{۲-\sqrt{۲x-۲}}{\sqrt[۳]{۳x-۱}-۲}=\lim_{x\to ۳}\frac{(۲-\sqrt{۲x-۲})(۲+\sqrt{۲x-۲})+(\sqrt[۳]{(۳x-۱)^۲}+۲\sqrt[۳]{۳x-۱}+۴)}{(\sqrt[۳]{۳x-۱}-۲)(\sqrt[۳]{۳x-۱})^۲+۲\sqrt[۳]{۳x-۱}+۴)(۲+\sqrt{۲x-۲})}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{(۴-۲x+۲)(۴+۴+۴)}{(۳x-۹)(۲+۲)}=\lim_{x\to ۳}\frac{-۲(x-۳)(۱۲)}{۳(x-۳)(۴)}=\frac{-۲۴}{۱۲}=-۲\Rightarrow a+b=۰$$

۲۳- گزینه‌ی ۱

روش اول:

$$\lim_{x\to ۴}\frac{۳x^۲-۱۰x-۸}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱}=\lim_{x\to ۴}\frac{(x-۴)(۳x+۲)(\sqrt{x-\sqrt{x}}+۱)}{(۳-\sqrt{x}-۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{(\sqrt{x}-۲)(\sqrt{x}+۲)(۳x+۲)(\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱)}{-(\sqrt{x}-۲)}=-(۴)(۱۴)(۲)=-۱۱۲$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to ۴}\frac{۳x^۲-۱۰x-۸}{\sqrt{۳\sqrt{x}}-۱}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۴}\frac{۶x-۱۰}{\frac{\frac{-۱}{۲\sqrt{x}}}{۲\sqrt{۳-\sqrt{x}}}}=\frac{۱۴}{\frac{-\frac{۱}{۴}}{۲}}=\frac{۱۴}{-\frac{۱}{۸}}=-۱۲$$

۲۴- گزینه‌ی ۱

روش اول: عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x+\sqrt{۲x+۸}}{x+۲}=\lim_{x\to -۲}\frac{(x+\sqrt{۲x+۸})(x-\sqrt{۲+۸})}{(x+۲)(x-\sqrt{۲x+۸})}(x+۲)(x-\sqrt{۲x+۸})$$

$$=\lim_{x\to -۲}\frac{x^۲-۲x-۸}{(x+۲)(x-\sqrt{۲x+۸})}=\lim_{x\to -۲}\frac{(x+۲)(x-۴)}{(x+۲)(x-\sqrt{۲x+۸})}=\frac{-۶}{-۴}=\frac{۳}{۲}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to -۱}\frac{x+\sqrt{۲x+۸}}{x+۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -۲}\frac{۱+\frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۸}}}{۱}=\frac{۱+\frac{۱}{۲}}{۱}=\frac{۳}{۲}$$

۲۵- گزینه‌ی ۳

روش اول: عبارت را در مزدوج صورت و مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۴}\frac{۳-\sqrt{۲x+۱}}{۲-\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۴}\frac{(۳-\sqrt{۲x+۱})(۳+\sqrt{۲x+۱})(۲+\sqrt{x})}{(۲-\sqrt{x})(۲+\sqrt{x})(۳+\sqrt{۲x+۱})}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{(۹-۲x-۱)(۲+\sqrt{x})}{(۴-x)(۳+\sqrt{۲x+۱})}=\lim_{x\to ۴}\frac{-۲(x-۴)(۲+\sqrt{x})}{-(x-۴)(۳+\sqrt{۲x+۱})}=\frac{۲\times ۴}{۳+۳}=\frac{۸}{۶}=\frac{۴}{۳}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to ۴}\frac{۳-\sqrt{۲x+۱}}{۲-\sqrt{x}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۴}\frac{\frac{-۲}{۲\sqrt{۲x+۱}}}{-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}=\frac{\frac{-۲}{۶}}{\frac{-۱}{۴}}=\frac{۴}{۳}$$

۲۶- گزینه‌ی ۳

چون مخرج در $x=۱$ برابر صفر است و حاصل حد، عددی حقیقی است باید حد صورت نیز در $x=۱$ برابر صفر باشد:

$$\lim_{x\to ۱}(\sqrt{x+a}-۲)=۰\Rightarrow \sqrt{۱+a}=۲\Rightarrow ۱+a=۴\Rightarrow a=۳$$

پس ضابطه‌ی تابع به‌صورت $f(x)=\frac{\sqrt{x+۳}-۲}{x^۲-۱}$ است، در نتیجه حد تابع در $x=۱$ به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۳}-۲}{x^۲-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x+۳-۴)}{(x-۱)(x+۱)(\sqrt{x+۳}+۲)}=\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{(x+۱)(\sqrt{x+۳}+۳)}=\frac{۱}{۸}$$

۲۷- گزینه‌ی ۱

حد داده شده را به دو حد $\frac{۰}{۰}$ تبدیل می‌کنیم.

روش اول:

$$\lim_{x\to ۱}\left(\frac{(x-۱)^۲}{(\sqrt{x}-۱)\cdot(\sqrt[۳]{x}-۱)}\right)=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{\sqrt{x}-۱}\times\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{\sqrt[۳]{x}-}=$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)}{\sqrt{x}-۱}\times\lim_{x\to ۱}\frac{(\sqrt[۳]{x}-۱)(\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱)}{\sqrt[۳]{x}-۱}=۲\times ۳=۶$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to ۱}\left(\frac{(x-۱)^۲}{\sqrt{x}-۱)\cdot(\sqrt[۳]{x}-۱)}\right)=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{\sqrt{x}-۱}\times\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}=\frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}\times\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\times\frac{۱}{\frac{۱}{۳}}=۲\times ۳=۶$$

۱ مقدار مشتق تابع $f(x) = x^{۳} + ۲x$ در نقطه‌ای به طول $x_{\circ} = -۱$ کدام است؟

۱) -۳

۲) ۵

۳) -۵

۴) ۳

۲ اگر $f'(۲) = -۲$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h \to \circ} \dfrac{f(۲) - f(۲+۴h)}{۲h}$ را بدست آورید.

۱) ۴

۲) -۴

۳) -۲

۴) ۲

۳ مشتق تابع $f(x) = ۲x^{۲} + ۵$ را به کمک تعریف مشتق محاسبه نمایید.

۱- گزینه‌ی ۲

راه اول:

$$f'(x_\circ)=\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$$

$$f'(x_\circ)=\lim_{x\to -۱}\frac{x^۳+۲x+۳}{x+۱}=\frac{\circ}{\circ}$$

$$f'(x)=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(x^۲-x+۳)}{x+۱}=۵$$

راه دوم:

$$f'(x_\circ)=۳x^۲+۲+۳(-۱)^۲+۲=۵$$

$$\boxed{x=-۱}$$

۲- گزینه‌ی ۱

$$\lim_{h\to\circ}\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$$ تعریف حدی مشتق

$$\lim_{h\to\circ}\frac{-(f(۲+۴h)-f(۲))}{۲h}\Rightarrow\begin{cases}۴h=t\\ h=\dfrac{t}{۴}\end{cases}\quad h\to\circ\ \ t\to\circ$$

$$\lim_{t\to\circ}\frac{-(f(۲+t)-f(۲))}{\frac{۱}{۲}t}\Rightarrow -۲f'(۲)$$

حاصل $\to -۲(-۲)=+۴$

۳-

$$f'(x)=\lim_{h\to\circ}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to\circ}\frac{۲x^۲+۴xh+۲h^۲+۵\overbrace{-(۲x^۲+۵)}^{-۲x^۲-۵}}{h}=$$

$$\lim_{h\to\circ}\frac{۴xh+۲h^۲}{h}=\lim_{h\to\circ}\frac{\cancel{h}(۴x+۲h)}{\cancel{h}}=۴x$$

$$f(x+h)=۲(x+h)^۲+۵=۲(x^۲+۲xh+h^۲)+۵$$

$$۲x^۲+۴xh+۲h^۲+۵$$

۱ در تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}-۱ & x\geq ۲\\ ۲x+۱ & x<۲\end{cases}$ ، حاصل $f(f(۴))$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲ ضابطه‌ی وارون تابع $y=\frac{x}{۱+x}$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=\frac{۱+x}{x}$
۲) $f^{-۱}(x)=\frac{۱-x}{x}$
۳) $f^{-۱}(x)=\frac{x}{۱-x}$
۴) $f^{-۱}(x)=\frac{x}{x-۱}$

۳ اگر $f(x)=\begin{cases}۲-\sqrt{x+۱} & x>\circ\\ ۲x-۱ & x<\circ\end{cases}$ ، مقدار $fof(۸)$ کدام است؟

۱) $f(۱۵)$
۲) $f(۳۵)$
۳) $f(۲۴)$
۴) $f(۱۷)$

۴ نمودار تابع $y=|x-۲|$ را دو واحد به راست و یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل محور عرض‌ها را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

۱) -۱
۲) ۱
۳) ۳
۴) ۴

۵ اگر $f=\{(-۱,۰),(۱,۲),(۰,۱),(۲,-۱)\}$ باشد، آنگاه $f+f^{-۱}$ شامل کدام زوج مرتب نیست؟

۱) $(۱,۲)$
۲) $(-۱,۱)$
۳) $(۰,۰)$
۴) $(۲,۰)$

۶ اگر $f=\{(۰,-۱),(۱,۰),(۴,۱),(۲,۵)\}$ آنگاه تابع $\frac{f}{f-۱}$ از چند زوج مرتب تشکیل شده است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴۴

۷ اگر $f(x)=x+۱$ و $g(۲f(x))=\frac{x^۲}{۳}$، ضابطه‌ی تابع $g(x)$ کدام است؟

۱) $g(x)=\frac{(x-۲)^۲}{۲}$
۲) $g(x)=\frac{(x-۲)^۲}{۳}$
۳) $g(x)=\frac{(x-۲)^۲}{۶}$
۴) $g(x)=\frac{(x-۲)^۲}{۱۲}$

۸ اگر $f(x)=۳g^{-۱}(۴x+۲)$ و $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+۱}$ باشد، حاصل $f^{-۱}(۱۲)$ کدام است؟

۱) $-۰/۳$
۲) $-۰/۴$
۳) $-۰/۶$
۴) $-۰/۸$

۹ اگر $f(x)=\begin{cases}1-\cos x & x\geq 2\\ 1+\sin x & x<2\end{cases}$ باشد، آنگاه حاصل $f(\pi f(\frac{\pi}{2}))$ کدام است؟

۱) -1
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

۱۰ دامنه‌ی تعریف تابع $f(x)=\sin(\log(x-1))$ ، کدام است؟

۱) $(1,2)\cup(2,3)$
۲) $(1,3)$
۳) $(1,+\infty)$
۴) $(0,3)-\{2\}$

۱۱ اگر $\tan x>0$ و $\sin x<0$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

۱۲ اگر $g(f(x))=\frac{2x^2+1}{5x^2+4}$ و $g(x)=\frac{3x+1}{2x+4}$، حاصل $f(2)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{9}$
۲) $\frac{13}{8}$
۳) $\frac{3}{8}$
۴) $-\frac{1}{18}$

۱۳ تابع با ضابطه‌ی $g(x)=x^۳+۲x$ مفروض است. اگر نمودار تابع $f(x)$ محور x ها در دو نقطه به طول‌های ۱۲ و ۳- قطع کند، نمودار تابع fog محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

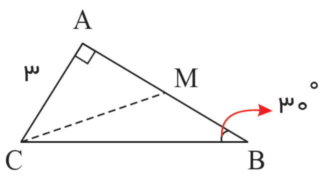
۱) $۲,-۱$

۲) $-۲,۱$

۳) $-۳,۲$

۴) $۳,-۲$

۱۴ در شکل زیر، $AC=۳$ ، $\hat{A}=۹۰^\circ$ و $\hat{B}=۳۰^\circ$. اگر M وسط AB باشد، مساحت مثلث $\overset{\triangle}{MBC}$ کدام است؟



۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$

۲) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۵}$

۴) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$

۱۵ اگر $\sin x=\cos x+\sqrt{\cos x}$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

۱) اول

۲) دوم

۳) اول و چهارم

۴) دوم و سوم

۱۶ اگر $\cos^۴ x=۱+\sin^۴ x$ ،آنگاه حاصل $\cos x$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) صفر

۲) -۱

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۷ اگر $f(x)=\log_{2}^{x-1}$ و $g(x)=\sqrt{3-x}$، دامنه‌ی تابع $f(x)$ کدام بازه باشد تا ترکیب $gof(x)$ تعریف شود؟

۱) $(1,+\infty)$
۲) $(1,9]$
۳) $(-\infty,3]$
۴) $[9,+\infty)$

۱۸ دامنه‌ی تابع $f(x)+\sqrt{-4x^2-3x+1}$ کدام است؟

۱) $[-1,\frac{1}{4}]$
۲) $[2,3]$
۳) $[-2,\frac{5}{3}]$
۴) $[0,1]$

۱۹ اگر $g(x)=2x+1$ و $gof(x)=4x^2-x-1$، آنگاه $(f-g)(1)$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۲
۳) -2
۴) -4

۲۰ اگر $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=3$ باشد، آنگاه حاصل $\sin\theta\cos\theta$ کدام است؟

۱) $0/2$
۲) $0/3$
۳) $0/4$
۴) $0/5$

۱- گزینه‌ی ۳

$$f(۴)\xrightarrow{\text{ضابطه‌ی بالا}}\sqrt{۴}-۱=۱\to f(f(۴))=f(۱)\xrightarrow{\text{ضابطه‌ی پایین}}۲(۱)+۱=۳$$

۲- گزینه‌ی ۳

$$y=\frac{x}{۱+x}\Rightarrow y+yx=x\Rightarrow y=x-xy=x(۱-y)\Rightarrow x=\frac{y}{۱-y}\to f^{-۱}(x)=\frac{x}{۱-x}$$

۳- گزینه‌ی ۳

$$f(x)=\begin{cases}۲-\sqrt{x+۱} & x>۰\\ ۲x-۱ & x<۰\end{cases}$$

$$f(۸)\xrightarrow{\text{ضابطه‌ی بالا}}۲-\sqrt{۸+۱}=۲-۳=-۱$$

$$fof(۸)=f(f(۸))=f(-۱)\xrightarrow{\text{ضابطه‌ی پایین}}۲(-۱)-۱=-۳=f(۲۴)$$

دقت کنید:

$$f(۱۵)=۲-\sqrt{۱۶}=-۲,f(۳۵)=۲-\sqrt{۳۶}=-۴$$

$$f(۲۴)=۲-\sqrt{۲۵}=-۳,f(۱۷)=۲-\sqrt{۱۸}$$

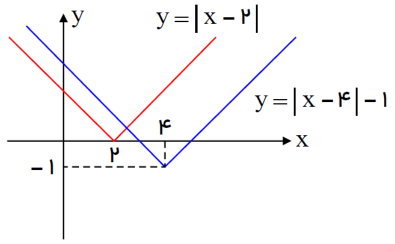
۴- گزینه‌ی ۳

$$y=|x-۲|\xrightarrow{\text{دو واحد راست}}y=|x-۲-۲|\xrightarrow{\text{یک واحد پایین}}y=|x-۴|-۱$$

$$y=|۰-۴|-۱=۳$$

برای بدست آوردن محل برخورد نمودار با محور عرض‌ها، کافی است $x=۰$ را در معادله قرار دهیم؛

در ضمن برای درک بیش‌تر به شکل روبرو دقت کنید:



۵- گزینه‌ی ۲

برای به‌دست آوردن $f^{-۱}$ باید جای زوج‌های مرتب f را عوض کنیم:

$$f=\{(-۱,۰),(۱,۲),(۰,۱),(۲,-۱)\}\Rightarrow f^{-۱}=\{(۰,-۱),(۲,۱),(۱,۰),(-۱,۲)\}$$

$$f+f^{-۱}=\{(-۱,۰+۲),(۲,۱+(-۱)),(۱,۰+۲),(۰,-۱+۱)\}=\{(-۱,۲),(۲,۰),(۱,۲),(۰,۰)\}$$

۶- گزینه‌ی ۳

دقت کنید عملیات روی مولفه‌ی دوم تابع انجام می‌شود.

$$f=\{(۰,-۱),(۱,۰),(۴,۱),(۲,۵)\}\rightarrow f-۱=\{(۰,-۲),(۱,-۱),(۴,۰),(۲,۴)\}$$

دامنه‌ی مشترک $f-۱$ و f را پیدا کرده و تقسیم را روی مولفه‌ی دوم آن‌ها انجام می‌دهیم. در نتیجه داریم:

$$\frac{f}{f-۱}=\{(۰,\frac{۱}{۲}),(۱,۰),(۲,\frac{۵}{۴})\}\rightarrow$$ شامل ۳ زوج مرتب است

۷- گزینه‌ی ۴

$$f(x)=x+۱\rightarrow ۲f(x)=۲x+۲$$

$$g(۲f(x))=\frac{x^۲}{۳}\rightarrow g(۲x+۲)=\frac{x^۲}{۳}\qquad ۲x+۲=t\rightarrow x=\frac{t-۲}{۲}$$

$$\rightarrow g(t)=\frac{۱}{۳}(\frac{t-۲}{۲})^۲=\frac{(t-۲)^۲}{۱۲}\rightarrow g(x)=\frac{(x-۲)^۲}{۱۲}$$

۸- گزینه‌ی ۲

$$f^{-۱}(۱۲)=a\rightarrow f(x)=۱۲\rightarrow f(x)=۳g^{-۱}(۴a+۲)$$

$$\rightarrow ۱۲=۳g^{-۱}(۴a+۲)\rightarrow g^{-۱}(۴a+۲)=۴\rightarrow g(۴)=۲a+۲$$

$$\rightarrow \frac{۲}{۴+۱}=۴a+۲\rightarrow \frac{۲}{۵}=۴a+۲\rightarrow ۴a=-\frac{۸}{۵}\rightarrow a=-۰/۴$$

۹- گزینه‌ی ۲

چون $۲<\frac{۳/۱۴}{۲}=\frac{\pi}{۲}$ است، برای محاسبه‌ی $f(\frac{\pi}{۲})$ باید از ضابطه‌ی پایین استفاده کرد.

$$f(\frac{\pi}{۲})=۱+\sin\frac{\pi}{۲}=۱+۱=۲$$

$$f(\pi f(\frac{\pi}{۲}))=f(۲\pi)\xrightarrow[\text{ضابطه‌ی بالا}]{۲\pi>۲}۱-\cos ۲\pi=۱-۱=۰$$

۱۰- گزینه‌ی ۳

سینوس در تعیین دامنه هیچ نقشی ندارد و برای تعیین دامنه‌ی تعریف لگاریتم کافی است فقط عبارت جلوی لگاریتم را بزرگتر از صفر قرار دهیم(درحالتی که مبنا یک عدد باشد)

$x-۱>۰\rightarrow x>۱$ یا $x\in(۱,+\infty)$

۱۱- گزینه‌ی ۳

در ناحیه سوم دایره‌ی مثلثاتی $\tan x>۰$ و $\sin x<۰$ است.

۱۲- گزینه‌ی ۱

$$g(x)=\frac{۳x+۱}{۲x+۴}\rightarrow g(f(x))=\frac{۳f(x)+۱}{۲f(x)+۴}$$

از طرفی $g(f(x))=\frac{۲x^۲+۱}{۵x^۲+۴}$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{۳f(x)+۱}{۲f(x)+۴}=\frac{۲x^۲+۱}{۵x^۲+۴}\xrightarrow{x=۲}\frac{۳f(۲)+۱}{۲f(۲)+۴}=\frac{۸+۱}{۲۰+۴}\rightarrow\frac{۳f(۲)+۱}{۲f(۲)+۴}=\frac{۹}{۲۴}=\frac{۳}{۸}$$

$$\rightarrow ۲۴f(۲)+۸=۶f(۲)+۱۲\rightarrow ۱۸f(۲)=۴\rightarrow f(۲)=\frac{۴}{۱۸}=\frac{۲}{۹}$$

۱۳- گزینه‌ی ۱

کافی است که معادله‌ی $fog(x)=۰$ را حل کنیم.

$$f(g(x))=۰\xrightarrow[\text{برابر ۱۲ و ۳- هستند}]{\text{ریشه‌های معادله‌ی } f(x)=۱۲}\begin{cases}x^۳+۲x=۱۲\rightarrow x^۳+۲x-۱۲=۰\\ x^۳+۲x=-۳\rightarrow x^۳+۲x+۳=۰\end{cases}$$

اکنون هر یک از این معادلات را حل می‌کنیم.

$$x^۳+۲x-۱۲=۰\rightarrow x^۳-۸+۲x-۴=۰\rightarrow (x-۲)(x^۲+۴+۲x)+۲(x-۲)=۰$$

$$\rightarrow(\underbrace{x-۲}_{\text{فاکتور}})(x^۲+۴+۲x+۲)=۰\rightarrow(x-۲)(\underbrace{x^۲+۲x+۶}_{\Delta<۰})=۰\rightarrow x=۲$$

البته می‌توانستیم معادلات را حل نکنیم و با جایگذاری گزینه‌ها در معادلات به جواب برسیم.

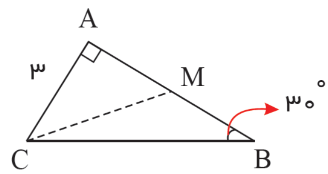
۱۴- گزینه‌ی ۴

ضلع روبرو به زاویه‌ی ۳۰° نصف وتر است $\leftarrow BC=۶$

ضلع روبرو به‌زاویه‌ی $۶۰^\circ(\hat{C})$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است $\leftarrow AB=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۶)=۳\sqrt{۳}$

از طرفی: $MB=\frac{AB}{۲}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

$$S_{\overset{\triangle}{MBC}}=\frac{۱}{۲}MB\times BC\times\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}(\frac{۳\sqrt{۳}}{۲})(۶)(\frac{۱}{۲})=\frac{۱۸\sqrt{۳}}{۸}=\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$$



۱۵- گزینه‌ی ۱

اول باید عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد.

$\cos x\geq ۰\Rightarrow$ انتهای کمان x در ناحیه‌ی اول یا چهارم است (*)

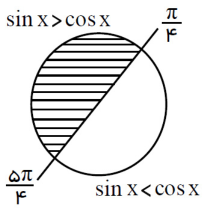
از طرفی:

$$\cos x+\sqrt{\cos x}=\sin x\Rightarrow\sqrt{\cos x}=\sin x-\cos x$$

چون طرف چپ نامنفی است پس باید طرف راست هم نامنفی باشد، درنتیجه:

$$\sin x-\cos x\geq ۰\Rightarrow\sin x\geq\cos x$$

با توجه به نکته‌ی مقابل و حالت(*) داریم:



$\Rightarrow$ **انتهای کمان x در ناحیه‌ی اول است.**

۱۶- گزینه‌ی ۲

می‌دانیم: $\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1}$

$$\cos^4 x = 1 + \sin^4 x \to \cos^4 x - \sin^4 x = 1 \to (\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{1})(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 \to \cos 2x = 1$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \to 1 = 2\cos^2 x - 1 \to 2\cos^2 x = 2 \to \cos^2 x = 1 \to \cos x = \pm 1$$

۱۷- گزینه‌ی ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_a^A \le m \xrightarrow{a>1} A \le a^m}$

$$f(x) = \log_2^{x-1} \to D_f : x - 1 > 0 \to x > 1$$

$$g(x) = \sqrt{3 - x} \to D_g : 3 - x \ge 0 \to x \le 3$$

$$D_{gof(x)} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \{x > 1, \log_2^{x-1} \le 3\} = \{x > 1, x - 1 \le 2^3\}$$

$$= \{x > 1, x \le 9\} = 1 < x \le 9 \to x \in (1, 9]$$

۱۸- گزینه‌ی۱

کافی است زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهید

$$-4x^2 - 3x + 1 \ge 0 \to 4x^2 + 3x - 1 \le 0 \to$$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
عبارت ≤ 0		+	0	−	0	+	

$$\to x \in [-1, \frac{1}{4}]$$

۱۹- گزینه‌ی۴

$$fog(x) = 4x^2 - x - 1 \to f(g(x)) = 4x^2 - x - 1 \to f(2x+1) = 4x^2 - x - 1 \xrightarrow{x=0} f(1) = -1$$

$$g(x) = 2x + 1 \to g(1) = 2(1) + 1 = 3$$

پس : $(f - g)(1) = f(1) = g(1) = -1 - 3 = -4$

۲۰- گزینه‌ی ۳

می‌دانیم: $\boxed{\sin a\cos a=\frac{1}{2}\sin 2a,\sin 2a=\frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}}$

$$\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=3\rightarrow \sin\theta+\cos\theta=3\sin\theta-3\cos\theta\rightarrow 4\cos\theta=2\sin\theta\rightarrow\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=2$$
$$\rightarrow \tan\theta=2$$

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta=\frac{1}{2}\times\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{1+4}=\frac{2}{5}=0/4$$

۱ با فرض آن که $f(g(x))=x^{۲}-۲x$ و $f(x)=x^{۲}-۴x+۳$ ، ضابطه‌ی تابع $g(x)$ با فرض $g(x)\ge ۲$ کدام است؟

۱) $g(x)=x+۱$

۲) $g(x)=۲-|x|$

۳) $g(x)=۲+|x+۱|$

۴) $g(x)=۲-|x+۱|$

۲ وارون تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{|x|}{x}(x^{۲}+۱), x\neq ۰$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=\frac{|x|}{x}\sqrt{x-۱}$

۲) $f^{-۱}(x)=\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|-۱}$

۳) $f^{-۱}(x)=\frac{|x|}{x}\sqrt{-x-۱}$

۴) $f^{-۱}(x)=\frac{|x|}{x}\sqrt{x^{۲}-۱}$

۳ فرض کنید $f(x)=۲x^{۲}-x-۱$ و $g(x)=\frac{۱}{۲}(x+۳)$ باشد، با کدام انتقال زیر، نمودار تابع $fog(x)$ محور xها را در دو نقطه‌ی متمایز با طول‌های نا منفی قطع خواهد کرد؟

۱) $\frac{۹}{۸}$ واحد به سمت بالا

۲) ۴ واحد به سمت راست و $\frac{۹}{۸}$ واحد به سمت بالا

۳) ۴ واحد به سمت راست

۴) ۱ واحد به سمت چپ

۴ ضابطه‌ی وارون تابع $f(x)=\frac{۳^{x}-۵}{۳^{x}+۵}$ کدام است؟

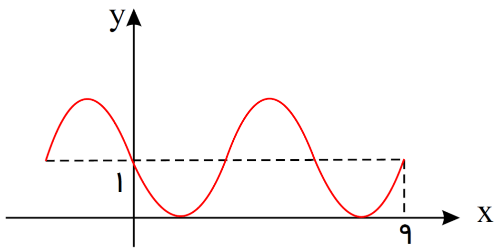
۱) $f^{-۱}(x)=\log_{۵}\frac{۳x+۳}{۱-x}$

۲) $f^{-۱}(x)=\log_{۳}\frac{۵x-۱}{۱-x}$

۳) $f^{-۱}(x)=\log_{۳}\frac{۵x-۵}{۱+x}$

۴) $f^{-۱}(x)=\log_{۳}\frac{۵x+۵}{۱-x}$

۵ نمودار زیر مربوط به تابع $f(x)=a+\cos(-\frac{۱}{۲}+bx)\pi$ می‌باشد. حاصل $f(۲۹)$ کدام است؟



۱) $۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲) $۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۳}{۲}$

۶ با شرایط $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n^۲x^{m-۳}+nx+m}{mx^{-n+۳}+mx-۳}=۳, m>۴, n<۲$ مقدار $m-n$ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۶

۳) ۹

۴) ۱۸

۷ یکی از جواب‌های کلی معادله‌ی $۱+\sin x+\cos x+\sin ۲x+\cos ۲x=۰$ کدام است؟

۱) $x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$

۲) $x=k\pi-\frac{\pi}{۳}$

۳) $x=۲k\pi-\frac{۲\pi}{۳}$

۴) $x=k\pi-\frac{\pi}{۴}$

۸ اگر $\sin ۲x+\cos ۲x=-\frac{۱}{۵}$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام است؟

۱) ۳ یا $-\frac{۱}{۲}$

۲) ۳ یا $\frac{۱}{۲}$

۳) ۲ یا $-\frac{۱}{۳}$

۴) -۲ یا $\frac{۱}{۳}$

۹ اگر $f(x)=2x+1$ و $gof(x)=4x^2+12x+5$ باشد، حاصل $(f+g)og(-2)$ کدام است؟

۱) ۹

۲) ۲۵

۳) -7

۴) $[-2,1]$

۱۰ اگر $f(x)=2x-3$ باشد، دامنه‌ی تعریف $y=\sqrt{f^{-1}(2x^2+3)-x}$ در کدام گزینه آمده است؟

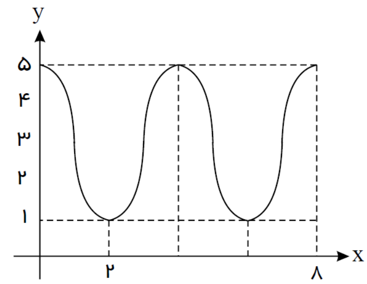
۱) $[0,1]$

۲) $[-1,0]$

۳) $[-1,1]$

۴) $[-2,1]$

۱۱ نمودار معادله‌ی $y=a\cos b\pi x+3$ مطابق شکل زیر است: حاصل $a+b$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟



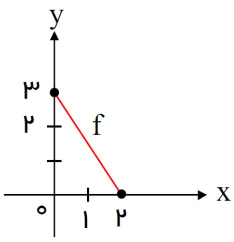
۱) $\frac{5}{2}$

۲) $\frac{7}{2}$

۳) $\frac{9}{2}$

۴) ۱

۱۲ اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر باشد، دامنه‌ی تابع $y=fof(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟



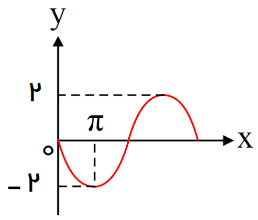
۱) ۰

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

۱۳ اگر نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=b\cos(\frac{3\pi}{2}+ax)$ به صورت زیر باشد، ab کدام است؟



۱) -2

۲) -1

۳) $-\frac{3}{2}$

۴) 1

۱۴ برد تابع $f(x)=2^{x+1}$ را به بازه‌ی $[a,b]$ محدود کرده‌ایم که برای تابع $g(x)=\sqrt{6-2x}$ ترکیب gof^{-1} قابل انجام باشد. حداکثر مقدار $(b-a)$ کدام است؟

۱) ۳

۲) ۶

۳) ۸

۴) ۱۶

۱۵ اگر $\sin 2x=\frac{4}{5}$ ، آن‌گاه حاصل $\cot\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲

۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۴

۴) $\frac{1}{4}$

۱۶ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\tan x=\sin 2x$ به صورت $x=k\pi+\frac{i\pi}{4}$ است. مجموع مقادیر i کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\{0,1,3\}$

۲) $\{1,3\}$

۳) $\{0,1\}$

۴) $\{1,2,3\}$

۱۷ مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(۷\sin x-۸)(۳\sin x+۱)(۵\cos x-۲)=۰$ در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ چند برابر π است؟

۱) ۵

۲) ۶

۳) ۳

۴) ۴

۱۸ اگر ضابطه تابع f به صورت $f(x)=\begin{cases}-x^۲+۶x-۵ & , \quad x>۳\\ \frac{۴}{۵}x+\frac{۸}{۵} & , \quad -۲\le x\le ۳\\ x^۲+۶x+۸ & , \quad x<-۲\end{cases}$ باشد، آن‌گاه طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که در آن $f(x)$ اکیداً صعودی است، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۳

۱۹ $f(x)=x^۲-۶x+۳$ را با دامنه محدود شده $D_f=(-\infty,۰)$ در نظر بگیرید. وارون این تابع در کدام گزینه آمده است؟

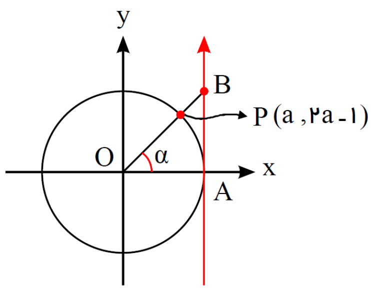
۱) $f^{-۱}(x)=۳+\sqrt{x+۶};x<۳$

۲) $f^{-۱}(x)=۳+\sqrt{x+۶};x>۳$

۳) $f^{-۱}(x)=۳-\sqrt{x+۶};x<۳$

۴) $f^{-۱}(x)=۳-\sqrt{x+۶};x>۳$

۲۰ با توجه به دایره مثلثاتی زیر، مساحت مثلث AOB چقدر است؟ $(۰<\alpha<\frac{\pi}{۲})$



۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۸}$

۴) $\frac{۱}{۲}$

۱- گزینه‌ی ۳

از $f(x)=x^{۲}-۴x+۳$ می‌توان دریافت $f(g(x))=g^{۲}(x)-۴g(x)+۳$ پس می‌توان نوشت:

$$g^{۲}(x)-۴g(x)+۳=x^{۲}-۲x$$

اگر به طرفین تساوی بالا عدد ۱ را اضافه کنیم خواهیم داشت:

$$g^{۲}(x)-۴g(x)+۴=x^{۲}-۲x+۱$$

$$\Rightarrow g(x)-۲)^{۲}=(x-۱)^{۲}\Rightarrow|\underbrace{g(x)-۲}_{+}|=|x-۱|$$ (چون $g(x)\ge ۲$ است داخل قدر مطلق، مثبت است)

$$\Rightarrow g(x)-۲=|x-۱|\Rightarrow g(x)=۲+|x-۱|$$

۲- گزینه‌ی ۲

$$y=\frac{|x|}{x}(x^{۲}+۱)=\begin{cases}x^{۲}+۱ \quad , \quad x<۰\\ -x^{۲}-۱, \quad x<۰\end{cases}$$

$$y=x^{۲}+۱\Rightarrow y-۱=x^{۲}\xrightarrow{x>۰}\begin{cases}x=\sqrt{y-۱}\\ y<-۱\end{cases}\xrightarrow{\text{وارون}}\begin{cases}f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۱}\\ x>۱\end{cases}$$

$$y=-x^{۲}-۱\Rightarrow x^{۲}=-y-۱\xrightarrow{x<۰}\begin{cases}x=-\sqrt{-y-۱}\\ y<-۱\end{cases}\xrightarrow{\text{وارون}}\begin{cases}f^{-۱}(x)=-\sqrt{-x-۱}\\ x<-۱\end{cases}$$

از ترکیب این دو ضابطه‌ی معکوس به جواب $f^{-۱}(x)=\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|-۱}$ می‌رسیم.

۳- گزینه‌ی ۳

ابتدا ضابطه‌ی تابع $fog(x)$ را می‌یابیم:

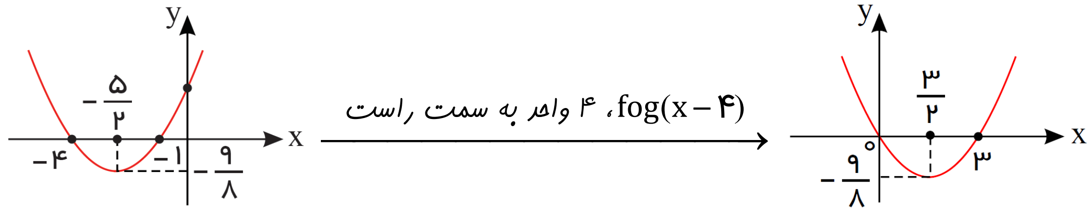
$$fog(x)=f(g(x))=f(\frac{۱}{۲}(x+۳))=۲\times(\frac{۱}{۲}(x+۳)\text{)}^{۲}-\frac{۱}{۲}(x+۳)-۱$$

$$\Rightarrow fog(x)=۲\times\frac{۱}{۴}(x^{۲}+۶x+۹)-\frac{۱}{۲}(x+۳)-۱$$

$$=\frac{۱}{۲}(x^{۲}+۶x+۹)-\frac{۱}{۲}\times۲=\frac{۱}{۲}(x^{۲}+۶z+۹-x-۳-۲)$$

$$\Rightarrow fog(x)=\frac{۱}{۲}(x^{۲}+۵x+۴)=\frac{۱}{۲}(x+۱)(x+۴)\xrightarrow[y=۰]{\text{تلاقی با محور x ها}}x=-۱,-۴$$

مشاهده می‌کنیم که نمودار تابع fog در $x=-۴$ و $x=-۱$ محور xها را قطع کرده است، پس اگر نمودار تابع را ۴ واحد به سمت راست منتقل کنیم، هر دو ریشه، نا منفی می‌شوند.



۴- گزینه‌ی ۴

برای پیدا کردن ضابطه‌ی وارون یک تابع، ابتدا x را پیدا می‌کنیم و سپس x را به y و yها را به x تبدیل می‌کنیم.

$$y=\frac{۳^x-۵}{۳^x+۵}\to ۳^x y+۵y=۳^x-۵\to ۳^x-۳^x y=۵y+۵$$

$$\to ۳^x(۱-y)=۵y+۵\to ۳^x=\frac{۵y+۵}{۱-y}\xrightarrow{\text{تعریف لگاریتم}}x=\log_۳\frac{۵y+۵}{۱-y}$$

$$\to f^{-۱}(x)=\log_۳\frac{۵x+۵}{۱-x}$$

۵- گزینه‌ی ۱

می‌دانیم: $\boxed{y=\sin ax\xrightarrow{\text{دوره‌ی تناوب}}T=\frac{۲\pi}{|a|}}$

$$y=a+\cos(-\frac{۱}{۲}+bx)\pi\to y=a+\cos(\frac{-\pi}{۲}+\pi bx)$$

$$\to y=a+\cos(\frac{\pi}{۲}-\pi bx)\xrightarrow{\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha}y=a+\sin\pi bx$$

با توجه به شکل $\to\frac{۳}{۲}T=۹\to T=۶\to\frac{۲\pi}{|b\pi|}=۶\to|b|=\frac{۱}{۳}\to b=\pm\frac{۱}{۳}$

چون بلافاصله بعد از محور عرض، نمودار نزول پیدا می‌کند و بنابراین ضریب کمان سینوس می‌باید منفی باشد پس $b=\frac{-۱}{۳}$ است.

$$f(x)=a+\sin(\frac{-\pi}{۳}x)\xrightarrow{\text{صدق}\ \left|{}^{۰}_{۱}\right.}۱=a+۰\to a=۱\to f(x)=۱+\sin(\frac{-\pi}{۳}x)۱-\sin\frac{\pi}{۳}x$$

$$\to(۲۹)=۱-\sin(\frac{۲۹\pi}{۳}=۱-\sin(۱۰\pi-\frac{\pi}{۳})=۱-\sin(\frac{-\pi}{۳})=۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۶- گزینه‌ی ۴

چون جواب حد، عددی غیر از صفر شده است بنابراین بزرگترین توان x صورت و مخرج باید با هم برابر باشند.

بزرگترین توان x صورت برابر $m-3$ است $\rightarrow m>4 \rightarrow m-3>1 \rightarrow$

بزرگترین توان x مخرج برابر $-n+3$ است. $\rightarrow n<2 \rightarrow -n>-2 \rightarrow -n+3>1 \rightarrow$

بزرگ‌ترین توان x صورت = بزرگ‌ترین توان x مخرج $\rightarrow m-3=-n+3 \rightarrow m+n=6$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{n^2.x^{m-3}}{m.x^{-n+3}}=\frac{n^2}{m}=3m \rightarrow m=\frac{n^2}{3}$$

$$\xrightarrow{m+n=6}\frac{n^2}{3}+n=6 \rightarrow n^2+3n=18=0 \rightarrow (n+6)(n-3)=0$$

$$\rightarrow \begin{cases} n=-6 \rightarrow m=12 \rightarrow m-n=18 \\ n=3 \text{ غ ق } (n<2) \end{cases}$$

۷- گزینه‌ی ۳

می‌دانیم: $\boxed{\begin{array}{l}\sin 2a = 2\sin a\cos a \\ \cos 2a = 2\cos^2 a - 1\end{array}}$

$$1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0 \rightarrow 1+\sin x+\cos x+2\sin x\cos x+2\cos^2 x-1=0$$

$$\rightarrow (\sin x+\cos x)+2\cos x(\sin x+\cos x)=0 \rightarrow (\sin x+\cos x)(1+\cos x)=0$$

$$\begin{cases} \sin x+\cos x=0 \rightarrow \sin x=-\cos x \xrightarrow{\div\cos x} \tan x=-1=\tan(-\frac{\pi}{4}) \xrightarrow{x=k\pi+\alpha} x=k\pi-\frac{\pi}{4} \\ 1+2\cos x=0 \rightarrow \cos x=-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=k\pi\pm\alpha} x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

۸- گزینه‌ی ۱

می‌دانیم: $\boxed{\sin 2a=\frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}\ ,\ \cos 2a=\frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}}$

$$\sin 2x+\cos 2x=-\frac{1}{5} \rightarrow \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}+\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=-\frac{1}{5}$$

$$\xrightarrow{\tan x=A}\frac{2A}{1+A^2}+\frac{1-A^2}{1+A^2}=\frac{-1}{5} \rightarrow \frac{2A+1-A^2}{1+A^2}=\frac{-1}{5}$$

$$\rightarrow 10A+5-5A^2=-1-A^2 \rightarrow 4A^2-10A-6=0 \rightarrow 2A^2-5A-3=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=25+24=49 \rightarrow A_1,A_2=\frac{5\pm 7}{4}=3,-\frac{1}{2} \rightarrow \tan x=3,-\frac{1}{2}$$

۹- گزینه‌ی ۳

ابتدا ضابطه‌ی $g(x)$ را یافته، سپس مطابق مقادیر به دست آمده، حاصل $(f+g)og(-2)$ را می‌یابیم.

$$\left.\begin{array}{l} g(2x+1)=4x^2+12x+5 \\ 2x+1=t \Rightarrow x=\dfrac{t-1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow g(t)=4\left(\frac{t-1}{2}\right)^2+12\left(\frac{t-1}{2}\right)+5$$

$$\Rightarrow g(t)=t^2-2t+1+6t-6+5=t^2+4t \Rightarrow g(x)=x^2+4x$$

$$(f+g)\overbrace{og(-2)}^{-4}=(f+g)(-4)=f(-4)+g(-4)=-7+0=-7$$

۱۰- گزینه‌ی ۲

$$f(x)=3-2x \to y=3-2x \to 2x=3-y \to x=\frac{3-y}{2} \to f^{-1}(x)=\frac{3-x}{2}=\frac{3}{2}-\frac{x}{2}$$

$$y=\sqrt{f^{-1}(2x^2+3)-x}=\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{2x^2+3}{2}-x}=\sqrt{\frac{3}{2}-x^2-\frac{3}{2}-x}=\sqrt{-x^2-x}$$

زیر رادیکال $\geq 0 \to -x^2-x \geq 0 \to x^2+x \leq 0 \to x(x+1) \leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 \leq x \leq 0$ یا $x \in [-1,0]$

۱۱- گزینه‌ی ۱

$$\left|\begin{array}{l} 0 \\ 5 \end{array}\right. \xrightarrow{\text{صدق در تابع}} 5=a(1)+3 \to a+3=5 \Rightarrow a=2$$

طبق نمودار فاصله‌ی $x=0$ تا $x=2$ برابر نصف دوره تناوب تابع مورد نظر است:

$$2-0=\frac{T}{2} \Rightarrow T=4 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|}=4 \Rightarrow b\pm\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2} & \text{در گزینه‌ها نیست} \\ a+b=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

دوره تناوب تابع $y=\sin x$ برابر $T=\dfrac{2\pi}{|a|}$ است.

۱۲- گزینه‌ی ۳

از روی شکل مشخص است که $D_f=[0,2]$ است. حال با داشتن دو نقطه از این خط، معادله‌ی خط را می‌نویسیم.

$$A\left|\begin{array}{l} 0 \\ 3 \end{array}\right., B\left|\begin{array}{l} 0 \\ 2 \end{array}\right. \to \frac{y-yA}{x-xA}=\frac{yA-yB}{xA-xB} \to \frac{y-3}{x}=\frac{3}{-2}$$

$$\to ۲y-۶=-۳x \to ۲y=-۳x+۶ \to f(x)=-\frac{۳}{۲}x+۳$$

$$D_{fof}=\{x\in D_f , f(x)\in D_f\}=\{۰\le x\le ۲\ ,\ \underbrace{۰\le -\frac{۳}{۲}x+۳\le ۲}_{*}\}$$

$$*:۰\le -\frac{۳}{۲}x+۳\le ۲ \to -۳\le -\frac{۳}{۲}x\le -۱ \xrightarrow{\times(-\frac{۲}{۳})} ۲\ge x\ge \frac{۲}{۳}$$

$$D_{fof}=\{۰\le x\le ۲\ ,\ \frac{۲}{۳}\le x\le ۲\}=\frac{۲}{۳}\le x\le ۲$$

که در این بازه دو عدد صحیح $(x=۱,۲)$ وجود دارد.

۱۳- گزینه‌ی ۲

می‌دانیم $\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=\sin\alpha$ بنابراین $y=b\sin ax$ است.

از طرفی دوره‌ی تناوب تابع $f(x)=b\sin ax$ به صورت $\frac{۲\pi}{|a|}$ می‌باشد.

همچنین از روی نمودار تابع دوره‌ی تناوب تابع برابر است با ۴π در نتیجه:

$$\frac{۲\pi}{|a|}=۴\pi \to |a|=\frac{۱}{۲} \to a=\pm\frac{۱}{۲} \xrightarrow{a>۰} a=\frac{۱}{۲}$$

با توجه به نمودار $f(\pi)=-۲$ می‌باشد.

$$\frac{۲\pi}{|a|}=b\sin a\pi \xlongequal{a=\frac{۱}{۲}} b\sin\frac{\pi}{۲}=b=-۲ \to ab=\frac{۱}{۲}\times(-۲)=-۱$$

۱۴- گزینه‌ی ۴

ابتدا معکوس تابع $f(x)=۲^{x+۱}$ را پیدا می‌کنیم.

$$y=۲^{x+۱} \xrightarrow{\log_b^a=k\to b^k=a} x+۱=\log_۲^y \to x=\log_۲^y-۱ \to x=\log_۲^y-\log_۲^۲$$

$$\to x=\log_۲^{\frac{y}{۲}} \to f^{-۱}(x)=\log_۲^{\frac{x}{۲}}$$

$$gof^{-۱}(x)=g(f^{-۱}(x))=\sqrt{۶-۲\log_۲^{\frac{x}{۲}}}$$

برای آنکه $f^{-۱}(x)$ قابل انجام باشد باید جلوی لگاریتم مثبت و زیر رادیکال، بزرگتر مساوی صفر باشد.

$$\frac{x}{2} > 0 \to x > 0 (I)$$

$$6 - 2\log_2^{\frac{x}{2}} \ge 0 \to 2\log_2^{\frac{x}{2}} \le 6 \to \log_2^{\frac{x}{2}} \le 3 \xrightarrow{\log_a^A \le m \xrightarrow{a>1} A \le a^m} \frac{x}{2} \le 2^3 \to \frac{x}{2} \le 8 \to x \le 165(II)$$

$$I \cap II: 0 < x \le 16 \to x \in \{0,16] \to Max(b-a) = 16 - 0 = 16$$

۱۵- گزینه‌ی ۳

می‌دانیم: $\boxed{\cot a - \tan a = 2\cot 2a \ , \ \sin 2a = \frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}}$

$$\sin 2x = \frac{4}{5} \to \frac{1\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{4}{5} \to 4 + 4\tan^2 x = 10\tan x$$

$$\to 4\tan^2 x - 10\tan x + 4 = 0 \to 2\tan^2 x - 5\tan x + 2 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 16 = 9} \tan x = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$= 2, \frac{1}{2}$$

پس: $\begin{cases} \cot\frac{x}{2} - \tan\frac{x}{2} = 2\cot x = 2(\frac{1}{\tan x}) \xlongequal{\tan x = 2} 1 \\ \cot\frac{x}{2} - \tan\frac{x}{2} = 2\cot x = 2(\frac{1}{\tan x}) \xlongequal{\tan x = \frac{1}{2}} 4 \end{cases}$

۱۶- گزینه‌ی ۱

می‌دانیم: $\boxed{\sin 2a = 2\sin a \cos a}$

$$\tan x = \sin 2x \to \frac{\sin x}{\cos x} = 2\sin x \cos x \to \sin x = 2\sin x \cos^2 x$$

$$\to 2\sin x \cos^2 x - \sin x = 0 \to \sin x(2\cos^2 x - 1) = 0$$

$$\to \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{\qquad\qquad} x = k\pi \\ \cos^2 x = \frac{1}{2} \to \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} \xrightarrow{x = k\pi \pm \alpha} x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{3\pi}{4} \xrightarrow{x = k\pi \pm \alpha} x = k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \end{cases} \end{cases}$$

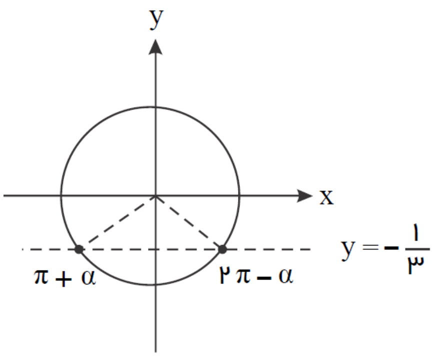
بنابراین جواب‌های $x = k\pi + \frac{i\pi}{4}$ به صورت $x = k\pi$ و $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ و $x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$ هستند.

بنابراین مجموعه‌ی مقادیر i به صورت $\{0,1,3\}$ است.

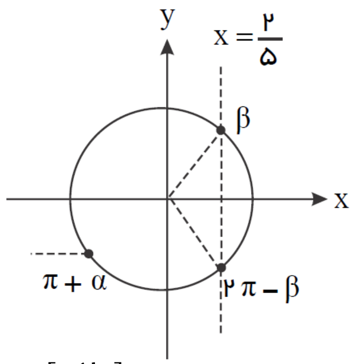
۱۷- گزینه‌ی ۱

$$(7\sin x-8)(3\sin x+1)(5\cos x-2)=0\Rightarrow\begin{cases}7\sin x-8=0\Rightarrow \sin x=\dfrac{8}{7}>1 \ \text{غ ق ق}\\ 3\sin x+1=0\Rightarrow \sin x=-\dfrac{1}{3}\\ 5\cos x-1=0\Rightarrow \cos x=\dfrac{2}{5}\end{cases}$$

$\sin x=-\dfrac{1}{3}\rightarrow$



$\cos x=\dfrac{2}{5}\rightarrow$



پس مجموع ریشه‌های این معادله در بازه‌ی $[0,2\pi]$ برابر است با:

$$(\pi+\alpha)+(2\pi-\alpha)+\beta+(2\pi-\beta)=5\pi$$

۱۸- گزینه‌ی ۳

تابع داده شده را رسم می‌کنیم.

$$y_1=-x^2+6x-5=-(x^2-6x+5)=-(x-1)(x-5)\xrightarrow{\text{محل برخورد تابع با محور طول‌ها}}x=1\,,\ x=5$$

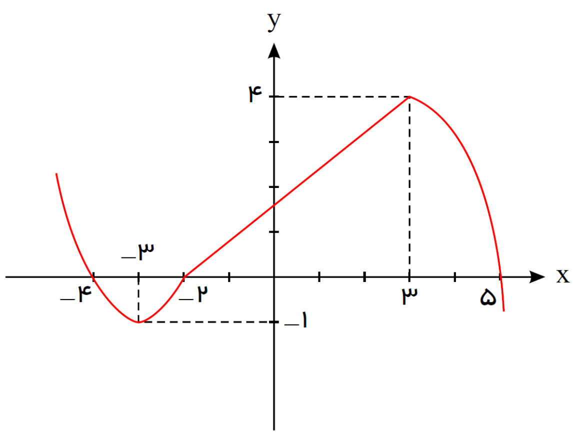
$$\rightarrow\left|\begin{array}{l}\dfrac{-b}{2a}\\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\end{array}\right.\rightarrow s\left|\begin{array}{l}3\\4\end{array}\right.$$

$$y_2=\frac{4}{5}x+\frac{8}{5}\rightarrow\left|\begin{array}{l}-2\\0\end{array}\right.\ ,\ \left|\begin{array}{l}3\\4\end{array}\right.$$ دو نقطه برای رسم

$$y_3=x^2+6x+8=(x+4)(x+2)\xrightarrow{\text{محل برخورد تابع با محور طول‌ها}}$$

$$x=-4\,,\ x=-2$$

$$\rightarrow\left|\begin{array}{l}\dfrac{-b}{2a}\\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\end{array}\right.\rightarrow s\left|\begin{array}{l}-3\\-1\end{array}\right.$$



تابع داده شده در بازه $[-3,3]$ اکیداً صعودی است و طول این بازه برابر ۶ است.

۱۹- گزینه‌ی ۴

برای پیدا کردن ضابطه وارون، x را بر حسب y به دست می‌آوریم و سپس yها را به x و x را به y تبدیل می‌کنیم.

$$y = \underbrace{x^۲ - ۶x} + ۳ \to y = (x-۳)^۲ - ۹ + ۳ \to y = (x-۳)^۲ - ۶ \to (x-۳)^۲ = y+۶$$

$$\to x - ۳ = \pm\sqrt{y+۶} \xrightarrow{x<۰} x - ۳ = -\sqrt{y+۶} \to x = ۳ - \sqrt{y+۶}$$

$$\to f^{-۱}(x) = ۳ - \sqrt{x+۶}$$

دامنه تابع معکوس، برد تابع اصلی است چون طبق صورت سؤال $x<۰$ است پس $۳-\sqrt{y+۶}$ نیز باید منفی باشد.

$$۳ - \sqrt{y+۶} < ۰ \to y + ۶ > ۹ \to y > ۳$$

پس: $f^{-۱}(x) = ۳ - \sqrt{x+۶}\ ,\ x > ۳$

۲۰- گزینه‌ی ۳

طول ضلع AB برابر $\tan\alpha$ می‌باشد، پس مساحت مثلث AOB برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲} \times AB \times OA \xrightarrow{OA=۱} S = \frac{۱}{۲} \times \tan\alpha$$

مختصات نقطه P روی دایره مثلثاتی به صورت $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ می‌باشد.

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow (۲a-۱)^۲ + a^۲ = ۱ \Rightarrow ۵a^۲ - ۴a + ۱ = ۱ \Rightarrow a(۵a-۴) = ۰$$

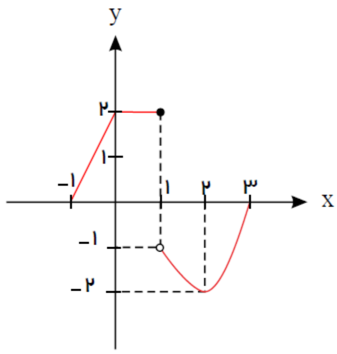
$$\to \begin{cases} a = ۰ \\ a = \frac{۴}{۵} \end{cases}$$

پس $\cos\alpha$ برابر $\frac{۴}{۵}$ و $\sin\alpha$ برابر $\frac{۳}{۵}$ است.

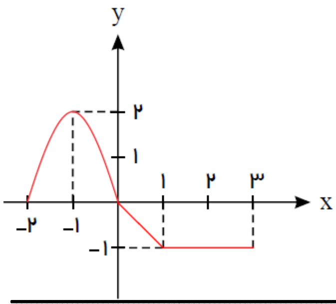
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{۳}{۵}}{\frac{۴}{۵}} = \frac{۳}{۴} \to S = \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۸}$$

نمونه سوال تشریحی ویژه آزمون دی ماه

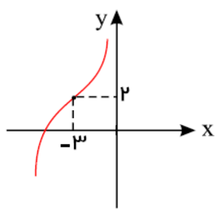
۱- نمودار تابع $y = f(x-1)$ به‌صورت مقابل است. نمودار تابع $y = f(\frac{1}{2}x) - 1$ را رسم کنید.



۲- نمودار تابع $y = f(-2x)$ به‌صورت مقابل است. نمودار تابع $y = -2f(x-2)$ را رسم کنید.



۳- اگر نمودار $y = (x+a)^3 + b$ به‌صورت مقابل باشد، مقادیر a و b را بیابید.



۴- تابع $y = x^3$ را ابتدا نسبت به محور yها قرینه کرده، سپس نمودار حاصل را دو واحد به چپ منتقل کرده و در نهایت آن را ۵ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا تابع f حاصل شود. ضابطه‌ی تابع وارون تابع f را بیابید.

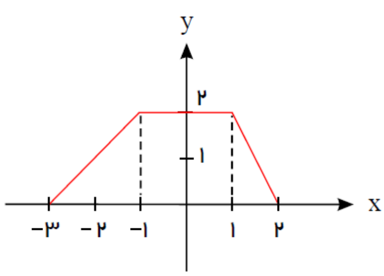
۵- نمودار $y = \sqrt[3]{x}$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. نمودار حاصل را ۴ واحد به راست منتقل می‌کنیم و سپس آن را ۳ واحد به پایین می‌بریم تا تابع f حاصل شود. ضابطه‌ی تابع وارون تابع f را بیابید.

۶- نمودار $y = |x|$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. سپس در راستای افقی با ضریب ۳ منقبض می‌کنیم و در نهایت آن را ۲ واحد به چپ منتقل می‌کنیم. ضابطه‌ی تابع حاصل را بنویسید.

۷- نمودار تابع $y = f(x)$ به‌صورت مقابل است. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = -2f(x-1)$

ب) $y = f(2x-1)$



۸- اگر f روی $\mathbb{R}$ تابعی اکیداً صعودی باشد، دامنه‌ی تابع g را بیابید.

$$g(x)=\sqrt{f(|x-2|)-f(|x+1|)}$$

۹- اگر f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد، دامنه‌ی تابع g را بیابید.

$$g(x)-\sqrt{f(|2x-1|)f(x)}$$

۱۰- اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی و $f(-2)=0$ باشد، دامنه‌ی تابع زیر را بیابید.

$$g(x)=\sqrt{(x^2-81)x(x)}$$

۱۱- نمودار تابع $y=|\log_2(x+1)|$ را رسم کنید و یکنوایی آن را بررسی کنید.

۱۲- اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $p(x)=x^3-mx^2+x+3$ بر $x+1$ باربر ۳- باشد، آنگاه باقی‌مانده‌ی $p(x)$ بر $x-2$ را بیابید.

۱۳- معادله‌ی زیر چند جواب در بازه‌ی $[0,\pi]$ دارد؟

$$\cos(x+\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{4}+\pi)$$

۱۴- معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

الف) $\sin(x-\frac{2\pi}{3})=\cos 2x$

ب) $\tan(x+\frac{\pi}{7})=\cot(\frac{2\pi}{7})$

۱۵- معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

الف) $\tan(1+\frac{x}{2})\tan$

ب) $2\cos^2 x=\sin x-1$

۱۶- معادله‌ی مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\sin^2(x-\frac{\pi}{8})+2\cos(\frac{5\pi}{8}-x)=3$$

۱۷- ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=2\sin^4 x-5$

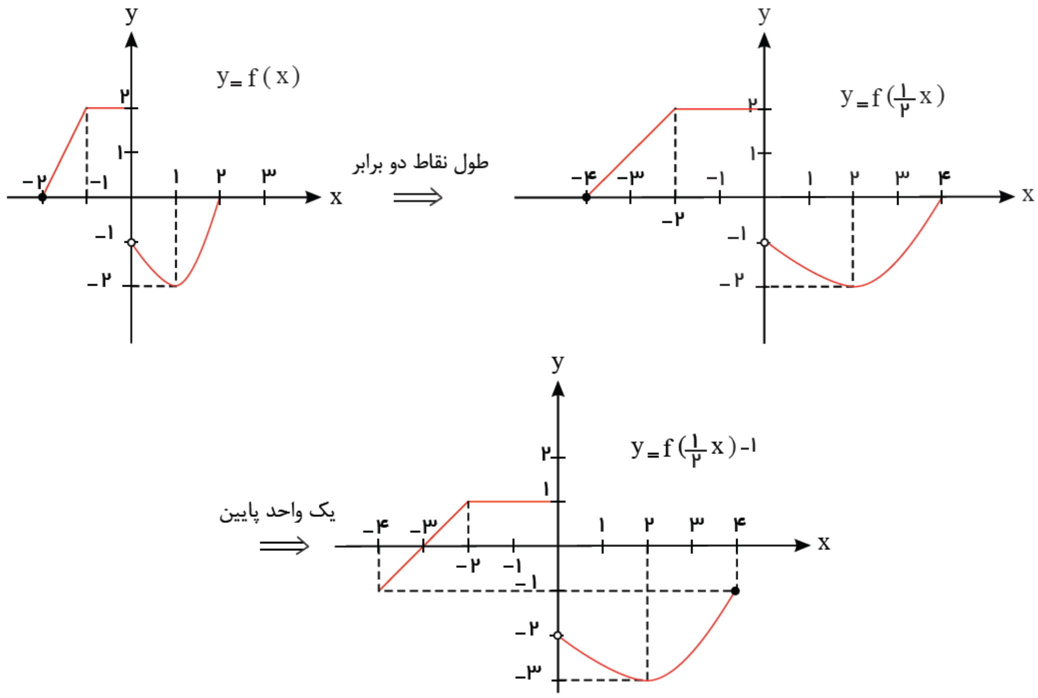
ب) $g(x)=-3\sin^5 2x+10$

۱۸- اگر $\frac{5\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{3}$ و $\tan\alpha=\frac{2m-1}{3}$، آنگاه حدود m را بیابید.

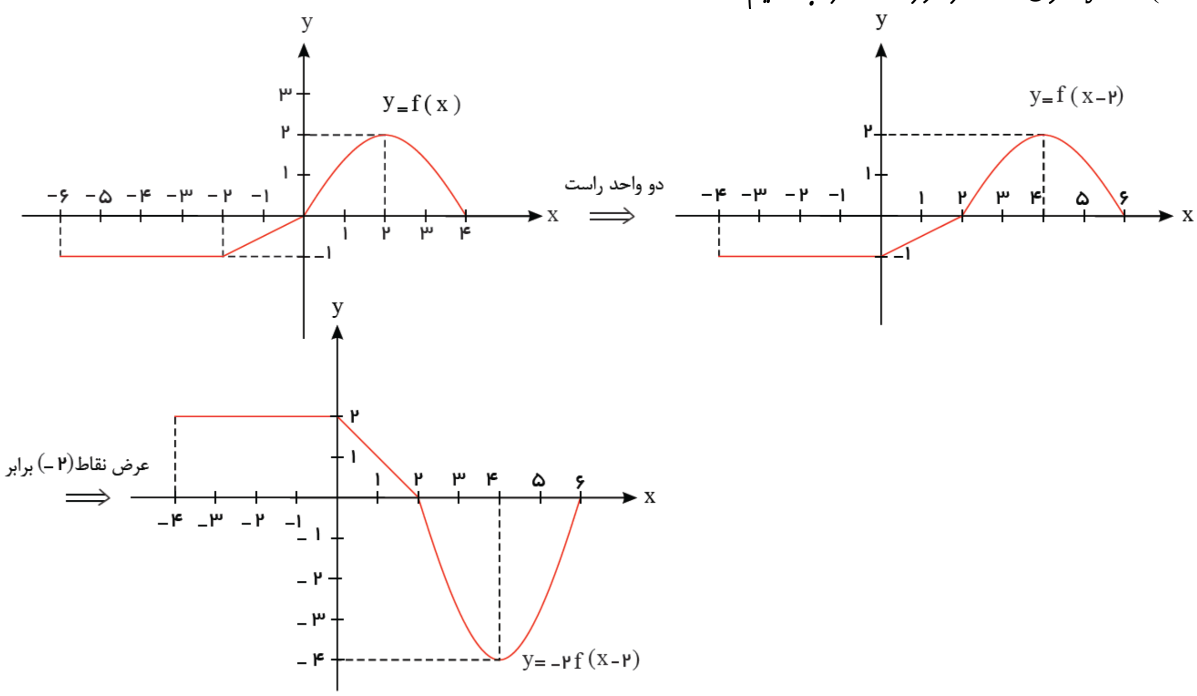
۱۹- دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{\tan^2 x-1}$ را بیابید.

۲۰- اگر $\tan\alpha\le 1$، آنگاه حدود α را در بازه‌ی $[0,2\pi]$ بیابید.

پاسخ ۱:
با توجه به این‌که برای رسم $y=f(x-1)$ باید $y=f(x)$ را یک واحد به راست منتقل کنیم. پس برای رسم $y=f(x)$ از روی $y=f(x-1)$ باید نمودار $y=f(x-1)$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم پس:



پاسخ ۲:
با توجه به این‌که برای رسم $y=f(-2x)$ باید در نمودار $y=f(x)$ طول نقاط را بر ۲- تقسیم کنیم، حال برای رسم $y=f(x)$ از روی $y=f(-2x)$ طول نقاط را در ۲- ضرب کنیم.



پاسخ ۳:

نمودار $y=x^3$ ابتدا ۳ واحد به چپ و سپس ۲ واحد به بالا منتقل شده است تا نمودار داده شده حاصل شود، پس داریم:

$$y=x^3 \xrightarrow[x\to x+3]{\text{3 واحد به چپ}} y=(x+3)^3 \xrightarrow{\text{2 واحد به بالا}} y=(x+3)^3+2$$

در مقایسه با تابع $y=(x+a)^3+b$ داریم:

$a=3, b=2$

پاسخ ۴:

$$y=x^3 \xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور y ها}} y=(-x)^3=-x^3 \xrightarrow[x\to x+2]{\text{2 واحد به چپ}} y=-(x+2)^3$$

$$\xrightarrow{\text{5 واحد به بالا}} y=f(x)=-(x+2)^3+5 \Rightarrow (x+2)^3=5-y$$
$$\Rightarrow x+2=\sqrt[3]{5-y} \Rightarrow x+2=-\sqrt[3]{y-5} \Rightarrow x=-2-\sqrt[3]{y-5} \Rightarrow y=f^{-1}(x)=-2-\sqrt[3]{x-5}$$

پاسخ ۵:

$$y=\sqrt[3]{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به x ها}} y=-\sqrt[3]{x} \xrightarrow[x\to x-4]{\text{4 واحد به راست}} y=-\sqrt[3]{x-4}$$

$$\xrightarrow{\text{3 واحد به پایین}} y=-\sqrt[3]{x-4}-3 \Rightarrow f(x)=-\sqrt[3]{x-4}-3$$

$$y=-\sqrt[3]{x-4}-3 \Rightarrow \sqrt[3]{x-4}=-y-3 \Rightarrow x-4=(-y-3)^3$$

$$\Rightarrow x=(-y-3)^3+4 \Rightarrow x=4-(3+y)^3 \Rightarrow y=4-(3+x)^3=f^{-1}(x)$$

پاسخ ۶:

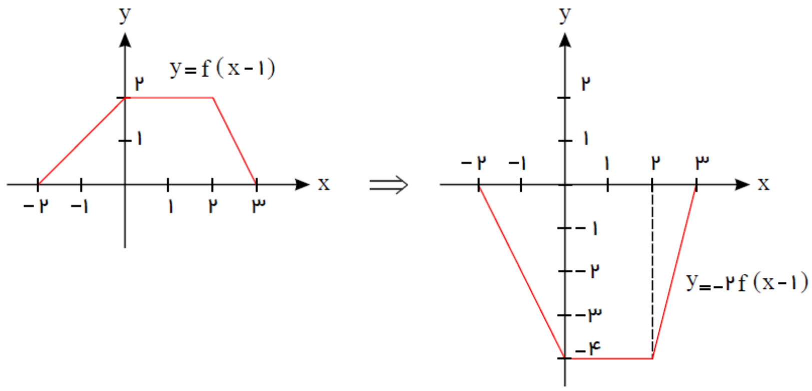
$$y=|x| \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به x ها}} y=-|x| \xrightarrow{\text{انقباض افقی با ضریب 3}} y=-|3x|$$

$$\xrightarrow[x\to x+2]{\text{2 واحد به چپ}} y=-|3(x+2)|=-|3x+6|$$

ضابطه تابع حاصل به‌صورت $y=-|3x+6|$ می‌باشد.

پاسخ ۷:

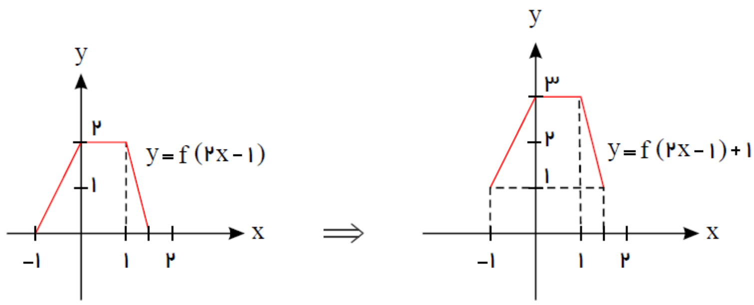
الف) برای رسم $y = 2f(x-1)$،نمودار $y = f(x)$ را ابتدا یک واحد به سمت راست منتقل کرده و سپس عرض نقاط را در ۲− ضرب می‌کنیم.



ب)

$$y = f(x) \xrightarrow{x \to x-1} y = f(x-1) \xrightarrow{x \to 2x} y = f(2x-1) \xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} y = f(2x-1)+1$$

با توجه به تبدیل‌های بالا برای رسم $y = f(2x-1)+1$، نمودار $y = f(x)$ را ابتدا یک واحد به سمت راست منتقل کرده و سپس طول نقاط حاصل را بر ۲ تقسیم می‌کنیم و در نهایت نمودار حاصل را یک واحد بالا می‌بریم. توجه کنید $y = f(x-1)$ در قسمت الف رسم شده، پس داریم:



پاسخ ۸:

نکته: اگر f تابعی اکیداً صعودی باشد و $f(x) \le f(b)$ آنگاه $a \le b$.

$$g(x) = \sqrt{f(|x-2|) - f(|x+1|)} \Rightarrow f(|x-2|) - f(|x+1|) \ge 0$$

$$\Rightarrow f(|x-2|) \ge f(|x+1|) \xrightarrow{\text{f اکیداً صعودی}} |x-2| \ge |x+1|$$

برای حل این‌گونه نامعادلات، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(x-2)^2 \ge (x+1)^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 \ge x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 4 - x \ge 2x + 4x$$

$$\Rightarrow 6x \le 3 \Rightarrow x \le \frac{1}{2} \Rightarrow D_g = (-\infty, \frac{1}{2}]$$

پاسخ ۹:

نکته: اگر f تابعی اکیداً نزولی باشد و $f(a) \le f(b)$ آنگاه $a \ge b$.

$$g(x) = \sqrt{f(|2x-1|-f(|x+1|)} \Rightarrow f(|2x-1|)-f(|x+1|) \ge 0$$

$$\Rightarrow f(|2x-1|) \ge f(|x+1|) \xrightarrow{\text{اکیداً نزولی } f} |2x-1| \le |x+1|$$

$$\Rightarrow (2x-1)^2 \le (x+1)^2 \Rightarrow 4x^2-4x+1 \le x^2+2x+1 \Rightarrow 3x^2-6x \le 0$$

$3x(x-2) \le 0 \Rightarrow$

x		0		2	
$3x(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow 0 \le x \le 2$

$$\Rightarrow D_g = [0, 2]$$

پاسخ ۱۰:

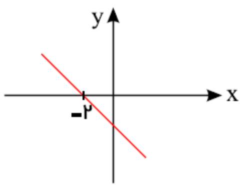
$$g(x) = \sqrt{(x^2-71)f(x)} \Rightarrow (x^2-81)f(x) \ge 0$$

چون f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی و $f(-2)=0$ است، داریم:

برای $x < -2$ تابع f مثبت است. $x < -2 \Rightarrow f(x) > f(-2) \Rightarrow f(x) > 0$

برای $x > -2$ تابع f منفی است. $x > -2 \Rightarrow f(x) < f(-2) \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow$

نمودار f تقریباً به‌صورت مقابل است.

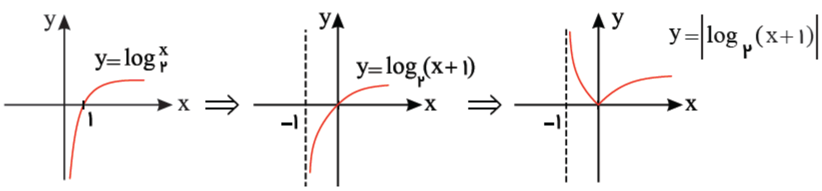


$$x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x = \pm 9$$

x		-9		-2		9	
x^2-81	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$(x^2-81)f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$\Rightarrow x \le -9$ یا $-2 \le x \le 9 \Rightarrow D_g = (-\infty, -9] \cup [-2, 9]$

پاسخ ۱۱:



$(-1, 0] \to$ اکیداً نزولی ، $[0, +\infty) \to$ اکیداً صعودی

پاسخ ۱۲:

$$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = p(-۱) = -۳ \Rightarrow -۱-m-۱+۳=-۳$$
$$\Rightarrow -m+۱=-۳ \Rightarrow m=۴ \Rightarrow p(x)=x^۳-۴x^۲+x+۳$$
$$x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = p(۲) = ۸-۱۶+۲+۳=-۳$$

پاسخ ۱۳:

$$\text{نکته}: \cos u = \cos v \Rightarrow u = ۲k\pi \pm v$$
$$\cos(x+\frac{\pi}{۴}) = \cos(\frac{x}{۴}+\pi) \Rightarrow x+\frac{\pi}{۴} = ۲k\pi \pm (\frac{\pi}{۴}+\pi)$$
$$x+\frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \frac{x}{۴}+\pi \Rightarrow x-\frac{x}{۴} = ۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \frac{۳x}{۴} = ۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴}$$
$$x = \frac{۸k\pi}{۳}+\pi \xrightarrow{۰\le x\le \pi} \boxed{x=\pi}$$
$$x+\frac{\pi}{۴} = ۲k\pi - \frac{x}{۴} - \pi \Rightarrow \frac{۵x}{۴} = ۲k\pi - \pi - \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi - \frac{۵\pi}{۴}$$
$$x = \frac{۸k\pi}{۵} - \pi \xrightarrow{۰\le x\le \pi} x = \frac{۸\pi}{۵}-\pi = \frac{۳\pi}{۵} \Rightarrow \boxed{x=\frac{۳\pi}{۵}}$$

معادله در بازه‌ی $[۰,\pi]$ دارای ۲ جواب است.

پاسخ ۱۴:

می‌دانیم $\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha) = \cos\alpha, \tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha) = \cot\alpha$

می‌دانیم $\sin u = \sin v \Rightarrow u = ۲ku+v, u = ۲k\pi+\pi-v$

می‌دانیم $\tan u = \tan v \Rightarrow u = k\pi + v$

الف)

$$\sin(x-\frac{۲\pi}{۳}) = \cos ۲x \Rightarrow \sin(x-\frac{۲\pi}{۳}) = \sin(\frac{\pi}{۲}-۲x)$$

$$x-\frac{۲\pi}{۳} = ۲k\pi+\frac{\pi}{۲}-۲x \Rightarrow ۳x = ۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+\frac{۲\pi}{۳} = ۲k\pi+\frac{۷\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳}+\frac{۷\pi}{۱۸}$$
$$x-\frac{۲\pi}{۳} = ۲k\pi+\pi-(\frac{\pi}{۲}-۲x) \Rightarrow x = ۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۲}+۲x+\frac{۲\pi}{۳}$$
$$\Rightarrow -x = ۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+\frac{۲\pi}{۳} = ۲k\pi+\frac{۷\pi}{۶} \Rightarrow x = -۲k\pi-\frac{۷\pi}{۶}$$

ب)

$$\tan(x+\frac{\pi}{۷}) = \cot(\frac{۲\pi}{۷}) \Rightarrow \tan(x+\frac{\pi}{۷}) = \tan(\frac{\pi}{۲}-\frac{۲\pi}{۷})$$
$$\Rightarrow \tan(x+\frac{\pi}{۷}) = \tan(\frac{۳\pi}{۱۴}) \Rightarrow x+\frac{\pi}{۷} = k\pi+\frac{۳\pi}{۱۴} \Rightarrow x = k\pi+\frac{\pi}{۱۴}$$

پاسخ ۱۵:

نکته: $\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha$

نکته: $\tan u=\tan v \to u=k\pi+v$

نکته: $\sin u=۱ \to u=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$

الف) $\tan(۱+\frac{x}{۲})\tan(۱-\frac{x}{۳})=۱ \Rightarrow \tan(۱+\frac{x}{۲})=\frac{۱}{\tan(۱-\frac{x}{۳})}$

$$\Rightarrow \tan(۱+\frac{x}{۲})=\cot(۱-\frac{x}{۳})=\tan(\frac{\pi}{۲}-(۱-\frac{x}{۳}))\Rightarrow \tan(۱+\frac{x}{۲})=\tan(\frac{\pi}{۲}-۱+\frac{x}{۳})$$

$$\Rightarrow ۱+\frac{x}{۲}=k\pi+\frac{\pi}{۲}-۱+\frac{x}{۳}\Rightarrow \frac{x}{۲}-\frac{x}{۳}=k\pi+\frac{\pi}{۲}-۲\Rightarrow x=۶k\pi+۳\pi-۱۲$$

ب)

$$۲\cos^۲ x=\sin x-۱\Rightarrow ۲(۱-\sin^۲ x)=\sin x-۱\Rightarrow ۲-۲\sin^۲ x=\sin x-۱$$

$$\Rightarrow ۲\sin^۲ x+\sin x-۳=۰,\sin x=t\Rightarrow ۲t^۲+t-۳=۰\Rightarrow t=۱,t=-\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin x=-\frac{۳}{۲}\ \text{غ‌ق‌ق}\ ,\sin x=۱\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

پاسخ ۱۶:

می‌دانیم:

$$\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\sin^۲(x-\frac{\pi}{۸})+۲\cos(\frac{۵\pi}{۸}-x)=۳\Rightarrow \sin^۲(x-\frac{\pi}{۸})+۲\sin(\frac{\pi}{۲}-(\frac{۵\pi}{۸}-x))-۳=۰$$

$$\Rightarrow \sin^۲(x-\frac{\pi}{۸})+۲\sin(\frac{\pi}{۲}-\frac{۵\pi}{۸}+x)-۳=۰$$

$$\Rightarrow \sin^۲(x-\frac{\pi}{۸})+۲\sin(x-\frac{\pi}{۸})-۳=۰,\sin(x-\frac{\pi}{۸})=t$$

$$\Rightarrow t^۲+t-۳=۰\Rightarrow t=۱,t=-۳$$

$$\sin(x-\frac{\pi}{۸})=-۳\ \text{غ‌ق‌ق}\ ,\sin(x-\frac{\pi}{۸})=۱\Rightarrow x-\frac{\pi}{۸}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۸}$$

پاسخ ۱۷:

نکته: زوج: $n \to ۰\le \sin^n u\le ۱$ و $۰\le\cos^n u\le ۱$

نکته: فرد: $n \to -۱\le \sin^n u\le ۱$ و $-۱\le\cos^n u\le ۱$

الف) $f(x)=۲\sin^۴ x-۵$

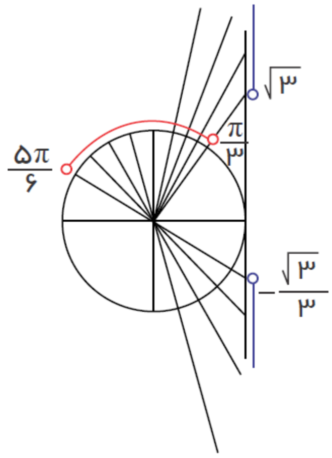
$$۰ \le \sin^۴ x \le ۱ \xrightarrow{\times ۲} ۰ \le ۲\sin^۴ x \le ۲ \Rightarrow ۰-۵ \le ۲\sin^۴ x-۵ \le ۲-۵$$
$\Rightarrow -۵ \le f(x) \le -۳ \Rightarrow \min f = -۵$ و $\max f = -۳$

ب) $g(x) = -۳\sin^۵ ۲x + ۱۰$

$$-۱ \le \sin^۵ ۲x \le ۱ \xrightarrow{\times(-۳)} ۳ \ge -۳\sin^۵ ۲x \ge -۳ \Rightarrow -۳+۱۰ \le -\sin^۵ ۲x + ۱۰ \le ۳+۱۰$$
$\Rightarrow ۷ \le g(x) \le ۱۳ \Rightarrow \min g = ۷$ و $\max g = ۱۳$

پاسخ ۱۸:

با توجه به دایره‌ی مثلثاتی مقابل داریم:



$$\frac{\pi}{۳} < \alpha < \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow \frac{\pi}{۳} < \alpha < \pi - \frac{\pi}{۶}$$
$\frac{\pi}{۳} < \alpha < \pi - \frac{\pi}{۶} \Rightarrow \tan\alpha > \sqrt{۳}$ یا $\tan\alpha < -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

$\Rightarrow \frac{۲m-۱}{۳} > \sqrt{۳}$ یا $\frac{۲m-۱}{۳} < -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

$\Rightarrow ۲m-۱ > ۳\sqrt{۳}$ یا $۲m-۱ < -\sqrt{۳}$

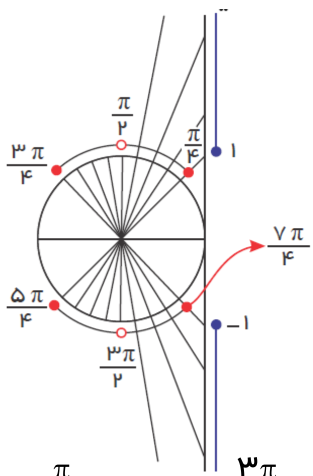
$\Rightarrow m > \frac{۳\sqrt{۳}+۱}{۲}$ یا $m < \frac{۱-\sqrt{۳}}{۲}$

پاسخ ۱۹:

$$f(x)\sqrt{\tan^۲ x - ۱} \Rightarrow \tan^۲ x - ۱ \ge ۰ \Rightarrow \tan^۲ x \ge ۱ \Rightarrow |\tan x| \ge ۱$$
$\Rightarrow \tan x \le -۱$ یا $\tan x \ge ۱$

با توجه به دایره‌ی مثلثاتی مقابل حدود x بصورت زیر است.

$\frac{\pi}{۴} \le x \le \frac{۳\pi}{۴}$ یا $\frac{۵\pi}{۴} \le x \le \frac{۷\pi}{۴}$ و $x \ne \frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$



در حالت کلی داریم:

$۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \le x \le ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴}$ یا $۲k\pi + \frac{۵\pi}{۴} \le x \le ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۴}$ و $x \ne k\pi + \frac{\pi}{۲}$

پاسخ ۲۰:

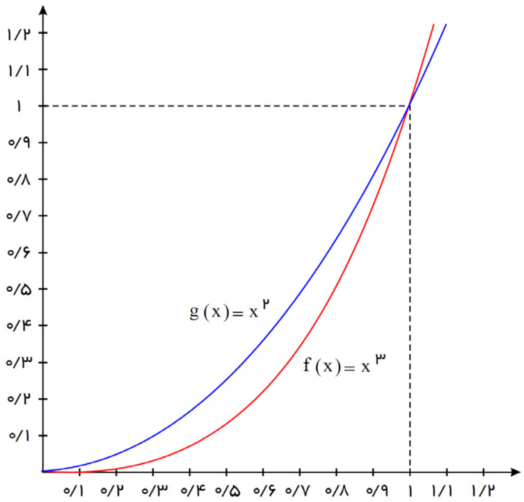
در دایره‌ی مثلثاتی مقابل باید زوایایی را بیابیم که تانژانت آن‌ها کوچک‌تر یا مساوی ۱- است.

مثال‌ها و تمارین کتاب

۱- با توجه به نمودار توابع $f(x)=x^3$ و $g(x)=x^2$ که برای اعداد نامنفی رسم شده‌اند:

الف: آیا برای تمام x های نامنفی، نمودار $f(x)=x^3$ بالای نمودار $g(x)=x^2$ قرار دارد؟

ب) نمودار این دو تابع را در بازه‌ی $[-1,0]$ رسم کنید.

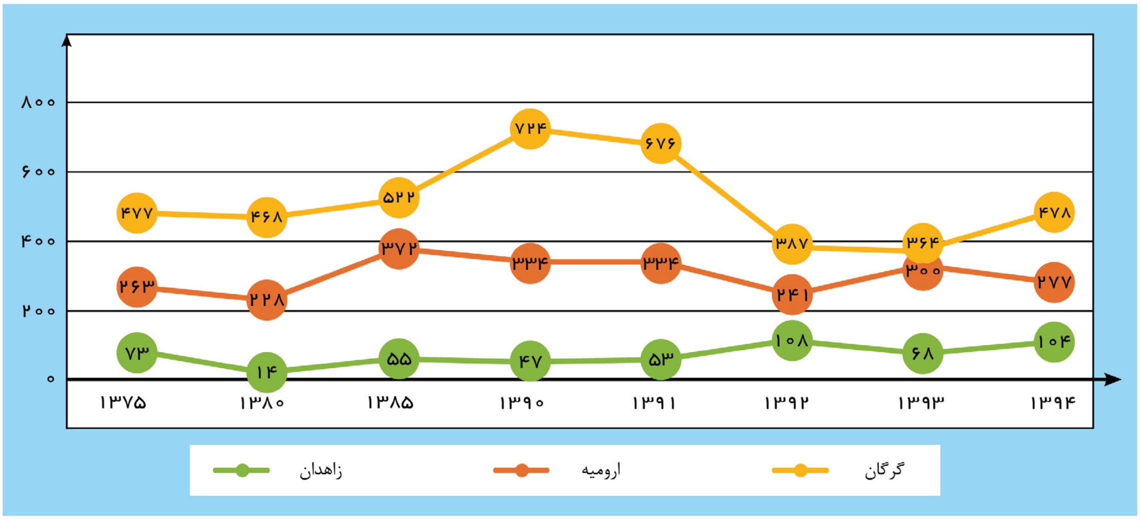


---

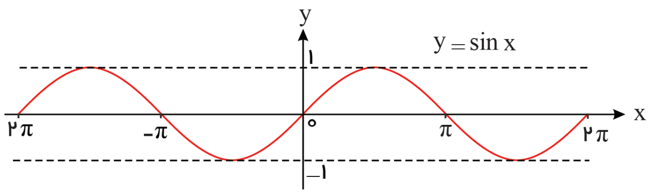
۲. یکی از دغدغه‌های این روزها بحث کاهش بارندگی در کشورمان است که خسارات بسیاری را به بار می‌آورد. در نمودار زیر میزان بارندگی سالانه سه شهر گرگان، زاهدان و ارومیه از سال ۱۳۵۷ تا سال ۱۳۹۴ (برحسب میلی‌متر) آورده شده است. به طور مثال درشهر ارومیه در سال ۸۵ ، میزان بارندگی ۳۷۲ میلی متر و در سال ۹۰ ،۳۳۴ میلی متر بوده است که روند نزولی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. همچنین در شهر گرگان در سال ۸۵، میزان بارندگی ۵۲۲ میلی متر و در سال ۹۰ ،۷۲۴ میلی متر بوده است که روند صعودی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار به سؤال های زیر پاسخ دهید.

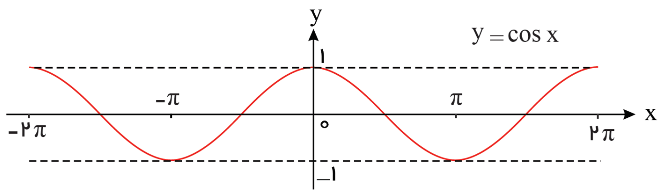
الف) از سال ۷۵ تا ۹۱ ، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر گرگان روند صعودی داشته است؟

ب) از سال ۹۱ تا ۹۴ ، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر ارومیه روند نزولی داشته است؟



۳. نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ در بازه‌ی $[-۲\pi,۲\pi]$ رسم شده است. صعودی یا نزولی بودن آن‌ها را در بازه‌های مشخص شده تعیین نمایید.





x	$[-۲\pi,-\frac{۳\pi}{۲}]$	$[-\frac{۳\pi}{۲},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{۲}]$	$[-\frac{\pi}{۲},۰]$	$[۰,\frac{\pi}{۲}]$	$[\frac{\pi}{۲},\pi]$	$[\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$	$[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$
$y=\sin x$					صعودی			

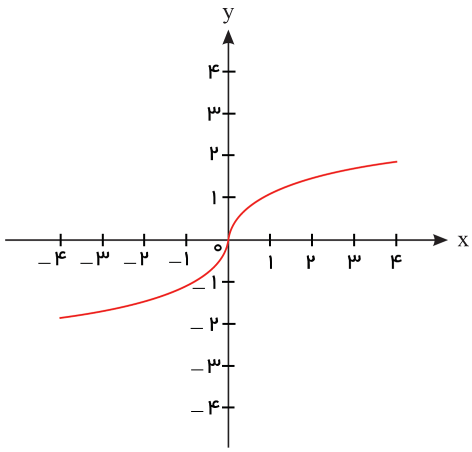
x	$[-۲\pi,-\frac{۳\pi}{۲}]$	$[-\frac{۳\pi}{۲},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{۲}]$	$[-\frac{\pi}{۲},۰]$	$[۰,\frac{\pi}{۲}]$	$[\frac{\pi}{۲},\pi]$	$[\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$	$[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$
$y=\sin x$							صعودی	

۴. به نمودار تابع روبه‌رو دقت کنید.

الف) این تابع اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟

ب) این تابع یک‌به‌یک است؟

پ) آیا تابعی وجود دارد که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد ولی یک‌به‌یک نباشد؟

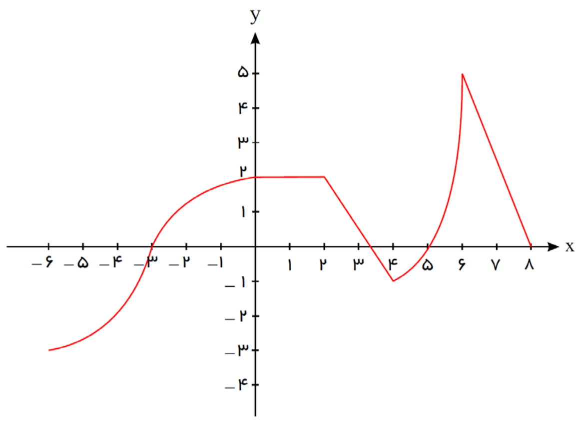


۵. نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را مشخص نمایید.

ب) $y=(x+۲)^۳-۲$

الف) $y=(x-۱)^۳-۱$

۶. با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟



۷. تابع نمایی $y = 2^x - 2$ و تابع لگاریتمی $y = -\log_2^x + 2$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی آن‌ها در کلاس بحث کنید.

---

۸. تابع $y = x^2 | x |$ در بازه‌ی $(-\infty, a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a چقدر است؟

---

۹. تابعی مثال بزنید که در دامنه‌ی خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنه‌ی خود اکیداً نزولی باشد.

---

۱۰. هنگامی که غذا از یخچال بیرون آورده می‌شود. دمای آن با گذشت زمان افزایش می‌یابد و مقدار این دما با استفاده از تابع $d(t)$ با ضابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$d(t) = 4t + 2 \quad ; \quad 0 \le t \le 3$ (واحد t، ساعت است)

الف) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به دست آورده و آن‌ها را تفسیر کنید.

$d(2) = 10$

دمای غذایی که دو ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر ۱۰ درجه‌ی سانتی‌گراد است.

$d(1) =$ ....

$d(3) =$ ....

همچنین اگر یک ماده‌ی غذایی را با دمای ۲ درجه‌ی سانتی‌گراد از یخچال بیرون آوریم، میزان افزایش تعداد باکتری‌ها با بالا رفتن دما با استفاده از تابع $n(d)$ با ضابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$n(d) = 20d^2 - 80d + 500 \quad ; \quad 2 \le d \le 14$

که در این تابع، d دمای ماده‌ی غذایی پس از خروج از یخچال بر حسب درجه‌ی سانتی‌گراد است.

ب) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به دست آورده و آن‌ها را تفسیر کنید.

$n(10) = 20(10)^2 - 80(10) + 500 = 1700$

یعنی تعداد باکتری‌های موجود در یک مادهٔ غذایی، پس از خروج از یخچال با رسیدن به دمای ۱۰ درجهٔ سانتی گراد به ۱۷۰۰ افزایش یافته است.

$n(2) =$ ....

$n(3) =$ ....

به طور کلی می‌توان گفت با استفاده از تابع d، با داشتن زمان، می‌توان دمای غذا و با استفاده از تابع n، با داشتن دمای غذا، می‌توان تعداد باکتری‌ها را بدست آورد، به عبارت دیگر:

زمان $\xrightarrow{d}$ دما $\xrightarrow{n}$ تعداد باکتری‌ها

از الف و ب می توان نتیجه گرفت: تعداد باکتری های موجود در یک مادهٔ غذایی که به میزان ۲ ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر ۱۷۰۰ تاست.

۱۱- با توجه به جدول‌های زیر، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

g(x)	x
۸	۳-
۳	۲-
۰	۱-
۱-	۰
۰	۱
۳	۲
۸	۳

f(x)	x
۷-	۳-
۵-	۲-
۳-	۱-
۱-	۰
۳	۱
۵	۲
۵	۳

الف) $(fog)(۱) =$ ....

ب) $(fog)(-۱) =$ ....

پ) $(gof)(۰) =$ ....

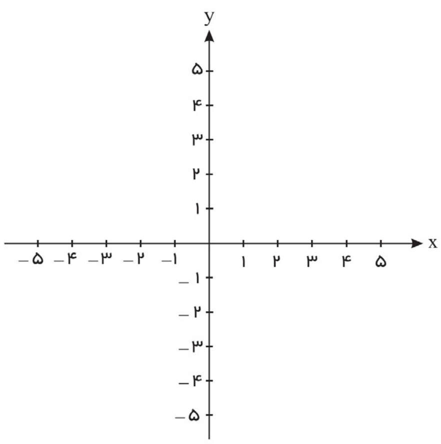
ت) $(gog)(-۲) =$ ....

ث) $(gof)(۲) =$ ....

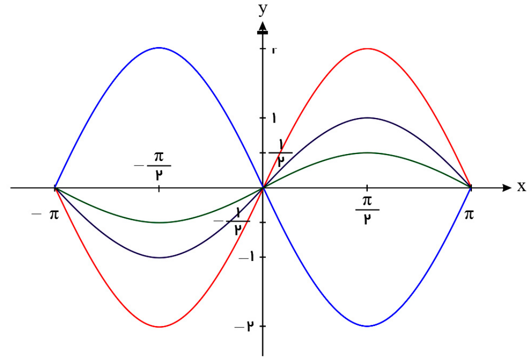
ج) $(fof)(۱) =$ ....

۱۲- اگر $f(x)=\frac{۲}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۳}{x}$، دامنه و ضابطه‌ی توابع fog و fof را به‌دست آورید.

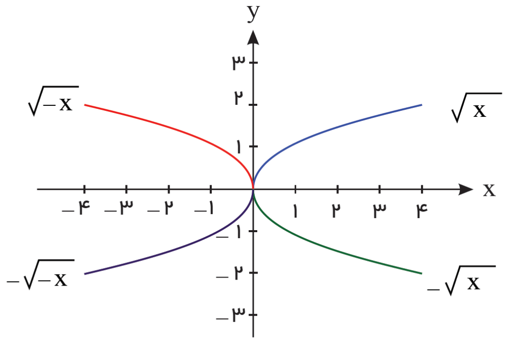
۱۳- نمودار تابع $f(x)=|x-۲|$ را در بازه‌ی $[-۲,۳]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $g(x)=-|x-۲|$ و $h(x)=\frac{۱}{۲}|x-۲|$ و $k(x)=-\frac{۱}{۳}$ را رسم کنید.



۱۴- در شکل روبه‌رو نمودار توابع با ضابطه‌های $y=\sin x$، $y=2\sin x$، $y=-2\sin x$ و $y=\frac{1}{2}\sin x$ در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ رسم شده است. نمودار تابع $y=\sin x$ را مشخص کرده و توضیح دهید نمودار توابع دیگر چگونه به کمک آن رسم شده است. دامنه و برد هر کدام را مشخص کرده و با هم مقایسه کنید.

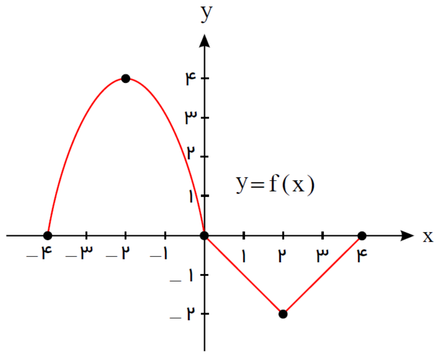


۱۵- نمودار توابع $y=\sqrt{-x}$ و $y=-\sqrt{x}$ و $y=-\sqrt{-x}$ به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم شده است. دامنه و برد توابع فوق را مشخص کنید.



۱۶- نمودار تابع f با دامنه‌ی $[-4,4]$ به صورت زیر داده شده است، می‌خواهیم با استفاده از آن نمودار توابع $y=f(2x)$ و $y=f(\frac{1}{2}x)$ را رسم کنیم.

x	f(x)
−۴	۰
−۲	۴
۰	۰
۲	−۲
۴	۰



۱۷- اگر $f=\{(7,8),(5,3),(9,8),(11,4)\}$ و $g=\{(5,7),(3,5),(7,9),(9,11)\}$، توابع fog و gof را بدست آورید.

۱۸- اگر $f(g(x))=3x^2-6x+14$ و $f(x)=3x-4$، ضابطه‌ی تابع $g(x)$ را بدست آورید.

۱۹- مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x)=x^{۲}-۴$ و $g(x)=\sqrt{x^{۲}-۴}$، آنگاه $(fog)(۵)=-۲۵$.

ب) برای دو تابع f و g که $f \neq g$ تساوی $(fog)(x)=(gof)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست.

پ) اگر $f(۷)=۵$ و $g(۴)=۷$، آنگاه $(fog)(۴)$.

ت) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۲x-۱$، آنگاه $(fog)(۵)=g(۲)$.

---

۲۰ . الناز می‌خواهد از فروشگاه بهار یک لپ‌تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه‌ای برگزار کرده و به برندگان، کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنج شنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می‌دهد. با استفاده ازتابع مرکب نشان دهید کدام یک از حالت های الف و ب به نفع الناز است؟

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

---

۲۱ . تابع $h(x)=(۳x^{۲}-۴x+۱)^{۵}$ ترتیب کدام دو تابع زیر است؟

الف) $f(x)=\sqrt[۵]{x} \quad ; \quad g(x)=۳x^{۲}-۴x+۱$

ب) $k(x)=x^{۵} \quad ; \quad l(x)=۳x^{۲}-۴x+۱$

---

۲۲ . هر یک از توابع زیر را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟

الف) $h(x)=\sqrt[۳]{x^{۲}+۱}$

ب) $l(x)=\sqrt{x^{۲}+۵}$

---

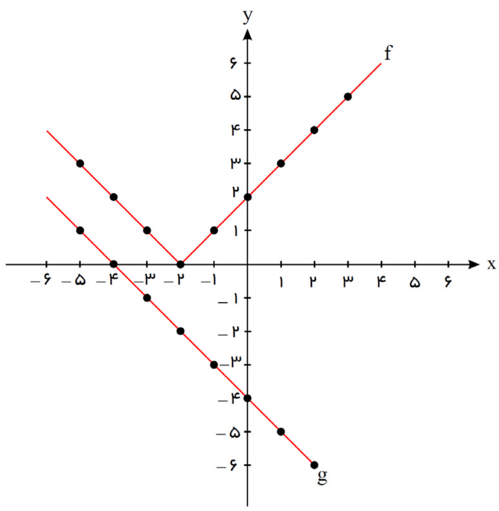
۲۳ . با توجه به نمودارهای توابع f و g، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $(fog)(-۱)$

ب) $(gof)(۰)$

پ) $(fog)(۱)$

ت) $(gof)(-۱)$



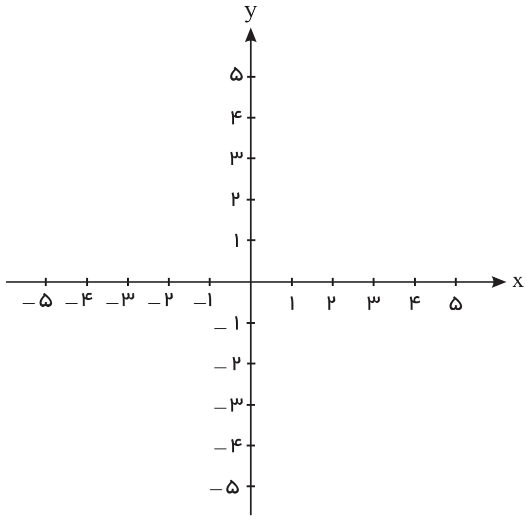
۲۴ . با توجه به ضابطه‌های توابع f و g، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آن‌ها را حل کنید.

الف) $f(x)=۲x-۵ \quad , g(x)=x^{۲}-۳x+۸ \quad : (fog)(x)=۷$

ب) $f(x)=۳x^{۲}+x-۱ \quad , g(x)=۱-۲x \quad : (gof)(x)=-۵$

---

۲۵ . آیا تابع $f(x)=x^{۳}$ یک‌به‌یک است؟ چرا؟ در دستگاه مختصات زیر، نمودار تابع $f(x)=x^{۳}$ و وارون آن را رسم کنید. ضابطه‌ی تابع وارون چیست؟



---

۲۶ . در مورد هر یک از قسمت‌های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x)=\frac{-۷}{۲}x-۳ \ , \ g(x)=-\frac{۲x+۶}{۷}$

ب) $f(x)=-\sqrt{x-۸} \ , g(x)=۸+x^{۲} ; x\leq ۰$

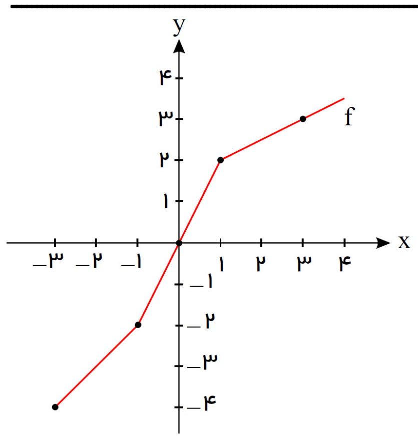
---

۲۷ . رابطه‌ی بین درجه‌ی سانتی‌گراد و فارنهایت که برای اندازه‌گیری دما استفاده می‌شوند و به صورت $f(x)=\frac{۹}{۵}x+۳۲$ است که در آن x میزان درجه‌ی سانتی‌گراد و $f(x)$ میزان درجه‌ی فارنهایت است. $f^{-۱}(x)$ را به دست آورده و توضیح دهد چه چیزی را نشان می‌دهد.

---

۲۸ . از نمودار تابع f برای تکمیل جدول استفاده کنید.

x	-۴	-۲	۲	۳
$f^{-۱}(x)$	....	....	....	....



۲۹ . با محدود کردن دامنه‌ی تابع $f(x)=x^{۲}-۴x+۵$، یک تابع یک‌به‌یک به دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

---

۳۰ . اگر $f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^{۳}$، مقادیر زیر را به دست آورید.

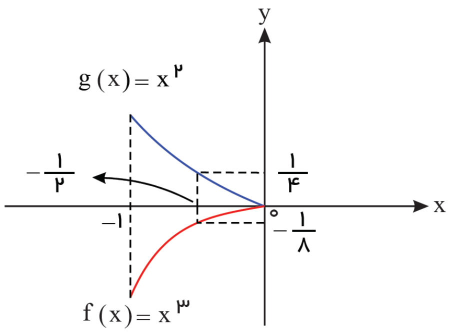
الف) $(fog)^{-۱}(۵)$ ب) $(f^{-۱}of^{-۱})(۶)$ پ) $(g^{-۱}of^{-۱})(۵)$

۱- الف) xهای نامنفی یعنی $x \geq ۰$، خیر. با توجه به نقاط تلاقی دو تابع f و g (که در از حل معادله‌ی $x^۳ = x^۲$ به صورت $x^۳ - x^۲ = ۰ \to x^۲(x-۱) = ۰ \to x = ۰,۱$ به دست می‌آیند) به وضوح می‌بینیم که برای $۰ < x < ۱$ نمودار $g(x) = x^۲$ بالاتر از نمودار $f(x) = x^۳$ قرار دارد و برای تمام xهایی که $x > ۱$ هستند نمودار f بالاتر از نمودار g قرار می‌گیرد.

این‌جوری هم ببین؛ اعداد بین ۰ و ۱ هرچه به توان‌های بزرگ‌تری می‌رسند کوچک‌تر می‌شوند (یعنی برای $۰ < x < ۱$ ، $x^۳ < x^۲$) به همین ترتیب اعداد بزرگ‌تر از یک هرچه به توان‌های بزرگ‌تری برسند بزرگ‌تر می‌شوند (یعنی برای $x > ۱$، $x^۳ > x^۲$ است)

ب) پر واضح است که برای $-۱ \leq x \leq ۰$ ، حاصل $x^۳$ نامثبت و حاصل $x^۲$ نامنفی است. با توجه به این موضوع و این که برای $-۱ \leq x \leq ۰$ ، $x^۲ \geq |x^۳|$ می‌باشد، به نمودار مقابل می‌رسیم.

حتماً دقت دارید که این دو نمودار نسبت به محور xها قرینه یکدیگر نیستند!



۲-

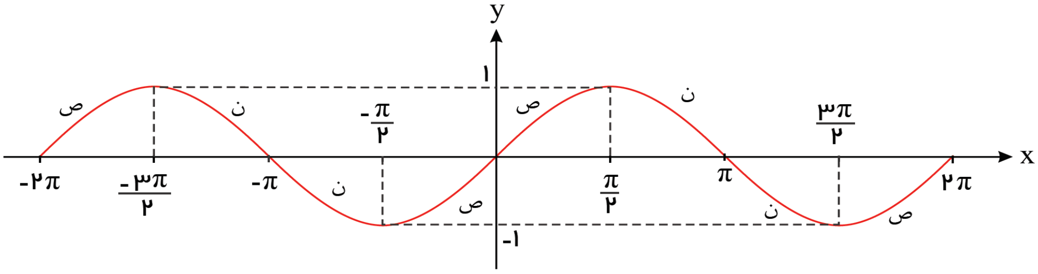
الف)ابتدا با توجه به اطلاعات داده شده مشخص می کنیم که نمودارها از بالا به پایین به ترتیب مربوط به شهرهای گرگان، ارومیه و زاهدان است. حال با توجه به نمودار شهر گرگان می بینیم که میزان بارندگی تنها از سال ۸۰ تا ۹۰ (یعنی در دهۀ ۸۰) روندی صعودی (افزایشی یا روبه رشد) را تجربه کرده است. پس جواب این مرحله فاصلۀ [۸۰,۹۰] می‌باشد.

ب)نمودار شهر ارومیه از سال ۹۱ تا ۹۴ برای فاصله‌های [۹۱,۹۲] و [۹۳,۹۴] روندی نزولی (کاهشی یا رو به زوال) را تجربه کرده است. در حقیقت طی سه سال از سال ۹۱ تا۹۴ میزان بارندگی شهر ارومیه در سال های اول و سوم روندی نزولی و در سال دوم، بازۀ [۹۲,۹۳] ، روندی صعودی دارد.

۳-

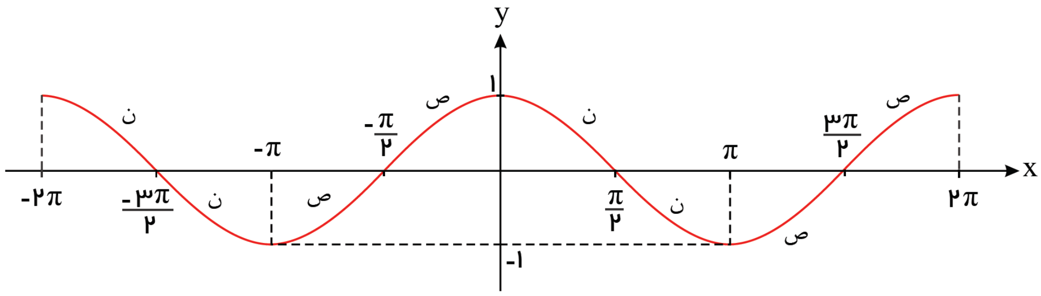
الف) برای تابع $y = \sin x$ در فاصله‌ی $[-۲\pi, ۲\pi]$ داریم:

(در شکل‌های رسم شده «ن» به معنای نزولی و «ص» به معنای صعودی است.)



x	$[-۲\pi, -\frac{۳\pi}{۲}]$	$[-\frac{۳\pi}{۲}, -\pi]$	$[-\pi, -\frac{\pi}{۲}]$	$[-\frac{\pi}{۲}, ۰]$	$[۰, \frac{\pi}{۲}]$	$[\frac{\pi}{۲}, \pi]$	$[\pi, \frac{۳\pi}{۲}]$	$[\frac{۳\pi}{۲}, ۲\pi]$
$y = \sin x$	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی

ب) برای تابع $y=\cos x$ در فاصله‌ی $[-۲\pi,۲\pi]$ داریم:



x	$[-۲\pi,-\frac{۳\pi}{۲}]$	$[-\frac{۳\pi}{۲},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{۲}]$	$[-\frac{\pi}{۲},۰]$	$[۰,\frac{\pi}{۲}]$	$[\frac{\pi}{۲},\pi]$	$[\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$	$[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$
$y=\sin x$	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی

۴-

الف) احتمالاً با درنگی کوتاه در می‌یابید که این نمودار متعلق به تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt[۳]{x}$ بوده و در دامنهٔ خود اکیداً صعودی است.

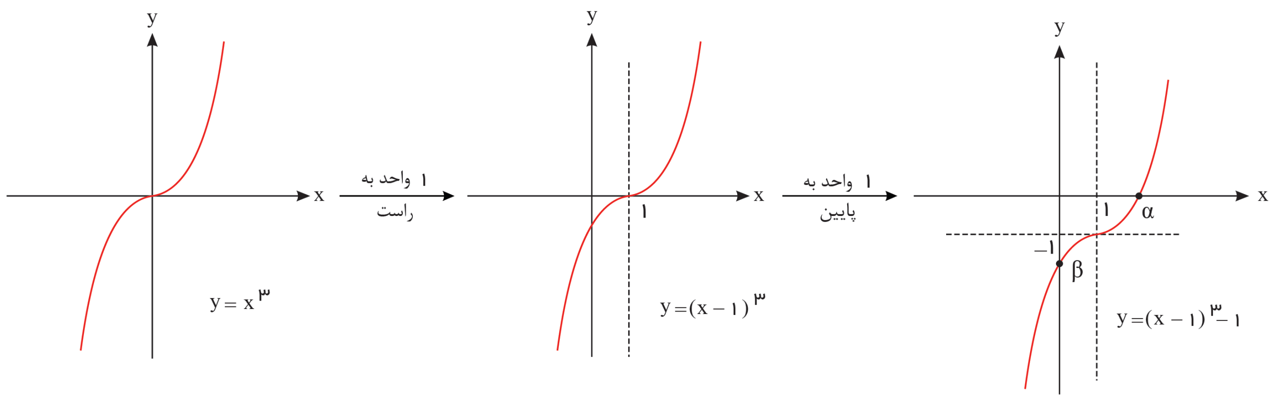
ب) یادتان باشد که توابع اکیداً یکنوا حتماً یک‌به‌یک هم هستند. در این نمودار برای هر متعلق به برد تنها و تنها یک x در دامنه وجود دارد و به عبارت دیگر هر خط موازی محور xها نمودار تابع را فقط در یک نقطه قطع کرده و این به معنای یک به یک (و البته معکوس‌پذیر) بودن آن است.

پ) می توان گفت که پاسخ این مورد از فعالیت منفی است. « هر تابع اکیداً یکنوا، حتماً یک به یک نیز است » با توجه به این نکتهٔ مهم که یعنی ما نمی‌توانیم تابعی پیدا کنیم که علیرغم یکنوای اکید بودن، یک به یک نباشد!

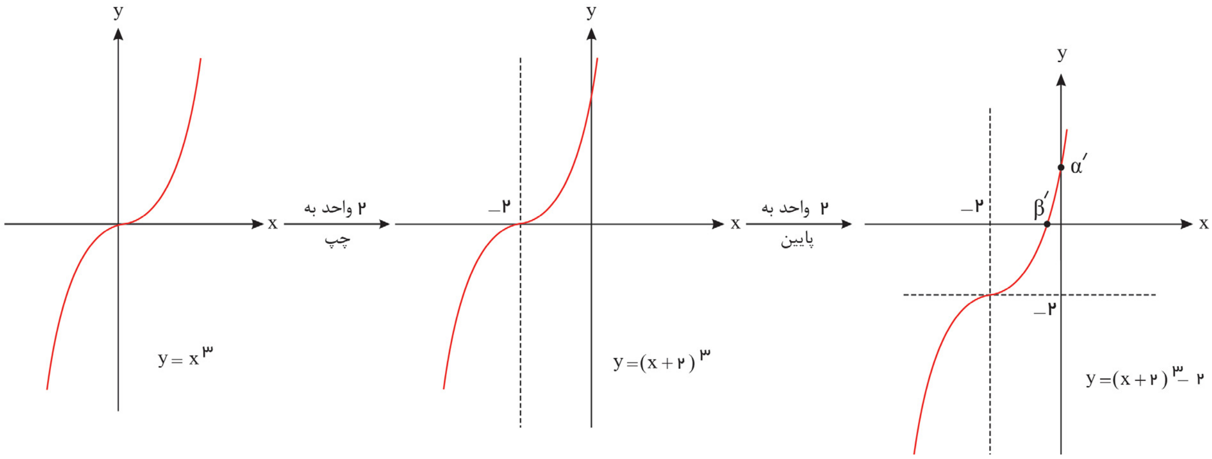
۵-

هر دو نمودار را با توجه به نمودار تابع $y=x^۳$ (به عنوان پایه) و به کمک انتقال نمودارها رسم کرده و دامنه و برد هرکدام را مشخص می کنیم:

الف)



ب)



این نمودارها به ما می‌گویند که دامنه و برد هر دو تابع مجموعه $\mathbb{R}$ است چرا که تصویر نمودار روی محور xها و yها تمام محورها را پوشش می‌دهد.

و اما برای یافتن محل تلاقی نمودارها با محورهای مختصات اینگونه عمل می‌کنیم:

الف) $\begin{cases} x=۰\rightarrow y=(۰-۱)^{۳}-۱=-۲=\beta \\ y=۰\rightarrow (x-۱)^{۳}-۱=۰\rightarrow (x-۱)^{۳}=۱\rightarrow x-۱=۱\rightarrow x=۲=\alpha \end{cases}$

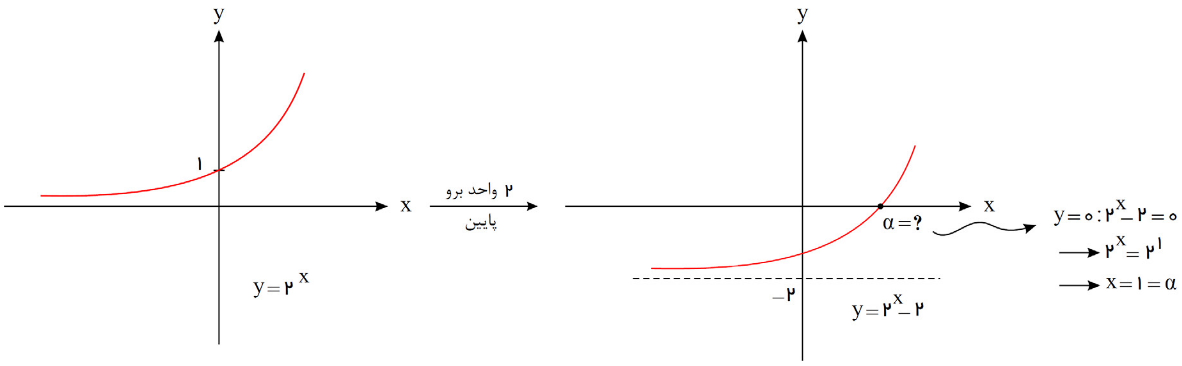
ب) $\begin{cases} x=۰\rightarrow y=(۰+۲)^{۳}-۲=۸-۲=۶=\alpha' \\ y=۰\rightarrow (x+۲)^{۳}-۲=۰\rightarrow (x+۲)^{۳}=۲ \\ \rightarrow x+۲=\sqrt[۳]{۲}\rightarrow x=\sqrt[۳]{۲}-۲=\beta' \end{cases}$

-۶

از نمودار پیداست که تابع در بازه‌ی $(-\infty,۰]$ اکیداً صعودی و در بازه‌ی $[۰,۲]$ ثابت و لذا در اجتماع این دو بازه، یعنی در $(-\infty,۲]$، صعودی است. به همین منوال، تابع در بازه‌های $[۲,۴]$ و $[۶,۸]$ اکیداً نزولی و در بازه $[۴,۶]$ اکیداً صعودی است. حالا به عقیده‌ی شما تابع در بازه‌ی $[۲,۸]$ چگونه رفتاری دارد؟! آری درست است، رفتاری غیر یکنوا دارد.

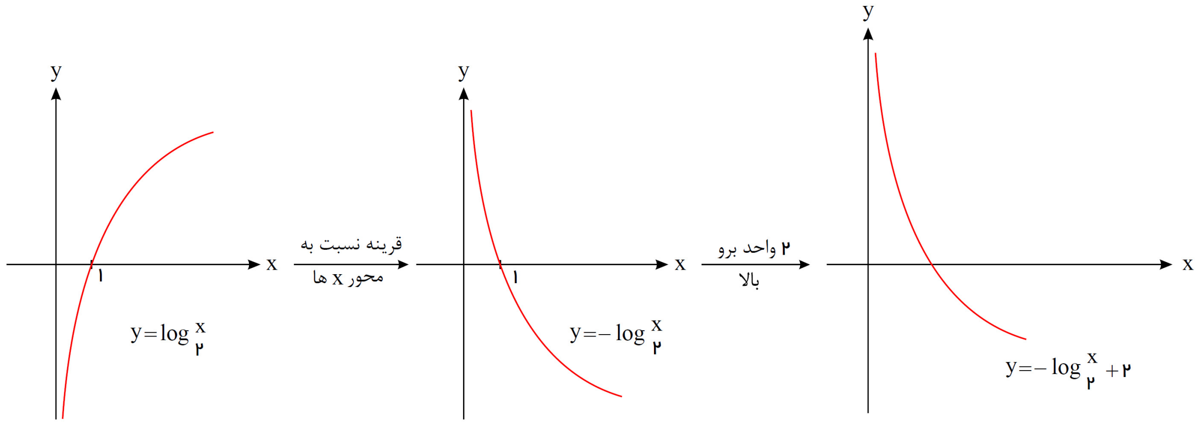
-۷

برای رسم تابع نمایی $y=۲^{x}-۲$، با توجه به نمودار پایه‌ی $y=۲^{x}$ (که حالت کلی آن $y=a^{x}$ برای $a>۱$ می‌باشد) داریم:



می‌بینیم که تابع $y=2^x-2$ در دامنه‌ی خود $(D=\mathbb{R})$ همواره صعودی (اکیداً صعودی) است.

و اما برای رسم تابع لگاریتمی $y=-\log_2^x+2$ داریم:



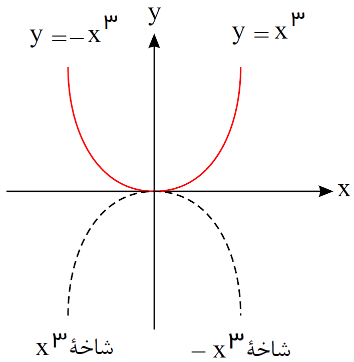
برای یافتن α معادله‌ی $y=0$ را حل می‌کنیم:

$$-\log_2^x+2=0\to\log_2^x=2\to x=2^2=4$$

۸-

برای اینکه بیابیم تابع در چه فاصله ای نزولی است، پیشنهاد می کنیم نمودار آن را رسم کنید. (اساساً این شعار من است که: همه چیز در نمودار نمود پیدا می کند!) با توجه به وجود قدر مطلق و مفهوم آن تابع را دو ضابطه ای می کنیم:

$$y=x^2|x|=\begin{cases}x^3 & x\ge 0\\ -x^3 & x<0\end{cases}\xrightarrow{\text{حالا رسم کن}}$$



حالا دیگر معلوم شد که تابع در فاصله‌ی $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی و در بازه‌ی $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است که با مقایسه‌ی نزولی بودن تابع در بازه‌ی $(-\infty,a]$ مشخص می‌شود که باید $a=0$ باشد.

دقت کنید که تابع $y=x^2|x|$ علی‌رغم شبیه بودن نمودار آن به $y=x^2$، با این تابع یکی نیست!

۹-

هر تابع به فرم کلی $y=x^{2n+1}+b$ روی دامنه‌ی خود (یعنی $D_f=\mathbb{R}$) اکیداً صعودی و هر تابع به فرم کلی $y=-x^{2n+1}+b$ روی دامنه‌ی خود اکیداً نزولی است. مثلاً تابع‌های $y=x^3$، $y=x^3-1$ و $y=2x^3+3$ همگی صعودی اکید و تابع‌های $y=-x^3$،

$y=-۲x^۳+۱$ و $y=۵-\frac{۱}{۲}x^۳$ همگی نزولی اکید هستند. حتی می‌توان موضوع را ساده‌تر هم بیان کرد. هر تابع خطی به صورت $f(x)=ax+b$ با شرط $a>۰$ صعودی اکید و با شرط $a<۰$ نزولی اکید می‌باشد.

۱۰-

وقتی که رابطه‌ی مربوط به دمای غذا پس از t ساعت بیرون ماندن از یخچال از دستور $d(t)=۴t+۲$ $(۰\le t\le ۳)$ و رابطه‌ی افزایش تعداد باکتری‌های غذای بیرون مانده از یخچال در دمای d از دستور $n(d)=۲۰d^۲-۸۰d+۵۰۰$ $(۲\le d\le ۱۴)$ به دست می‌آید، مقادیر $n(۲)$ و $n(۳)$ که به ترتیب برابر $n(۲)=۲۰(۲)^۲-۸۰(۲)+۵۰۰=۴۲۰$ و $n(۳)=۲۰(۳)^۲-۸۰(۳)+۵۰۰=۴۴۰$ تا باکتری می‌باشد به این معناست که در لحظه‌ی بیرون آوردن غذا از یخچال به اندازه‌ی ۴۲۰ تا باکتری روی غذا بوده و ۱۵ دقیقه پس از بیرون ماندن غذا از یخچال تعداد باکتری‌ها به ۴۴۰ می‌رسد. زیرا:

$n(۲)=۴۲۰: d=۲, d(t)=۴t+۲\to ۴t+۲=۲\to ۴t=۰\to t=۰$ (لحظه‌ی بیرون آوردن غذا از یخچال)

$n(۳)=۴۴۰: d=۳, d(t)=۴t+۲\to ۴t+۲=۳\to ۴t=۱\to t=\frac{۱}{۴}$ ساعت $=۱۵\min$

۱۱-

الف) $(fog)(۱)=f(\underbrace{g(۱)}_{\substack{g\\ ۱\to ۰}})=\underbrace{f(۰)}_{\substack{f\\ ۰\to -۱}}=-۱$

ب) $(fog)(-۱)=f(\underbrace{g(-۱)}_{\substack{g\\ -۱\to ۰}})=\underbrace{f(۰)}_{\substack{f\\ ۰\to -۱}}=-۱$

پ) $(gof)(۰)=g(\underbrace{f(۰)}_{\substack{f\\ ۰\to -۱}})=\underbrace{g(-۱)}_{\substack{g\\ -۱\to ۰}}=۰$

ت) $(gog)(-۲)=g(\underbrace{g(-۲)}_{\substack{g\\ -۲\to ۳}})=\underbrace{g(۳)}_{\substack{g\\ ۳\to ۸}}=۸$

ث) $(gof)(۲)=g(\underbrace{f(۲)}_{\substack{f\\ ۲\to ۵}})=\underbrace{g(۵)}_{\substack{f\\ ۵\to x}}=$ غیر قابل تعریف

مورد «ج» به دلیل اینکه $f(۲)\notin D_g$ قابل تعریف نمی‌باشد.

۱۲-

با توجه به ضابطه‌های $f(x)=\frac{۲}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۳}{x}$، برای تعیین ضابطه‌ی توابع مرکب fog و fof داریم:

$$fog(x)=f(g(x))=f(\frac{۳}{x})\xrightarrow{\text{به جای x های f قرار می‌دهیم } \frac{۳}{x}}\frac{۲}{\frac{۳}{x}-۱}=\frac{۲}{\frac{۳-x}{x}}=\frac{۲x}{۳-x}$$

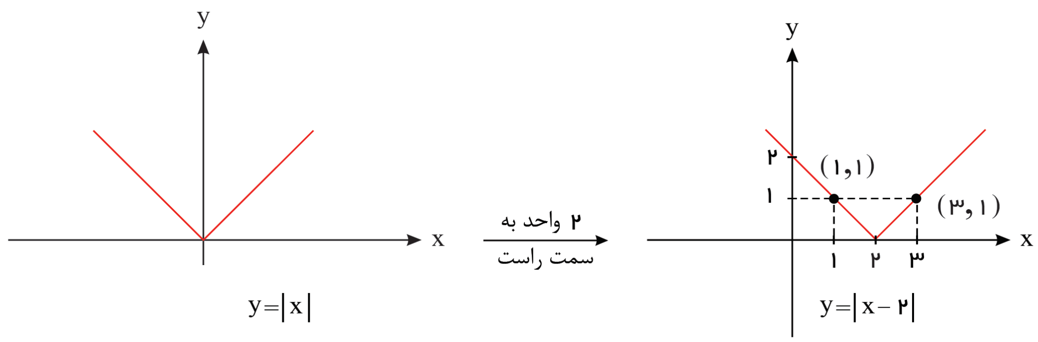
البته دقت کنید که برای تعیین دامنه‌ی این تابع در مرحله‌ی $\frac{2}{\frac{3-x}{x}}$ تأمل کرده و ریشه‌های مخرج‌ها (یعنی $x=0$ و $x=3$) را از $\mathbb{R}$ کم می‌کنیم. $D_{fog}=\mathbb{R}-\{0,3\}$

$$fof(x)=f(f(x))=f\left(\frac{2}{x-1}\right)\xrightarrow{\text{به جای x های f قرار بده } \frac{2}{x-1}}\frac{2}{\frac{2}{x-1}-1}=\frac{2}{\frac{3-x}{x-1}}=\frac{2x-2}{3-x}$$

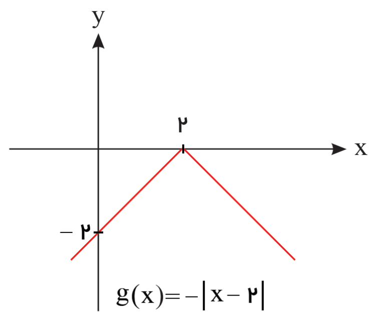
برای تعیین دامنه‌ی این تابع نیز با توجه به مرحله‌ی ساده نشده $\frac{2}{\frac{3-x}{x-1}}$ می‌بایستی ریشه‌های مخرج (یعنی $x=3$ و $x=1$) را از $\mathbb{R}$ برداریم. لذا: $D_{fof}=\mathbb{R}-\{1,3\}$.

-۱۳

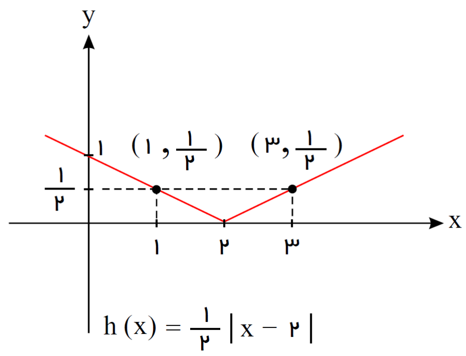
ابتدا نمودار تابع $y=|x-2|$ را به کمک انتقال نمودار نام آشنای $y=|x|$ رسم می‌کنیم:

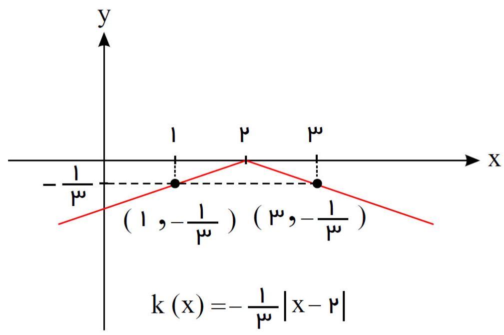


حالا برای رسم $y=-|x-2|$ نمودار $y=|x-2|$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:

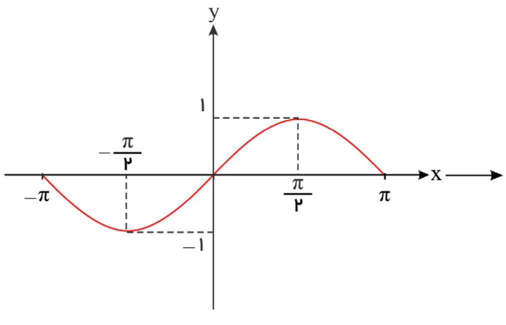


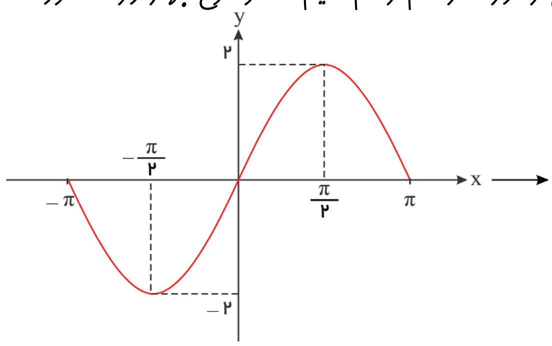
و برای رسم نمودار $y=\frac{1}{2}|x-2|$ می‌بایستی عرض هر نقطه از نمودار $y=|x-2|$ را (با ثابت ماندن طول) نصف کنیم. به همین منوال اگر عرض نقاط را با ثابت ماندن طول آن‌ها در $\frac{-1}{3}$ ضرب کنیم به نمودار $y=\frac{-1}{3}|x-2|$ می‌رسیم:

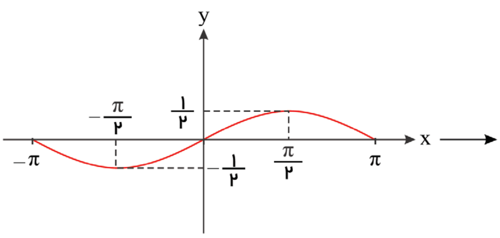


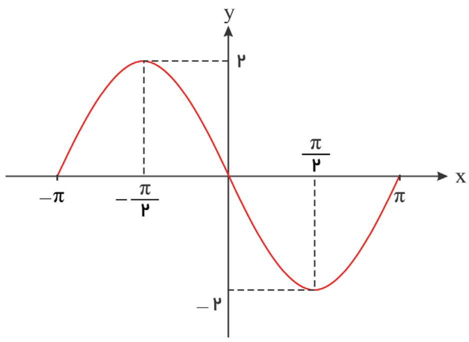


۱۴- هر چهار نمودار $y=\sin x$، $y=۲\sin x$، $y=-۲\sin x$ و $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ دامنه‌ای به صورت $[-\pi,\pi]$ داشته اما بردشان تفاوت دارد. در حقیقت با توجه به برد تابع پایه‌ی $y=\sin x$ که فاصله‌ی بسته‌ی $[-۱,۱]$ است، برد تابع $y=r\sin x$ برای $r>۰$ به صورت $[-r,r]$ و برای $r<۰$ به صورت $[r,-r]$ بوده و شکل نمودار برای $|r|>۱$ کشیده‌تر و برای $۰<|r|<۱$ بسته‌تر خواهد شد. حواستان باشد که برای rهای منفی نمودار دقیقاً قرینه نمودار $y=|r|\sin x$ نسبت به محور xها خواهد بود. حالا بهتر است که نمودار این چهار تابع را در کنار هم رسم کنیم تا موضوع بهتر درک شود:


$y=\sin x$

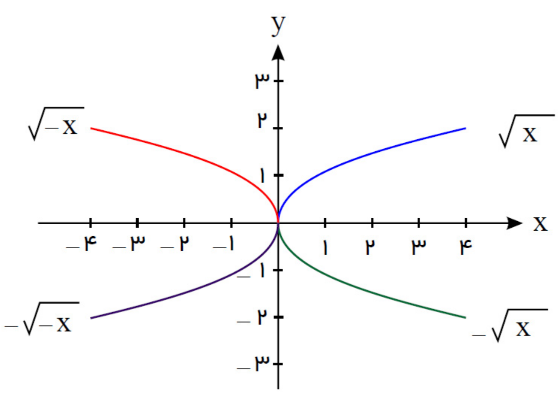

$y=۲\sin x$


$y=\frac{۱}{۲}\sin x$


$y=-۲\sin x$

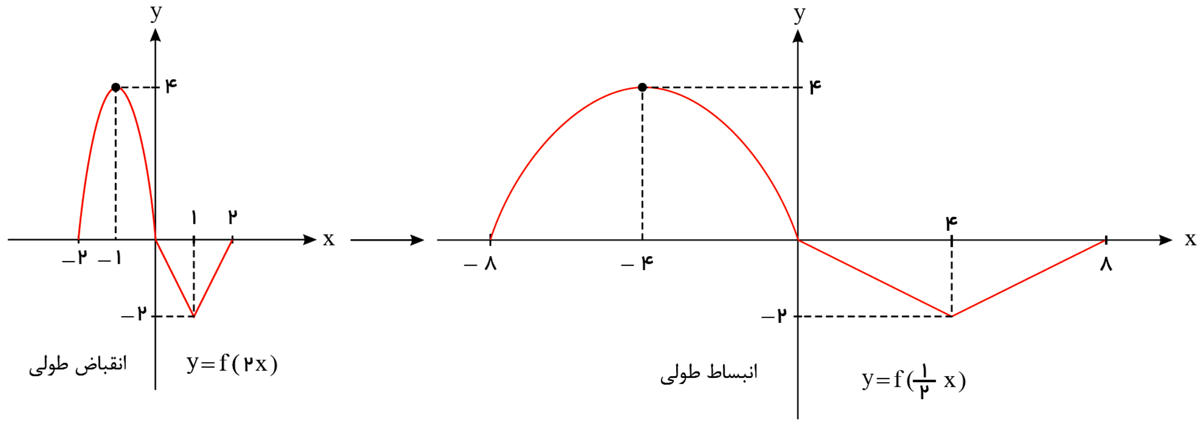
۱۵-

تابع $y=\sqrt{x}$ با برد $R=[۰,+\infty)$ بر روی فاصله‌ی (دامنه‌ی) $D=[۰,+\infty)$ قابل تعریف بوده و از نمودارها پیداست که هر یک از توابع $y=\sqrt{-x}$، $y=-\sqrt{x}$ و $y=-\sqrt{-x}$ به ترتیب در فاصله‌های (دامنه‌ی) $(-\infty,۰]$، $[۰,+\infty)$ و $(-\infty,۰]$ معین هستند. از همین نمودارها معلوم است که برد $y=\sqrt{-x}$ به صورت $[۰,+\infty)$ و برد $y=-\sqrt{x}$ و $y=-\sqrt{-x}$ به صورت $(-\infty,۰]$ می‌باشد.



-۱۶

باید بدانیم که برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ از روی نمودار $y=f(x)$ کافی است طول هر نقطه از $f(x)$ را $\frac{1}{k}$ برابر کرده و عرض آن‌ها را ثابت نگه داریم. به همین مناسبت می‌توانیم بگوییم که نمودار تابع $y=f(x)$، برای kهای بزرگتر از یک $(k>1)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض (بسته‌تر) و برای kهای بین ۰ و ۱ $(0<k<1)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط (یا بازتر) می‌شود.



$D=[-2,2], R=[-2,4]$ $\qquad$ $D=[-8,8], R=[-2,4]$

-۱۷

با توجه به این نکته که «در $fog(a)$ ابتدا a وارد ماشین g شده و $g(a)$ بیرون می‌آید و سپس $g(a)$ وارد ماشین f شده و $fog(a)$ بیرون می‌آید، داریم:

$$\begin{cases} f=\{(7,8),(5,3),(9,8),(11,4)\} \\ g=\{(5,7),(3,5),(7,9),(9,11)\} \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} fog=?\begin{cases} 5\xrightarrow{g}7\xrightarrow{f}8 : fog(5)=8 \\ 3\xrightarrow{g}5\xrightarrow{f}3 : fog(3)=3 \\ 7\xrightarrow{g}9\xrightarrow{f}8 : fog(7)=8 \\ 9\xrightarrow{g}11\xrightarrow{f}4 : fog(9)=4 \end{cases} =\{(5,8),(3,3),(7,8),(9,4)\} \\ gof=?\begin{cases} 7\xrightarrow{f}8\xrightarrow{g}\times \\ 5\xrightarrow{f}3\xrightarrow{g}5 : gof(5)=5 \\ 9\xrightarrow{f}8\xrightarrow{g}\times \\ 11\xrightarrow{f}4\xrightarrow{g}\times \end{cases} =\{(5,5)\} \end{cases}$$

۱۸-

خیلی ساده است؛ ببینید:

$$\begin{cases} f(x)=3x-4 \\ f(g(x))=3x^2-6x+14 \end{cases} \to 3g(x)-4=3x^2-6x+14$$

$$\xrightarrow{+4} 3g(x)=3x^2-6x+18 \xrightarrow{\div 3} g(x)=x^2-2x+6$$

۱۹- الف) این مورد نادرست است. زیرا حاصل $fog(5)$ برابر ۱۷ است نه ۲۵- .

$$\begin{cases} f(x)=x^2-4 \\ g(x)=\sqrt{x^2-4} \end{cases} \to fog(5)=f(\underbrace{g(5)}_{g(5)=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}})=f(\sqrt{21})=(\sqrt{21})^2-4=21-4=17$$

ب) این مورد هم نادرست است. چرا که با فرض $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=x$ شرط $f\neq g$ برای هر $x\neq \pm 1$ برقرار بوده و داریم:

$$fog(x)=f(g(x))=f(x)=\frac{1}{x}, gof(x)=g(f(x))=g(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}$$

می‌بینیم که علی‌رغم برابر نبودن f و g توابع fog و gof برابرند.

پ) این مورد درست است. زیرا $fog(4)=f(\underbrace{g(4)}_{7})=f(7)=5$

ت) این مورد نیز درست است. زیرا:

$$fog(5)=f(g(5))\xrightarrow[g(5)=2(5)-1=9]{g(x)=2x-1} f(9)\xrightarrow{f(x)=\sqrt{x}}\sqrt{9}=3$$

از طرف دیگر با توجه به $g(x)=2x-1$، $g(2)=2(2)-1=3$ می‌باشد، یعنی تساوی $fog(5)=g(2)$ برقرار است.

۲۰- بیایید در هر حالت حساب کنیم و بیاییم که الناز چقدر می‌تواند تخفیف بگیرد:

انتخاب اول: $\xrightarrow[\text{برای ۲ میلیون تومان}]{\text{ابتدا تخفیف ۲۰ درصدی}}$ مقدار تخفیف $=\frac{20}{100}\times 2000000=400000$

$\xrightarrow[\text{برای باقی مانده‌ی ۲ میلیون تومان}]{\text{سپس تخفیف ۲۰۰ هزار تومانی}} 1/600000-200000=1400000$ تومان

پس در انتخاب اول، الناز باید یک میلیون و چهارصد هزار تومان پرداخت کند.

انتخاب دوم: $\xrightarrow[\text{برای تعیین ۲ میلیون تومان}]{\text{ابتدا تخفیف ۲۰۰ هزار تومانی}} 2000000-200000=1800000$

$\xrightarrow[\text{برای باقی مانده}]{\text{سپس تخفیف ۲۰ درصدی}} \frac{20}{100}\times 1800000=\underbrace{360000}_{\text{مقدار تخفیف}} \to$ مقدار پرداختنی $=1800000-360000=1440000$

یعنی در انتخاب دوم، الناز باید یک میلیون و چهارصد و چهل هزار تومان پرداخت کند. پس معلوم شد که انتخاب اول معقول‌تر است.

۲۱-

در هر مورد، تابع مرکب را محاسبه می‌کنیم تا ببینیم حاصل کدام برابر $h(x)$ می‌شود.

الف) $\begin{cases} f(x)=\sqrt[5]{x} \\ g(x)=3x^2-4x+1 \end{cases} \to \begin{cases} fog(x)=f(g(x))=f(3x^2-4x+1)=\sqrt[5]{3x^2-4x+1}\neq h(x) \\ gof(x)=g(f(x))=g(\sqrt[5]{x})=3\sqrt[5]{x^2}-4\sqrt[5]{x}+1\neq h(x) \end{cases}$

ب) $\begin{cases} k(x)=x^5 \\ l(x)=3x^2-4x \end{cases} \to \begin{cases} kol(x)=k(l(x))=k(3x^2-4x+1)=(3x^2-4x+1)^5=h(x) \\ lok(x)=l(k(x))=l(x^5)=3x^{10}-4x^5+1\neq h(x) \end{cases}$

۲۲-

الف) تابع $h(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$ را می‌توانیم به صورت ترکیب توابع $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=\sqrt[3]{x}$ به صورت $gof(x)=g(f(x))=g(x^2+1)=\sqrt[3]{x^2+1}$ بنویسیم.

ب) تابع $l(x)=\sqrt{x^2+5}$ را می‌توانیم به صورت ترکیب توابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^2+5$ به صورت $fog(x)=f(g(x))=f(x^2+5)=\sqrt{x^2+5}$ به دست آوریم.

حتماً می‌دانید که این جواب، منحصر به فرد نبوده و مثلاً تابع $l(x)$ را می‌توانیم از ترکیب توابع $A(x)=\sqrt{\frac{x}{2}}$ و $B(x)=2x^2+10$ به صورت $AoB(x)=l(x)$ نیز بدست آوریم.

۲۳-

الف) $fog(-1)=f(\underbrace{g(-1)}_{(-1,-3)\in g})=\underbrace{f(-3)}_{(-3,1)\in f}=1$

ب) $gof(0)=g(f(0))\xrightarrow[f(0)=2]{(0,2)\in f}g(2)\xrightarrow[g(2)=-6]{(2,-6)\in g}-6$

پ) $fog(1)=f(g(1))\xrightarrow[g(1)=-5]{(1,-5)\in g}f(-5)\xrightarrow[f(-5)=3]{(-5,3)\in f}3$

ت) $gof(-1)=g(f(-1))\xrightarrow[f(-1)=1]{(-1,1)\in f}g(1)\xrightarrow[g(1)=-5]{(1,-5)\in g}-5$

بنابراین اگر نمودارهای fog و gof را داشته باشیم می‌توانیم ببینیم که نقاط $(-1,1)$ و $(1,3)$ روی نمودار fog و نقاط $(0,-6)$ و $(-1,-5)$ روی نمودار gof قرار دارند.

۲۴-

الف)

$\begin{cases} f(x)=2x-5 \\ g(x)=x^2-3x+8 \end{cases} \to fog(x)=f(g(x))=f(x^2-3x+8)=2(x^2-3x+8)-5=7$

$\Rightarrow 2x^2-6x+11=7\xrightarrow{\text{مرتب کن}}2x^2-6x+4=0\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب، صفر است}}x=1$ یا $x=\frac{c}{a}=\frac{4}{2}=2$

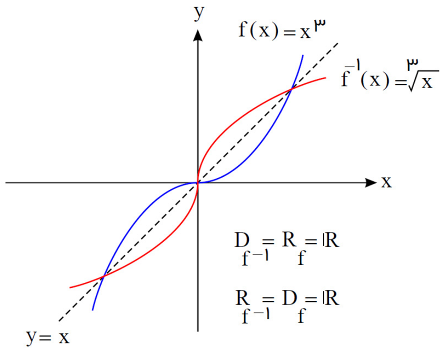
ب)

$$\begin{cases} f(x)=3x^2+x-1 \\ g(x)=1-2x \end{cases} \to gof(x)=g(f(x))=g(f(x))=g(3x^2+x-1)=1-2(3x^2+x-1)=-5$$

$$\Rightarrow -6x^2-2x+3=-5 \xrightarrow{\text{مرتب کن}} -6x^2-2x-8=0 \xrightarrow{\times(-1)} 6x^2+2x+8=0 \xrightarrow{\text{حل از }\Delta} \Delta=(2)^2$$

-۲۵

تابع $y=x^3$ به دلیل اکیداً صعودی بودن، تابعی یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است که برای دست‌یابی به نمودار تابع وارون آن کافی است نمودار $y=x^3$ را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم:



احتمالاً می‌دانید که برای رسیدن به ضابطه‌ی تابع معکوس تابع $y=x^3$ کافی است x را برحسب y یافته و در نهایت به جای x از $f^{-1}(x)$ و به جای y از x استفاده کنیم. داریم:

$$y=x^3 \longrightarrow \sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{x^3} \to x=\sqrt[3]{y} \to f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$$

-۲۶

در هر مورد وارون یکی از توابع را یافته (معمولاً آن تابعی که محاسبهٔ برحسب در آن ساده‌تر است) و نشان می دهیم که تابع وارون به دست آمده همان تابع دوم است.

الف)

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{-7}{2}x-3 \\ g(x)=-\dfrac{2x+6}{7} \to y=-\dfrac{2x+6}{7} \xrightarrow{\times(-7)} -7y=2x+6 \xrightarrow{-6} 2x=-7y-6 \\ \xrightarrow{\div 2} x=\dfrac{-7y-6}{2}=\dfrac{-7}{2}y-3 \xrightarrow{\text{حالا}} g^{-1}(x)=\dfrac{-7}{2}x-3 \to g^{-1}(x)=f(x)\ \checkmark \end{cases}$$

ب)

$$\begin{cases} f(x)=-\sqrt{x-8} \\ g(x)=8+x^2;x\le 0 \to y=8+x^2 \xrightarrow{-8} x^2=y-8 \xrightarrow{\text{جذر}} |x|=\sqrt{y-8} \\ \xrightarrow[|x|=-x]{\text{با توجه به } x\le 0} -x=\sqrt{y-8} \to x=-\sqrt{y-8} \longrightarrow g^{-1}(x)=-\sqrt{x-8}=f(x)\ \checkmark \end{cases}$$

-۲۷

$$f(x)=\frac{۹}{۵}x+۳۲\rightarrow y=\frac{۹}{۵}x+۳۲\xrightarrow{-۳۲}\frac{۹}{۵}x=y-۳۲\xrightarrow{\times\frac{۵}{۹}}x=\frac{۵}{۹}(y-۳۲)\xrightarrow{\text{حالا}}f^{-۱}(x)=\frac{۵}{۹}(x-۳۲)$$

رابطه‌ی $f(x)=\frac{۹}{۵}x+۳۲$ نشان می‌دهد که x درجه‌ی سلسیوس معادل $f(x)$ درجه‌ی فارنهایت است مثلاً $x=۵°c$ معادل $f(۵)=\frac{۹}{۵}(۵)+۳۲=۴۱$ درجه‌ی فارنهایت است. در حالی که رابطه‌ی $f^{-۱}(x)=\frac{۵}{۹}(x-۳۲)$ به ما می‌گوید هر x درجه‌ی فارنهایت معادل $f^{-۱}(x)$ درجه‌ی سلسیوس می‌باشد. مثلاً $x=۳۲$ درجه‌ی فارنهایت معادل $f^{-۱}(۳۲)=\frac{۵}{۹}(۳۲-۳۲)$ یا ۰ درجه‌ی سلسیوس است.

-۲۸

با توجه به جدول زیر و این نکته که «اگر $(a,b)\in f$ آن‌گاه $(b,a)\in f^{-۱}$ و بالعکس، می‌توان نوشت:

x	-۴	-۲	۲	۳
$f^{-۱}(x)$	α	β	γ	λ

$$(-۴,\alpha)\in f^{-۱}\rightarrow(\alpha,-۴)\in f$$

از نمودار f پیداست که نقطه با عرض -۴ دارای طول -۳ است و لذا $\alpha=-۳$

$$(-۲,\beta)\in f^{-۱}\rightarrow(\beta,-۲)\in f$$

از نمودار f پیداست که نقطه با عرض -۲ طولی برابر -۱ داشته و لذا $\beta=-۱$

$$(۲,\gamma)\in f^{-۱}\rightarrow(\gamma,۲)\in f$$

از نمودار f پیداست که نقطه با عرض ۲ طولی برابر ۱ دارد و لذا $\gamma=۱$

$$(۳,\gamma)\in f^{-۱}\rightarrow(\gamma,۳)\in f\xrightarrow[(۳,۳)\in f]{\text{از نمودار f می‌بینیم}}\gamma=۳$$

-۲۹

تابع $f(x)=x^۲-۴x+۵$ معرف سهمی $f(x)=(x-۲)^۲+۱$ با محور تقارن $x_S=۲$ می‌باشد که غیر یک‌به‌یک و وارون‌ناپذیر است.

حال اگر دامنه‌ی تابع را به یکی از فاصله‌های $[x_S,+\infty)=[۲,+\infty)$ یا $(-\infty,x_S]=(-\infty,۲]$ محدود کنیم تابع f یک‌به‌یک و وارون‌پذیر خواهد شد:

حالت اول:

$$\begin{cases}f(x)=(x-۲)^۲+۱\\ D_f=[۲,+\infty)\end{cases}\rightarrow y=(x-۲)^۲+۱\rightarrow(x-۲)^۲=y-۱$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}}|x-۲|=\sqrt{y-۱}\xrightarrow[x-۲\geq ۰]{\text{با توجه به } D_f}x-۲=\sqrt{y-۱}\rightarrow x=\sqrt{y-۱}+۲\rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۱}+۲$$

حالت دوم:

$$\begin{cases} f(x)=(x-۲)^۲+۱ \\ D_f=(-\infty,۲] \end{cases} \to y=(x-۲)^۲+۱ \to (x-۲)^۲=y-۱ \xrightarrow{\text{جذر}} |x-۲|=\sqrt{y-۱}$$

$$\xrightarrow[x-۲\le ۰]{\text{با توجه به } D_f} -(x-۲)=\sqrt{y-۱} \to x-۲=-\sqrt{y-۱} \to x=\sqrt{y-۱}+۲ \to f^{-۱}(x)=-\sqrt{x-۱}+۲$$

-۳۰

الف)

برای محاسبه‌ی $(fog)^{-۱}(۵)$ دو راه پیش‌رو داریم. یکی اینکه تابع مرکب fog را محاسبه کرده و وارون آن را بیابیم و در نهایت به جای xهای آن ۵ قرار دهیم. دیگر اینکه از رابطه‌ی $(fog)^{-۱}(x)=(g^{-۱}of^{-۱})(x)$ استفاده کرده و با توجه به تابع وارون‌های $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ تابع مرکب $g^{-۱}of^{-۱}$ را محاسبه کرده و به جای xهایش ۵ قرار دهیم ما هر دو راهکار را انجام می‌دهیم:

روش اول:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳ \\ g(x)=x^۳ \end{cases} \to fog(x)=f(g(x))=f(x^۳)=\frac{۱}{۸}x^۳-۳ \to fog(x)=\frac{۱}{۸}x^۳-۳$$

$$\xrightarrow{\text{حالا محاسبه } (fog)^{-۱}} y=\frac{۱}{۸}x^۳-۳ \xrightarrow{+۳} \frac{۱}{۸}x^۳=y+۳ \xrightarrow{\times ۸} x^۳=۸y+۲۴$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه سوم بگیر}} x=\sqrt[۳]{۸y+۲۴} \to (fog)^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{۸x+۲۴} \xrightarrow[x=۵]{\text{قرار بده}} (fog)^{-۱}(۵)=\sqrt[۳]{۴۰+۲۴}=\sqrt[۳]{۶۴}=\sqrt[۳]{۴^۳}=۴$$

حال، روش دوم را نیز امتحان می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳ \to y=\frac{۱}{۸}x-۳ \to \frac{۱}{۸}x=y+۳ \to x=۸y+۲۴ \to f^{-۱}(x)=۸x+۲۴ \\ g(x)=x^۳ \to y=x^۳ \to x=\sqrt[۳]{y} \to g^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حالا می‌نویسیم}} (fog)^{-۱}(x)=(g^{-۱}of^{-۱})(x)=g^{-۱}(f^{-۱}(x))=g^{-۱}(۸x+۲۴)=\sqrt[۳]{۸x+۲۴}$$

$$\xrightarrow[x=۵]{\text{قرار بده}} (fog)^{-۱}(۵)=\sqrt[۳]{۴۰+۲۴}=\sqrt[۳]{۶۴}=\sqrt[۳]{۴^۳}=۴$$

حال با توجه به ضابطه‌های $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ موارد (ب) و (پ) را به راحتی می‌توانیم محاسبه کنیم:

ب) $$(f^{-۱}of^{-۱})(۶)=f^{-۱}(f^{-۱}(۶)) \xrightarrow[f^{-۱}(۶)=۴۸+۲۴=۷۲]{f^{-۱}(x)=۸x+۲۴} f^{-۱}(۷۲)=۸(۷۲)+۲۴=۶۰۰$$

پ) $$(g^{-۱}of^{-۱})(۵)=g^{-۱}(f^{-۱}(۵)) \xrightarrow[f^{-۱}(۵)=۴۰+۲۴=۶۴]{f^{-۱}(x)=۸x+۲۴} g^{-۱}(۶۴)=\sqrt[۳]{۶۴}=۴$$

همانطور که می‌بینید جواب‌های موارد (الف) و (پ) یکی هستند!

جزوه محاسبات

۱. به توان رساندن اعداد دو رقمی که یکان آن‌ها ۵ است.

سه مرحله دارد

مرحله ۱ـ دهگان را با عدد یک جمع می‌کنیم.

مرحله ۲ـ عدد بدست آمده مرحله را در دهگان ضرب می‌کنیم.

مرحله ۳ـ جلوی عدد بدست آمده از مرحله ۲، عدد ۲۵ را می‌نویسیم.

مثال:

$(15)^2 = 15\times15 \Rightarrow 1+1=2 \Rightarrow 2\times1=2 \Rightarrow 225$

$(25)^2 = 25\times25 \Rightarrow 2+1=3 \Rightarrow 3\times2=6 \Rightarrow 625$

$(35)^2 = 35\times35 \Rightarrow 3+1=4 \Rightarrow 4\times3=12 \Rightarrow 1225$

$(45)^2 = 45\times45 \Rightarrow 4+1=5 \Rightarrow 5\times4=20 \Rightarrow 2025$

$(55)^2 = 55\times55 \Rightarrow 5+1=6 \Rightarrow 6\times5=30 \Rightarrow 3025$

$(65)^2 = 65\times65 \Rightarrow 6+1=7 \Rightarrow 7\times6=42 \Rightarrow 4225$

$(75)^2 = 75\times75 \Rightarrow 7+1=8 \Rightarrow 8\times7=52 \Rightarrow 5625$

$(85)^2 = 85\times85 \Rightarrow 8+1=9 \Rightarrow 9\times8=72 \Rightarrow 7225$

$(95)^2 = 95\times95 \Rightarrow 9+1=10 \Rightarrow 10\times9=90 \Rightarrow 9025$

۲. به توان رساندن اعداد دو رقمی که دهگان آن‌ها ۵ است.

سه مرحله دارد

مرحله ۱ـ یکان را به توان دو می‌رسانیم.

مرحله ۲ـ یکان را با عدد ۲۵ جمع می‌کنیم.

مرحله ۳ـ اعداد بدست آمده مرحله ۲ را می‌نویسیم و جلوی آن اعداد، اعداد بدست آمده مرحله یک را می‌نویسیم.

نکته : اگر یکان را به توان دو رساندیم و یک رقمی شد پشت آن عدد صفر را قرار می‌دهیم.

مثال:

$(51)^2 = 51\times51 \Rightarrow 1^2=1 \Rightarrow 1+25=26 \Rightarrow 2601$

$(52)^2 = 52\times52 \Rightarrow 2^2=4 \Rightarrow 2+25=27 \Rightarrow 2704$

$(53)^2 = 53\times53 \Rightarrow 3^2=9 \Rightarrow 3+25=28 \Rightarrow 2809$

$(54)^2 = 54\times54 \Rightarrow 4^2=16 \Rightarrow 4+25=29 \Rightarrow 2916$

$\vdots \qquad \vdots$

$(57)^2 = 57\times57 \Rightarrow 7^2=49 \Rightarrow 7+25=32 \Rightarrow 3249$

$(59)^2 = 59\times59 \Rightarrow 9^2=81 \Rightarrow 9+25=34 \Rightarrow 3481$

۳. ضرب در اعشاری با مضرب ۲۵

* در ضرب‌ها باید سعی شود که از شر اعشار خلاص شویم، در اینجا اعشار را در عدد زوج ضرب می‌کنیم.

$$\boxed{\begin{array}{l} ۰/۷۵ \xrightarrow{\times ۲} ۱/۵ \\ ۰/۷۵ \xrightarrow{\times ۴} ۳ \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} ۰/۵ \xrightarrow{\times ۲} ۱ \\ ۰/۵ \xrightarrow{\times ۴} ۲ \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} ۰/۲۵ \xrightarrow{\times ۲} ۰/۵ \\ ۰/۲۵ \xrightarrow{\times ۴} ۱ \end{array}}$$

نکته:

$$۰/۲۵ = \frac{۱}{۴} \;,\; ۰/۵ = \frac{۱}{۲} \;,\; ۰/۷۵ = \frac{۳}{۴} \;,\; ۰/۱۲۵ = \frac{۱}{۸} \;,\; ۰/۰۶۲۵ = \frac{۱}{۱۶}$$

۴. ضرب اعداد زیر عدد ۲۰ در یکدیگر:

٤ مرحله

مرحله ۱- یکی از اعداد با یکان عدد دیگری جمع می‌کنیم.

مرحله ۲- جلوی عدد بدست آمده از مرحله اول صفر می‌گذاریم.

مرحله ۳- یکان‌های دو عدد را در هم ضرب می‌کنیم.

مرحله ٤- اعداد مراحل ۲ و ۳ را با هم جمع می‌کنیم.

مثال:

$$۱۲\times۱۳ = ۱۳+۲ = ۱۵ = ۱۵۰ \Rightarrow ۲\times۳ = ۶ \Rightarrow ۱۵۰+۶ = ۱۵۶$$
$$۱۳\times۱۵ = ۱۳+۵ = ۱۸ = ۱۸۰ \Rightarrow ۳\times۵ = ۱۵ \Rightarrow ۱۸۰+۱۵ = ۱۹۵$$
$$۱۶\times۱۳ = ۱۶+۳ = ۱۹ = ۱۹۰ \Rightarrow ۶\times۳ = ۱۸ \Rightarrow ۱۹۰+۱۸ = ۲۰۸$$
$$۱۵\times۱۷ = ۱۵+۷ = ۲۲ = ۲۲۰ \Rightarrow ۷\times۵ = ۳۵ \Rightarrow ۲۲۰+۳۵ = ۲۵۵$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

۵. محاسبه‌ی اعدادی که در آنها اعشار وجود دارد.

۳ مرحله

مرحله ۱- عدد اعشاری را به صورت $a\times۱۰^{-b}$ می‌نویسیم.

مرحله ۲- اگر اعداد، صفر داشت به صورت $a\times۱۰^{-b}$ می‌نویسیم.

مرحله ۳- عبارت را تفکیک و سپس ساده می‌کنیم.

مثال:

۱) $\frac{۴/۲}{۰/۱۵\times۰/۱}=\frac{۴۲\times\cancel{۱۰^{-۱}}}{۱۵\times۱۰^{-۲}\times۱\times\cancel{۱۰^{-۱}}}=\frac{۴۲}{۱۵}\times\frac{۱}{۱۰^{-۲}}=\frac{۴۲\times۱۰^{۲}}{۱۵}=\frac{۴۲۰۰}{۱۵}=۲۸۰$

۲) $\frac{۲/۱\times۸۰}{۸۴\times۱۰۰}=\frac{۲۱\times\cancel{۱۰^{-۱}}\times۸\times\cancel{۱۰^{۱}}}{۸۴\times۱۰^{۲}}=\frac{\cancel{۲۱}\times\overset{۲}{\cancel{۸}}}{\underset{\cancel{۲۱}}{\cancel{۸۴}}\times۱۰^{۲}}=\frac{۲}{۱۰۰}=۰/۰۲$

۳) $\frac{۲۸/۸\times۱۰۰}{۲۴\times۳\times۰/۵}$

۴) $\frac{۵/۲\times۲\times۹۰}{۲۶}$

۶- به توان رساندن اعداد دو رقمی که یکان آن‌ها به یك ختم می‌شود.

۳ مرحله

مرحله ۱- یک واحد از عدد مورد نظر کم می‌کنیم و به توان ۲ می‌رسانیم.

مرحله ۲- یک واحد از عدد مورد نظر کم می‌کنیم و با خود عدد جمع می‌کنیم.

مرحله ۳- دو عدد بدست آمده از مرحله ۱ و۲ را با هم جمع می‌کنیم.

مثال:

$(۲۱)^{۲}\Rightarrow(۲۰)^{۲}=۴۰۰\Rightarrow۲۰+۲۱=۴۱\Rightarrow۴۰۰+۴۱=۴۴۱$

$(۳۱)^{۲}\Rightarrow(۳۰)^{۲}=۹۰۰\Rightarrow۳۰+۳۱=۶۱\Rightarrow۹۰۰+۶۱=۹۶۱$

$(۴۱)^{۲}\Rightarrow(۴۰)^{۲}=۱۶۰۰\Rightarrow۴۰+۴۱=۸۱\Rightarrow۱۶۰۰+۸۱=۱۶۸۱$

$\vdots \qquad \vdots$

$(۷۱)^{۲}\Rightarrow(۷۰)^{۲}=۴۹۰۰\Rightarrow(۷۰+۷۱)=۱۴۱\Rightarrow۴۹۰۰+۱۴۱=۵۰۴۱$

$(۸۱)^{۲}\Rightarrow(۸۰)^{۲}=۶۴۰۰\Rightarrow(۸۰+۸۱)=۱۶۱\Rightarrow۶۴۰۰+۱۶۱=۶۵۶۱$

۷- تقسیم اعداد بر عددهایی به صورت ۱/۵، ۲/۵، ۳/۵، ۴/۵ و ...

۳ مرحله

مرحله ۱- هر دو عدد را در ۲ ضرب می‌کنیم.

مرحله ۲- اعداد بدست آمده را بر هم تقسیم می‌کنیم.

مرحله ۳- جواب را بدست، آوریم.

مثال:

۱) $۳۰ \div ۱/۵ \Rightarrow (۳۰ \times ۲) \div (۱/۵ \times ۲) \Rightarrow ۶۰ \div ۳ \Rightarrow ۲۰$

$$\frac{۳۰}{۱/۵} = \frac{۳۰ \times ۲}{۱/۵ \times ۲} = \frac{۶۰}{۳} = ۲۰$$

۲) $۹۰ \div ۴/۵ \rightarrow \frac{۹۰ \times ۲}{۴/۵ \times ۲} = \frac{۱۸۰}{۹} = ۲۰$

۳) $۲۶ \div ۶/۵ \rightarrow \frac{۲۶ \times ۲}{۶/۵ \times ۲} = \frac{۵۲}{۱۳} = ۴$

۸. ضرب اعداد بر عددهایی به‌صورت ۱/۵، ۲/۵، ۳/۵، ۴/۵ و ...

۳ مرحله

مرحله ۱- اعداد که به‌صورت ۱/۵ یا ۲/۵ ... در عدد ۲ ضرب می‌کنیم.

مرحله ۲- مابقی اعداد را بر ۲ تقسیم می‌کنیم.

مرحله ۳- حاصل مراحل ۱ و ۲ را در هم ضرب می‌کنیم.

۱) $۱/۵ \times ۲۸ \Rightarrow (۱/۵ \times ۲ = ۳) \rightarrow (۲۸ \div ۲ = ۱۴) \rightarrow (۳ \times ۱۴) = ۴۲$

۲) $۳/۵ \times ۱۲ \Rightarrow (۳/۵ \times ۲ = ۷) \rightarrow (۱۲ \div ۲ = ۶) \rightarrow (۷ \times ۶) = ۴۲$

۹. تقسیم اعداد بر۲:

۲ مرحله

مرحله ۱- هر عدد فرد را می‌تون به‌صورت مجموع یک عدد زوج با عدد یک نوشت مثلاً

$۵ = ۴ + ۱$

$۹ = ۸ + ۱$

مرحله ۲- از سمت چپ اعداد شروع به تقسیم می‌کنیم اگر عدد فرد بود عدد ۱ را در کنار عدد بعدی نوشته و تقسیم می‌کنیم.

$۵\ ۶\ ۳\ ۲ \Rightarrow (۴\ ۱۶\ ۲\ ۱۲) \xrightarrow{\div ۲} ۲۸۱۶$

$۹\ ۷\ ۴\ ۶\ ۳\ ۲ \Rightarrow (۸\ \underset{۱۶}{\cancel{۱۷}}\ ۱۴\ ۶\ ۲\ ۱۲) \xrightarrow{\div ۲} ۴۸۷۳۱۶$

$۸\ ۹\ ۴\ ۹\ ۹\ ۴\ ۲ \Rightarrow (۸\ ۸\ ۱۴\ ۸\ \underset{۱۸}{\cancel{۱۹}}\ ۱۴\ ۲) \xrightarrow{\div ۲} ۴۴۷۴۹۷۱$

$۳\ ۵\ ۴\ ۸\ ۱ \Rightarrow (۲\ \underset{۱۴}{\cancel{۱۵}}\ ۱۴\ ۸\ ۱) \xrightarrow{\div ۲} ۱۷۷۴۰/۵$

۱۰. ضرب سریع اعداد در ۱۰۱ و ۱۰۰۱ و ۱۰۰۰۱ و ...

مرحله ۱ ⟵ یک رقمی

$۷ \times ۱۰۱ = ۷۰۷$

$۸ \times ۱۰۱ = ۸۰۸$

$۹ \times ۱۰۱ = ۹۰۹$

مرحله ۲ ⟵ دو رقمی

$\overline{ab} \times ۱۰۱ = \overline{abab}$

$۲۲ \times ۱۰۱ = ۲۲۲۲$

$۳۲ \times ۱۰۱ = ۳۲۳۲$ عدد مورد نظر تکرار می‌شود

$۶۱ \times ۱۰۱ = ۶۱۶۱$

$\overline{abc}\times 1001 = abcabc$ ⟵ مرحله ۳

$161\times 1001 = 161161$

$159\times 1001 = 159159$

$\vdots$

$789\times 1001 = 789789$

۱۱. ضرب سریع اعداد دو رقمی در عدد یازده ۱۱

$$\begin{array}{r} 79 \\ \times\ 11 \\ \hline 7\ \boxed{16}\ 9 \\ \downarrow \\ 869 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 68 \\ \times\ 11 \\ \hline 6\ \boxed{14}\ 8 \\ \downarrow \\ 748 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 63 \\ \times\ 11 \\ \hline 6\ \boxed{9}\ 3 \\ \downarrow \\ 693 \end{array}$$

۳ مرحله

مرحله ۱- اعداد را با فاصله می‌نویسیم.

مرحله ۲- اعداد را با هم جمع می‌کنیم و بین اعداد می‌نویسیم.

مرحله ۳- اگر جمع عدد وسطی ۲ رقمی شود، دهگان را به عدد کناری اضافه می‌کنیم.

۱) $1/5\times 28 \Rightarrow (1/5\times 2 = 3) \to (28\div 2 = 14) \to (3\times 14) = 42$

۱۲. تقسیم سریع بر عدد ۵

$$\frac{106}{5} = \frac{106\times 2}{5\times 2} = \frac{212}{10} = 21/2$$

$$\frac{512}{5} = \frac{512\times 2}{5\times 2} = \frac{1024}{10} = 102/4$$

$$\frac{77}{5} = \frac{77\times 2}{5\times 2} = \frac{154}{10} = 15/4$$

۱۳. نکات در مورد لگاریتم: (در مبنای ۱۰)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Log1	Log2	Log3	Log4	Log5	Log6	Log7	Log8	Log9	Log10
	0	0/3010	0/4771	0/6020	0/6989	0/7781	0/8450	0/9030	0/9542	1
تقریباً ⟵	$\boxed{0}$	$\boxed{0/3}$	$\boxed{0/5}$	$\boxed{0/6}$	$\boxed{0/7}$	$\boxed{0/8}$	$\boxed{0/85}$	$\boxed{0/9}$	$\boxed{0/05}$	$\boxed{1}$

مثال:

$$-\text{Log}\,۰/۰۰۲ = -\text{Log}_{۱۰}^{۲\times ۱۰^{-۳}} = -(\text{Log}_{۱۰}^{۲} + \text{Log}_{۱۰}^{۱۰^{-۳}}) = -(\overbrace{\cancel{۰/۳ - ۳}}^{-۲/۷}) = +۲/۷$$

مثال:

$$-\text{Log}\,۰/۰۴ = -(\text{Log}^{۴\times ۱۰^{-۲}} = -(\text{Log}_{۱۰}^{۴} + \text{Log}_{۱۰}^{۱۰^{-۲}}) = -(\overbrace{\cancel{۰/۶ - ۲}}^{-۱/۴}) = +۱/۴$$

مثال:

$$-\text{Log}(۷\times ۱۰^{-۵}) = -(\text{Log}_{۱۰}^{۷} + \text{Log}_{۱۰}^{۱۰^{-۵}}) = -(\overbrace{۰/۸۵ - ۵}^{-۴/۱۵}) = +۴/۱۵$$

نکته ۱۴:

$\text{Log}_b^a = c \rightarrow a = b^c$

$\text{Log}_{۱۰}^{۲} = ۰/۳ \rightarrow ۱۰^{۰/۳} = ۲$ $\quad$ $\text{Log}_{۱۰}^{۶} = ۰/۸ \rightarrow ۱۰^{۰/۸} = ۶$

$\text{Log}_{۱۰}^{۳} = ۰/۵ \rightarrow ۱۰^{۰/۵} = ۳$ $\quad$ $\text{Log}_{۱۰}^{۷} = ۰/۸۵ \rightarrow ۱۰^{۰/۸۵} = ۷$

$\text{Log}_{۱۰}^{۴} = ۰/۶ \rightarrow ۱۰^{۰/۶} = ۴$ $\quad$ $\text{Log}_{۱۰}^{۸} = ۰/۹ \rightarrow ۱۰^{۰/۹} = ۸$

$\text{Log}_{۱۰}^{۵} = ۰/۷ \rightarrow ۱۰^{۰/۷} = ۵$ $\quad$ $\text{Log}_{۱۰}^{۹} = ۰/۹۵ \rightarrow ۱۰^{۰/۹۵} = ۹$

مثال: $۱۰^{-۲/۵} = ۱۰^{-۳}\times ۱۰^{۰/۵} = ۱۰^{-۳}\times ۳ = ۰/۰۰۳$

مثال: $۱۰^{-۰/۷} = ۱۰^{-۱}\times ۱۰^{۰/۳} = ۱۰^{-۱}\times ۲ = ۰/۰۲$

مثال: $۱۰^{-۲/۲} = ۱۰^{-۳}\times ۱۰^{۰/۸} = ۱۰^{-۳}\times ۶ = ۰/۰۰۶$

پیوست

فرمول‌های انتگرال

$$\int u^n u' dx = \int n^n du = \frac{u^{n+۱}}{n+۱} + C$$

$$\int ۱dx = \int dx = x + C$$

$$\int u' \sin u dx = \int \sin u du = -\cos u + C$$

$$\int \frac{۱}{x^۲} dx = -\frac{۱}{x} + C$$

$$\int u' \cos u dx = \int \cos u du = \sin u + C$$

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{۲}{x} x\sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = Ln\,|u| + C$$

$$\int \frac{۱}{x} dx = Ln\,|x| + C$$

$$\int u' e^u dx = -\cos x + C$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+۱}}{r+۱} + C (r \neq -۱)$$

$$\int \sin dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{۱}{\sqrt{x}} dx = ۲\sqrt{x} + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int (۱ + \cot^۲ x) dx = \int \frac{۱}{\sin^۲ x} dx = -\cot x + C$$

$$\int (۱ + \tan^۲ x) dx = \int \frac{۱}{\cos^۲ x} dx = \tan x + C$$

این هم روابط مثلثاتی

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad , \quad \cot x = \frac{۱}{\tan x}$$

$$\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱ \quad , \quad ۱ + \tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x} \quad , \quad ۱ + \cot^۲ x = \frac{۱}{\sin^۲ x}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad , \quad \sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \quad , \quad \cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha$$

$$\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱ = ۱ - ۲\sin^۲\alpha \quad , \quad ۱ - \cos ۲\alpha = ۲\sin^۲\alpha \quad , \quad ۱ + \cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha$$

$$(\sin\alpha \pm \cos\alpha)^۲ = ۱ \pm \sin ۲\alpha \quad , \quad \tan\alpha + \cot\alpha = \frac{۲}{\sin ۲\alpha} \quad , \quad \cot\alpha - \tan\alpha = ۲\cot ۲\alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^۲\alpha - \sin^۲\beta \quad , \quad \sin ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱ + \tan^۲\alpha}$$

$$\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \cos^۲\alpha - \sin^۲\beta \quad , \quad \cos ۲\alpha = \frac{۱ - \tan^۲\alpha}{۱ + \tan^۲\alpha}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{۱ \mp \tan\alpha\tan\beta} \quad , \quad \tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱ - \tan^۲\alpha}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp ۱}{\cot\beta \pm \cot\alpha} \quad , \quad \cot ۲\alpha = \frac{\cot^۲\alpha - ۱}{۲\cot\alpha}$$

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=۲\sin\alpha\cos\beta \quad , \quad \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=۲\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sqrt{۲}\sin(\alpha\pm\frac{\pi}{۴})=\sin\alpha\pm\cos\alpha \quad , \quad \sqrt{۲}\cos(\alpha\pm\frac{\pi}{۴})=\cos\alpha\mp\sin\alpha \quad , \quad \tan(\frac{\pi}{۴}+\alpha)=\frac{۱+\tan\alpha}{۱-\tan\alpha}$$

$$\sin^{۴}\alpha+\cos^{۴}\alpha=۱-۲\sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\alpha=۱-\frac{۱}{۲}\sin^{۲}۲\alpha$$

$$\sin^{۶}\alpha+\cos^{۶}\alpha=۱-۳\sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\alpha=۱-\frac{۳}{۴}\sin^{۲}۲\alpha$$

$$\sin۳\alpha=۳\sin\alpha-۴\sin^{۳}\alpha \quad , \quad \cos۳\alpha=۴\cos^{۳}\alpha-۳\cos\alpha$$

$$\tan۳\alpha=\frac{۳\tan\alpha-\tan^{۳}\alpha}{۱-۳\tan^{۲}\alpha} \quad , \quad \cot۳\alpha=\frac{۳\cot\alpha-\cot^{۳}\alpha}{۱-۳\cot^{۲}\alpha}$$

$$\sin\alpha=۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲} \quad , \quad \cos\alpha=۱-۲\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}=۲\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}-۱$$

$$\cot\frac{\alpha}{۲}-\tan\frac{\alpha}{۲}=۲\cot\alpha \quad , \quad \cot\frac{\alpha}{۲}+\tan\frac{\alpha}{۲}=\frac{۲}{\sin\alpha}$$

$$\tan\alpha=\frac{۲\tan\frac{\alpha}{۲}}{۱-\tan^{۲}\frac{\alpha}{۲}} \quad , \quad \frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}=\tan\frac{\alpha}{۲} \quad , \quad \frac{۱-\cos\alpha}{۱+\cos\alpha}=\tan^{۲}\frac{a}{۲}$$

$$\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin۲\alpha}{\cos^{۲}\alpha-\sin^{۲}\beta}$$

$$\alpha+\beta+\gamma=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow \tan\alpha\tan\beta+\tan\alpha\tan\gamma+\tan\beta\tan\gamma=۱$$

$$\alpha+\beta+\gamma=k\pi\Rightarrow \tan(\alpha+\beta+\gamma)=۰\Rightarrow \tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

این هم لیست هم‌ارزی‌ها

$$u \to ۰ : \sin u \sim u \quad , \quad \tan \sim u \quad , \quad (۱+u)^n \sim ۱+nu$$

$$u \to ۰ : \mathrm{Ln}(۱+u) \sim u \quad , \quad e^n - ۱ \sim u \quad , \quad \sqrt[n]{۱+u} \sim ۱+\frac{u}{n}$$

$$u \to ۰ : \mathrm{Ln}(۱+u) \sim u \quad , \quad e^n - ۱ \sim u \quad , \quad \sqrt[n]{۱+u} \sim ۱+\frac{u}{n}$$

$$u \to ۰ : ۱-\cos^m u \sim m\frac{u^۲}{۲} \quad , \quad u-\sin u \sim \frac{u^۳}{۶} \quad , \quad u-\tan u \sim \frac{-u^۳}{۳}$$

$x \to ۰ :$ جمله‌ی کم توان $\sim$ عبارت جبری

$x \to \pm\infty$ جمله‌ی پر توان $\sim$ عبارت جبری

$$x \to \pm\infty : \sqrt{ax^n + bx^{n-۱} + \dots} \sim \sqrt[n]{a}\,\left| x + \frac{b}{na} \right|$$

اگر n فرد باشد نیازی به قدر مطلق نیست.

$$n \to \infty : ۱ < |a| < b \Rightarrow a^n \pm b^n \sim \pm b^n$$

$$n \to \infty : \sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$$

$$n \to \infty : ۱^k + ۲^k + ۳^k + \dots + n^k \sim \frac{n^{k+۱}}{k+۱}$$

$$n \to \pm\infty : [u] \sim u$$

این هم لیست اتحادها

$$(a+b^{۲})=a^{۲}+۲ab+b^{۲} \quad , \quad (a-b^{۲})=a^{۲}-۲ab+b^{۲}$$

$$(a+b)^{۲}+(a+b)^{۲}=۲a^{۲}+۲b^{۲} \quad , \quad (a+b)^{۲}-(a-b)^{۲}=۴ab$$

$$(a+b)(a-b)=a^{۲}-b^{۲}$$

$$(a-b)^{۳}=a^{۳}-۳a^{۲}+۳ab^{۲}-b^{۳} \quad , \quad (a+b)^{۳}=a^{۳}+۳a^{۲}b+۳ab^{۲}+b^{۳}$$

$$(x+a)(x+b)=x^{۲}+(a+b)x+ab$$

$$a^{۳}-b^{۳}=(a-b)(a^{۲}+ab+b^{۲}) \quad , \quad a^{۳}+b^{۳}=(a+b)(a^{۲}-ab+b^{۲})$$

$$(a+b+c)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+۲ab+۲ac+۲bc$$

$$a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}-۳abc=(a+b+c)(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}-ab-ac-bc)=\frac{۱}{۲}(a+b+c)[(a-b)^{۲}+(a-c)^{۲}+(a-c)^{۲}+(b-c)^{۲}]$$

قرار بود همه‌ی فرمول‌های مشتق را یک جا بنویسیم.

بفرمایید .... (متغیر است و مشتق‌ها نسبت به آن هستند.)

تابع	مشتق	تابع	مشتق	تابع	مشتق
C	0	u^n	$nu'u^{n-1}$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
x^n	nx^{n-1}	e^u	$u'e^u$	$\sqrt[m]{u}$	$\frac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$
$\mathrm{Ln}\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$\mathrm{Ln}\lvert u\rvert$	$\frac{u'}{u}$	$\frac{au+b}{cu+d}$	$\frac{ad-bc}{(cu+d)^2}u'$
e^x	e^x	$\sin u$	$u'\cos u$	$\sin^m u$	$mu'\cos u\sin^{m-1}u$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos u$	$-u'\sin u$	$\cos^m u$	$-mu'\sin u\cos^{m-1}u$
$\cos x$	$-\sin x$	$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u)$	$\tan^m u$	$mu'(1+\tan^2 u)\tan^{m-1}u$
$\tan x$	$1+\tan^2 x$	$\cot u$	$-u'(1+\cot^2 u)$	$\cot^m u$	$-mu'(1+\cot^2 u)\cot^{m-1}u$
$\cot x$	$-(1+\cot^2 x)$	a^u	$u'a^u\mathrm{Lna}$	$\sqrt[m]{x}$	$\frac{1}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\log_a^u$	$\frac{u'}{u\mathrm{Lna}}$	$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$