

۱- گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید. (۱/۷۵ نمره)
الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

ب) اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است.

شبه سوال ۱-۱ گزاره درست را اثبات و برای نادرست، مثال نقض بیاورید

الف) حاصل ضرب دو عدد گنگ و گویا، عددی گنگ است.

ب) تفاضل مربعات دو عدد فرد، مضرب ۸ است.

پ) مربع یک عدد طبیعی در تقسیم بر ۳ باقی مانده‌ی صفر یا یک دارد.

۲- اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $2a + 3$ بر ۸ را به دست آورید.
(۱/۲۵ نمره)

شبه سوال ۲-۱ باقی مانده تقسیم a و b بر عدد ۷ برابر ۱ و ۴ است. باقی مانده‌ی تقسیم $3a^2 + b^2 + 4ab + 5$ بر عدد ۷ را بیابید.

شبه سوال ۲-۲ رقم یکان عدد A برابر ۸ است رقم یکان عدد $A^{100} + A^{99}$ را بیابید.

۳- اگر $n \in \mathbb{N}$ ، $n|7k+6$ و $n|9k+7$ ثابت کنید $n=1$ یا $n=5$. (۱ نمره)

شبهه از سوال ۳-۱- اگر عدد طبیعی n مفروض باشد و $a|13n+5$ و $a|5n+13$ ، مقادیر ممکن برای عدد صحیح a را بیابید.

شبهه ساز سوال ۳-۲- اگر $4|3n+5$ ثابت کنید که: $16|9n^2+42n+45$

۴- باقی مانده تقسیم 7^{30} بر ۱۵ را به دست آورید. (۱/۵ نمره)

شبهه ساز سوال ۴-۱- باقی مانده تقسیم عدد $(1399)^{25}$ را بر عدد یازده بیابید.

شبهه ساز سوال ۴-۲- باقی مانده تقسیم عدد $47!+(153)^2$ بر عدد ۹ را بیابید.

۵- معادله همنهشتی $5x \equiv 2$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید. (۱/۲۵ نمره)

شبهه ساز سوال ۵-۱- معادله همنهشتی زیر را حل کنید.

$$32x \equiv 120$$

شبهه ساز سوال ۵-۲- تمام اعداد دو رقمی که در تقسیم بر عدد ۱۳ باقی مانده‌ی ۳ دارند را به کمک حل معادله همنهشتی بیابید.

شبهه ساز سوال ۵-۳- اگر معادله $63x \equiv 2m+5$ دارای جواب باشد m را بیابید.

۶- جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (۱ نمره)

(الف) مجموع درجه‌های رأس‌های هر گراف تعداد یال‌ها است.

(ب) در یک گراف k -منتظم، ماکزیمم درجه رأس برابر با است.

(پ) در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G ، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه‌گر گراف G می‌نامیم.

(ت) یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش، دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر می‌نامیم.

شبه سوال ۶-۱ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

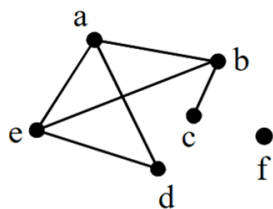
(الف) تعداد رئوس فرد در هر گراف ساده، عددی است.

(ب) در گراف کامل، تعداد یال‌ها برابر است.

(پ) در بین مجموعه‌های احاطه‌گر، مجموعه‌ای که با حذف هر عضو، احاطه‌گری از بین برود، احاطه‌گر نام دارد.

(ت) اگر در گرافی $\gamma(G) = 1$ باشد، در این صورت رأسی در گراف وجود دارد که باشد.

(ث) در هر گراف ساده، رأسی که درجه آن باشد، ایزوله می‌نامیم.

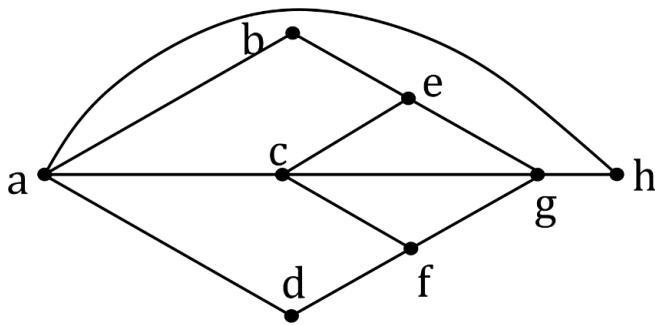


۷- گراف G را در نظر گرفته و به سوالات زیر پاسخ دهید. (۱/۲۵ نمره)

(الف) $N_G[a]$ را با اعضا مشخص کنید.

(ب) یک دور به طول ۴ در این گراف مشخص کنید.

(پ) یک مسیر به طول ۳ و یک مسیر به طول ۴ از a به c بنویسید.



شبهه ساز سوال ۷-۱ در گراف روبه‌رو به سوالات زیر پاسخ دهید.

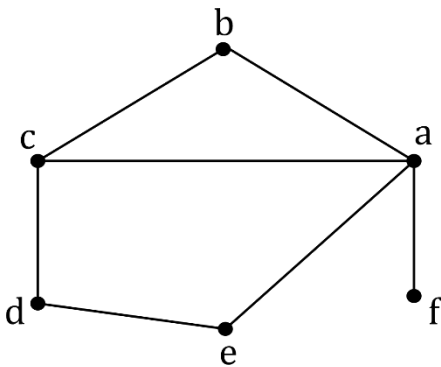
الف) $N_G(a)$ و $N_G[f]$ را مشخص کنید.

ب) دو مسیر به طول ۲ و ۶ از c به g را نام ببرید.

ت) مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ را مشخص کنید.

۸- در گراف G ، درجه رأس V برابر با ۹ است و درجه رأس \bar{G} برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف G را مشخص

کنید. (۷۵/۰ نمره)



شبهه ساز سوال ۸-۱ در گراف روبه‌رو: $G(V, E)$

الف) گراف مکمل را رسم و درجات هر رأس آن را مشخص کنید.

ب) یک زیر گراف از G مشخص کنید که حداقل ۲ رأس و ۲ یال داشته باشد؟

پ) تحقیق کنید آیا رابطه $q(G) + q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2}$ درست است؟

۹- گرافی ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید، به طوری که: (۱ نمره)

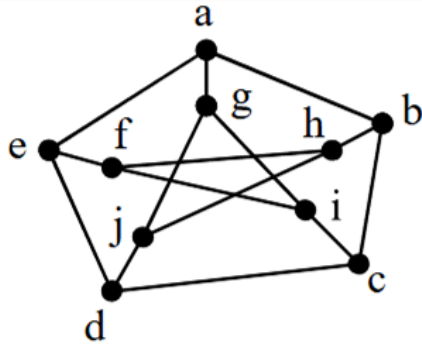
الف) مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

ب) بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

شبهه ساز سوال ۹-۱ در گراف p_n با رأس‌های $V(G) = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$

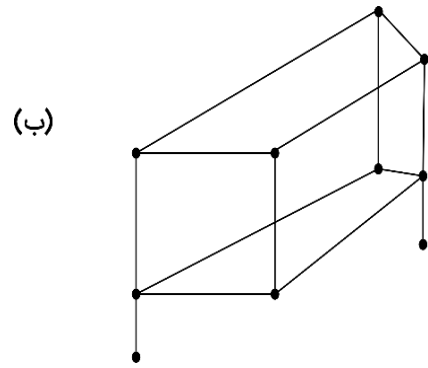
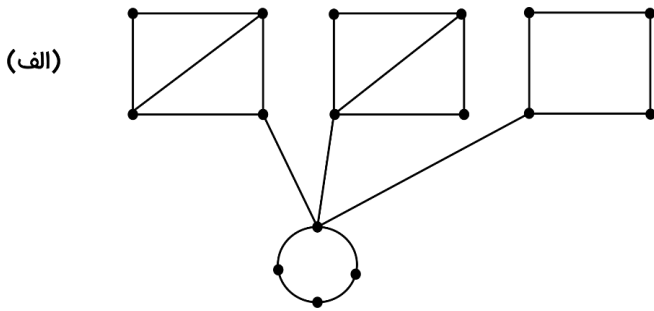
الف) یک مجموعه احاطه‌گر می‌نیمم ارائه دهید که شامل رأس V_1 نباشد. $|N_G(V_1)| = 1$

ب) یک مجموعه احاطه‌گر می‌نیمال ارائه دهید که شامل V_1 باشد و حداکثر اعضا را شامل شود.



۱۰- عدد احاطه‌گری گراف زیر را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید. (۱/۲۵ نمره)

شبیه سازی سوال ۱۰-۱- عدد احاطه‌گری در گراف‌های زیر را با تشخیص کران پایین عدد احاطه‌گری، بیابید و ادعای خود را ثابت کنید:



۱۱- با ارقام عدد 1,1,2,2,2,3,4 چند عدد ۷ رقمی می‌توان نوشت. (۰/۷۵ نمره)

شبیه سازی سوال ۱۱-۱- تعداد اعداد سه رقمی که می‌توان با ارقام ۵,۵,۵,۲,۲,۰ نوشت را بیابید.

شبیه سازی سوال ۱۱-۲- تعداد اعداد هشت رقمی که با ارقام ۵,۵,۵,۵,۵,۳,۳,۱ می‌توان نوشت را بیابید.

شبیه ساز سوال ۱۱-۳- تعداد افزایش‌های سه بخشی (سه کلاسه) در یک مجموعه شش عضوی $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ را بیابید.

۱۲- به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد، اگر بخواهیم، از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم. (۱/۲۵ نمره)

شبهه ساز سوال ۱۲-۱- معادله $x_1^2 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 12$ در مجموعه اعداد صحیح مثبت چند جواب دارد؟

شبهه ساز سوال ۱۲-۲- در بسط عبارت $(x+y+z)^n$ چند جمله وجود دارد که توان x حداقل ۳ باشد؟

۱۳- مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و با اعمال یک جایگشت بر روی 1,2,3,4 یک مربع لاتین جدید به دست آورید.

(۱ نمره)

۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

شبهه ساز سوال ۱۳-۱- در مربع لاتین روبرو به اعمال یک چرخش روی ستون‌ها مربع لاتین جدیدی بیابید.

۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱

شبهه ساز سوال ۱۳-۲- در مربع لاتین روبرو با تعویض سطر اول و دوم مربع A_1 و سپس در A_1 با تعویض سطر سوم

و دوم A_2 بسازید. آیا A_2 و A_1 متعامد هستند؟

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

۱۴- در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید. (۱ نمره)

(الف)

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

(ب)

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

شبهه ساز سوال ۱۴-۱- دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۴ بنویسید.

۱۵- اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ (۱ نمره)

شبیه ساز سوال ۱۵-۱ به روش استدلال بازگشتی ثابت کنید $x^2 + xy + y^2 \geq 0$.

شبیه ساز سوال ۱۵-۲ به روش استدلال بازگشتی ثابت کنید: $x^2y^2 + 2x^2 + y^2 + 2 > 0$

۱۶- گراف G ، ۶ رأسی ۳- منتظم است. (۱ نمره)

الف) اندازه گراف G را بیابید.

ب) نمودار گراف G را رسم کنید.

شبیه ساز سوال ۱۶-۱ گراف G ، ۲- منتظم از مرتبه ۱۲ است.

الف) طوری گراف را رسم کنید که دارای ۳ دور باشد؟

ب) طوری گراف را رسم کنید که همبند باشد.

پ) طوری گراف را رسم کنید که عدد احاطه‌گری آن حداکثر شود.

۱۷- ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است. (۱ نمره)

شبیه ساز سوال ۱۷-۱ اگر گراف G از مرتبه‌ی ۱۱ و اندازه‌ی آن ۲۱ باشد، تعداد رئوس زوج و تعداد رئوس فرد چه

اعدادی می‌توانند باشند؟ (زوج یا فرد)

۱۸-۴ دانش آموز پایه دهم و ۳ دانش آموز پایه یازدهم، به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند، به طوری که: (۱ نمره)

- الف) هیچ دو دانش آموز هم پایه کنار هم نباشند.
ب) همواره دانش آموزان پایه دهم کنار هم باشند.

شبیه ساز سوال ۱۸-۱- پنج کتاب متمایز فیزیک و پنج کتاب متمایز ریاضی داریم و در قفسه‌ای می‌چینیم . تعداد حالات زیر را بیابید.

- الف) کتاب‌های هم نام کنار هم باشند.
ب) فقط کتاب‌های ریاضی کنار هم باشند.
پ) چهار کتاب ریاضی از پنج کتاب کنار هم باشند.

۱۹- به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که هیچ‌کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم.) (۱ نمره)

شبیه ساز سوال ۱۹-۱- چند تابع پوша از $A = \{a, b, c, d\}$ به $B = \{x, y\}$ می‌توان نوشت؟

شبیه ساز سوال ۱۹-۲- تعداد توابع یک به یک از $A = \{1, 2, 3\}$ به $B = \{a, b, c, d\}$ را بیابید.

۲۰- در بین اعداد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \leq n \leq 100$ ، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش پذیر است؟ (۱ نمره)

شبهه سازی سوال ۲۰-۱- در میان اعداد طبیعی $200 \leq n \leq 400$ چند عدد وجود دارد که نه مضرب ۸ هستند و نه مضرب ۶، هستند.

شبهه سازس سوال ۲۰-۲- در میان اعداد طبیعی $1 \leq n \leq 300$ چند عدد وجود دارد که مضرب ۴ و ۵ باشد اما مضرب ۶ نباشد.

۲۱- در یک اردوی دانش آموزی حداقل چند دانش آموز حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟ (۱ نمره)

شبهه سازی سوال ۲۱-۱- در یک مستطیل 10×8 تعداد ۲۱ نقطه وجود دارد. ثابت کنید فاصله حداقل دو نقطه از آنها از $2\sqrt{2}$ کمتر است.

شبهه ساز سوال ۲۱-۲- از میان اعداد مجموعه $\{3, 7, 11, 15, \dots, 79, 83, 87\}$ ، ۱۳ عضو انتخاب می کنیم. ثابت کنید حداقل ۲ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر ۹۴ باشد.

شبهه ساز سوال ۲۱-۳- حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۴ نفر دو حرف اول و دوم فامیلیشان غیر تکراری و مثل هم است. (مثل، اشتری، اشرفی)

۲۲- قرار است سه کارگر W_1, W_2, W_3 در سه روز متوالی با سه ماشین نخریسی و با ۳ نوع الیاف کار کنند، به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته باشد. برای این منظور برنامه‌ریزی کنید. (۱ نمره)

شبهه ساز سوال ۲۲-۱ دو مربع لاتین متعامد 5×5 ارائه دهید و به کمک آن برنامه‌ریزی برای ۵ راننده، ۵ ماشین، ۵ مسیر و ۵ روز متفاوت مسابقه اتومبیل رانی ارائه دهید که راننده‌ها مورد تکراری در استفاده از اتومبیل‌ها و مسیرها و روزهای مسابقه نداشته باشند؟