۱۰ حرکت بر خط راست

حرکت شناسی یا سینماتیک، یکی از مهم‌ترین شاخه‌های مکانیک کلاسیک است که در آن، حرکت اجسام و سیستم‌های متشکل از اجسام، بدون در نظر گرفتن نیروهای عامل حرکت، بررسی می‌شود.

موقعیّت یک ذرّه در فضا، اساسی‌ترین مفهوم در حرکت شناسی است. برای تعیین موقعیّت یک ذرّه، سه مورد باید تعیین شود: نقطهٔ مرجع، فاصله از نقطهٔ مرجع و جهت خط مستقیمی که در فضا، نقطهٔ مرجع و ذرّه را به هم متّصل می‌کند.

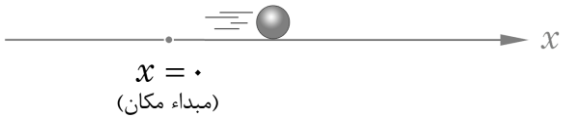
زمان، مدّت زمان: در مکانیک، کمیّت مستقلی که تمامی رخدادها در آن اتّفاق می‌افتد، زمان است. بنابراین می‌توان زمان را متغیّر اصلی در مکانیک محسوب کرد. هر اتفاق، در یک لحظه شروع می‌شود و در یک لحظه نیز پایان می‌پذیرد و فاصلهٔ زمانی میان این دو لحظه را مدّت زمان رویداد می‌نامند. گاهی اوقات نیز، می‌خواهیم کمیّتی را در یک لحظهٔ خاص بشناسیم. در اینصورت با زمان یا لحظهٔ شروع یا پایان آن پدیده سروکار داریم. لذا باید مراقب بود که این دو مفهوم با یکدیگر اشتباه گرفته نشود: لحظه، مدّت!

✍ **نکته:** برای تعیین مدت زمان وقوع یک پدیده، از اصطلاح‌های متعددی استفاده می‌شود:

- **ثانیهٔ nاُم:** ثانیهٔ n اُم حرکت، یعنی بازهٔ زمانی بین $t=n-1$ تا $t=n$ که گاهی به صورت $(n-1,n)$ نمایش داده می‌شود. مثلاً ثانیهٔ چهارم حرکت یعنی بازهٔ زمانی $(3\text{s},4\text{s})$.
- **T ثانیهٔ nاُم:** بازهٔ زمانیِ T ثانیهٔ nاُم یعنی بازهٔ زمانی که با لحظهٔ $(n-1)T$ آغاز شده و با لحظهٔ nT پایان می‌پذیرد.

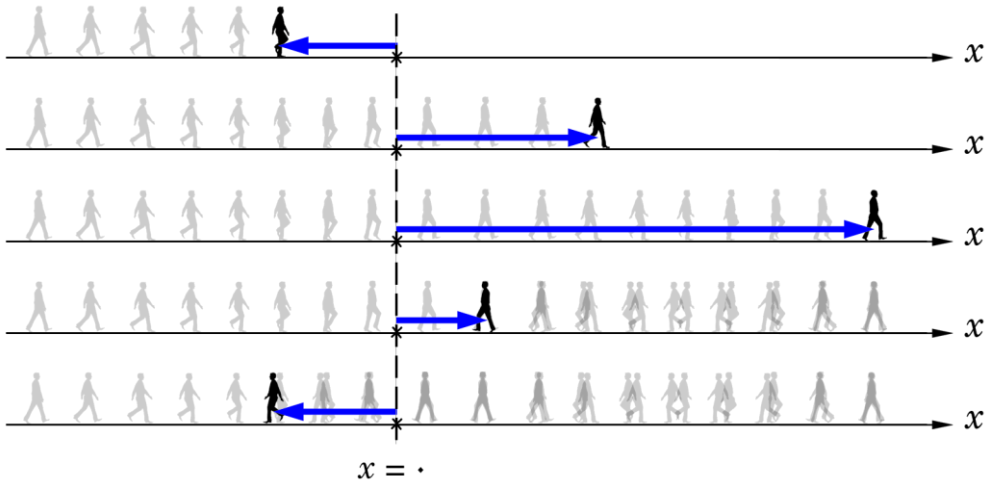
۱۰-۱. مفاهیم حرکت یک بُعدی

ساده‌ترین نوع حرکت، حرکت روی خط راست است. در این حالت، برای توصیف وضعیت متحرک، به یک دستگاه مختصات نیاز داریم و برای سهولت، این دستگاه را به‌گونه‌ای انتخاب می‌نماییم که یکی از محورهای آن، بر مسیر حرکت ذرّهٔ مورد نظر منطبق باشد. لازم به ذکر است که انتخاب جهت مثبت و انتخاب مبدأ برای این دستگاه مختصات، کاملاً اختیاری است و نتایج فیزیکی به دست آمده، مستقل از آن خواهد بود.



در ادامه به معرفی کمیت‌هایی مانند مکان، سرعت، تندی، شتاب و ... می‌پردازیم که برای توصیف موقعیت و وضعیت حرکت، ضروری هستند.

۱. مکان و بردار مکان: در هر لحظهٔ دلخواه، متحرّک مورد نظر در مکان خاصّی قرار دارد که می‌توان آن را به کمک یک بردار نمایش داد. این بردار به گونه‌ای در نظر گرفته می‌شود که مبدأ مختصات را به محل ذرهٔ مورد نظر متصل می‌کند. گاهی این بردار را بردار مکان متحرک نیز می‌نامیم. بنابراین **بردار مکان، برداری که مبدأ محور را به مکان متحرک در هر لحظه وصل می‌کند.**



بردار مکان را معمولاً با $\vec{r}(t)$ نمایش می‌دهیم. برای حالتی که جسم روی محور x حرکت می‌کند، می‌توان آن را به صورت $\vec{r}(t) = x\,\vec{\mathbf{i}}$ نشان داد. در این رابطه، $\vec{\mathbf{i}}$ بردار یکهٔ راستای محور xها است.

از آنجا که می‌خواهیم حرکت جسم روی محور xها را بررسی کنیم، برای سهولت در انجام عملیات، در برخی اوقات، بردار یکهٔ $\vec{\mathbf{i}}$ را کنار می‌گذاریم و از نوشتن آن پرهیز می‌کنیم و بنابراین مکان متحرک را فقط با x نمایش می‌دهیم.

در حالت کلّی می‌توان مکان متحرک را به صورت $x = f(t)$ در نظر گرفت. که در این صورت رابطهٔ مذکور را معادلهٔ مکان ـ زمان یا معادلهٔ حرکت می‌نامند.

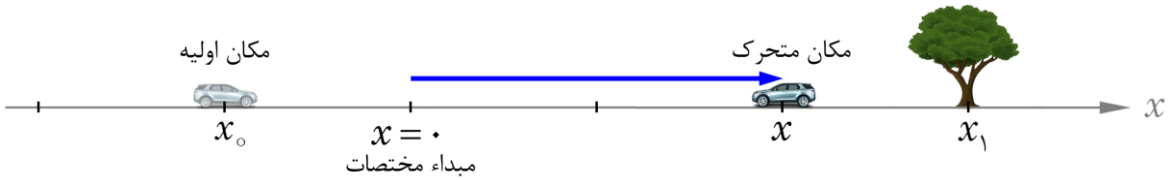
با معلوم بودن این رابطه، می‌توان مکان متحرّک در هر لحظهٔ دلخواه را مشخّص کرد. همچنین می‌توان تعیین نمود که متحرّک درچه لحظه (یا لحظاتی) در مکان خاصی قرار دارد.

✍ **نکته:** توجه به این نکته ضروری است که ...

- x (مکان متحرک)، به مسافت طی شده توسط متحرک، مسیری که متحرک طی کرده و جهت حرکت آن ارتباطی ندارد.

- نقطهٔ شروع حرکت یا مکان اولیه (x_0)، مکان متحرک در لحظهٔ $t=0$ است.
- x در هر لحظه، مکان متحرک در آن لحظه است، نه فاصله تا نقطهٔ شروع حرکت!

نکته: فاصلهٔ یک متحرک تا مبدأ مختصات، در هر لحظهٔ دلخواه، همان $|x|$ است و فاصلهٔ متحرک تا نقطه‌ای مانند x_1 را می‌توان به صورت $|x-x_1|$ تعیین کرد.



مثال ۱

معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی در SI به صورت $x=-4t^2+20t+10$ است.

الف) مکان متحرک را در لحظات $t_1=1\,s$، $t_2=2\,s$، $t_3=3\,s$ و $t_4=4\,s$ تعیین کنید.

ب) متحرک در لحظهٔ $t=2/5\,s$ در چه فاصله‌ای از مبدأ قرار دارد؟

پ) در چه لحظه‌ای این متحرک در فاصلهٔ ۴۶ متری مبدأ مختصات قرار دارد؟

ت) در چه لحظه‌ای این متحرک مجدداً به نقطهٔ شروع حرکت باز می گردد؟

ث) مسیر حرکت این متحرک را رسم کنید.

نکته: اگر معادلهٔ حرکت دو متحرک را در اختیار داشته باشیم، فاصلهٔ میان آنها را در هر لحظهٔ دلخواه می‌توان از رابطهٔ زیر تعیین کرد:

$$\text{فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر} = |x_A - x_B| \qquad (۱-۱۰)$$

نکته: شرط به هم رسیدن دو متحرک آن است که در یک لحظهٔ مشخص، هر دو متحرک از یک نقطه عبور کنند و فاصلهٔ میان آنها به صفر برسد. بنابراین برای تعیین لحظهٔ تلاقی کافی است ابتدا معادلات حرکت آنها را در یک *دستگاه مختصات* نوشته و معادلات حرکت آنها را با هم برابر قرار دهیم:

$$\text{شرط به هم رسیدن دو متحرک}: x_A = x_B \qquad (۲-۱۰)$$

مثال ۲

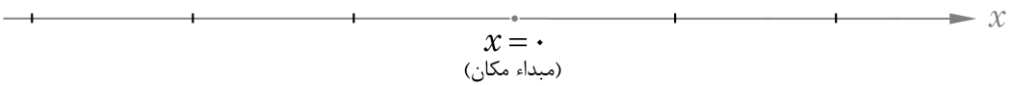
معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک در SI به صورت $x_A = -t^۲ + ۱۳t + ۱۵$ و $x_B = ۲t^۲ + ۷t - ۳۰$ است.

الف) بردار مکان دو متحرک را در لحظهٔ $t_۱ = ۳\,\text{s}$ در دستگاه مختصات زیر رسم نمایید.

ب) در چه فاصله‌ای از مبداء مختصات، دو متحرک به هم می‌رسند؟

پ) یک ثانیه قبل از آنکه دو متحرک به هم برسند، در چه فاصله‌ای از هم قرار دارند؟

ت) در چه لحظه‌ای فاصلهٔ دو متحرک ۳۶ متر می‌شود؟



۲. جـابه‌جایی و بردار جابه‌جایی: همان‌گونه که گفته شد، متحرّک می‌تواند در لحظات مختلف در مکان‌های مختلفی قرار داشته باشد. بنابراین ممکن است این سؤال مطرح شود که متحرّک در یک بازهٔ زمانی مشخّص، چه‌قدر جابه‌جا شده است؟ جابه‌جاییِ متحرّکی که در لحظهٔ t_i در مکان x_i و در لحظهٔ t_f در مکان x_f قرار دارد، در بازهٔ زمانی $\Delta t = t_f - t_i$، به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\Delta x = x_f - x_i \qquad (۳-۱۰)$$

✍ **نکته:** برای تعیین جابه‌جایی در یک بازهٔ زمانی، فقط و فقط مکان متحرّک در دو لحظهٔ ابتدایی و انتهایی حرکت اهمیّت دارد و طول مسیری که متحرک در طی این مدت پیموده، مطرح نیست.

✍ **نکته:** جابه‌جایی متحرک در یک بازهٔ زمانی مشخص، می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد.

◈ مثال ۳

معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی در SI به صورت $x = -t^2 + 8t - 15$ است.

الف) بردار مکان این متحرّک در چه لحظه‌ای (یا لحظاتی) تغییر جهت می‌دهد؟

ب) جابه‌جایی متحرّک در سه ثانیهٔ دوّم حرکت چند متر است؟

پ) پس از چه مدّت، متحرّک به محلّ اولیهٔ خود باز می‌گردد؟

بردار جابه‌جایی: پاره‌خط جهت‌داری که مکان آغازین حرکت را به مکان پایانی حرکت وصل می‌کند بردار جابه‌جایی نامیده می‌شود. بردار جابه‌جایی را با $\vec{d}$ (یا $\Delta\vec{r}$) نمایش می‌دهیم.

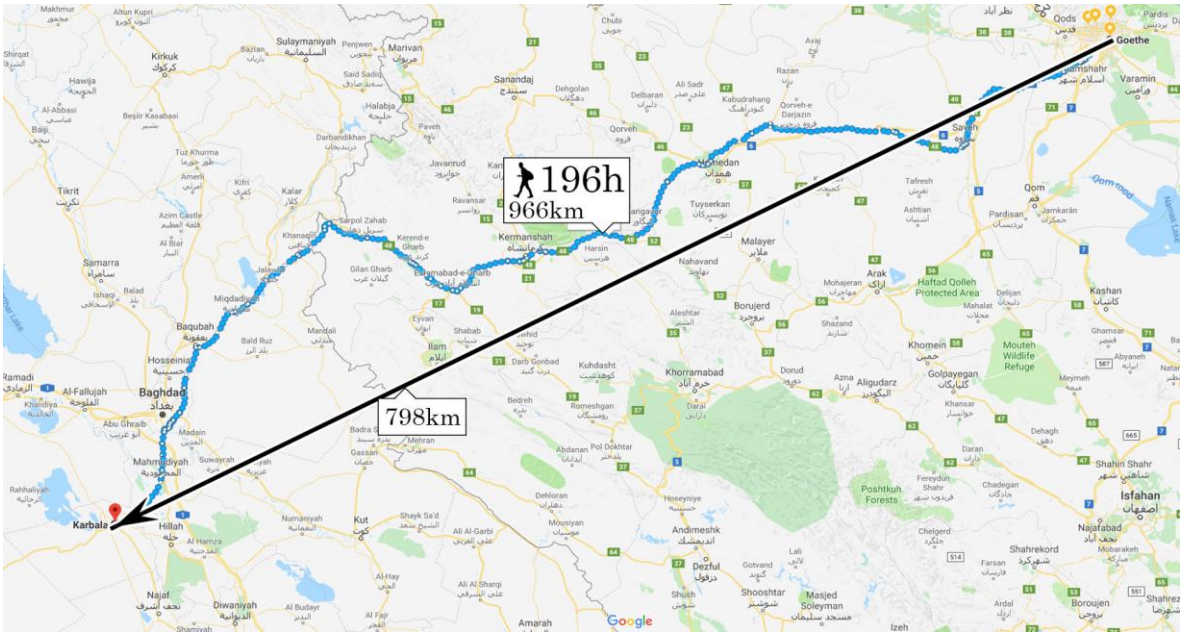
✍ **نکته:** اگر بردار مکان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در دو لحظهٔ t_1 و t_2 به ترتیب $\vec{x}_1$ و $\vec{x}_2$ باشد، می‌توان بردارهای جابه‌جایی و سرعت متوسط این متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 را به صورت زیر تعیین کرد:

$$\vec{d} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 = x_2\,\vec{\mathbf{i}} - x_1\,\vec{\mathbf{i}} = (x_2 - x_1)\,\vec{\mathbf{i}} = \Delta x\,\vec{\mathbf{i}} \qquad (۴\text{-}۱۰)$$

حرکت دو بعدی

می‌توانیم مفاهیم حرکت در یک بُعد را تعمیم دهیم و برای حرکت دو بُعدی (و سه بُعدی) استفاده نماییم. حرکت دو بُعدی حرکتی است که در صفحه صورت می‌پذیرد و لذا برای توصیف آن، حداقل به یک دستگاه مختصات دو بُعدی نیاز داریم.

۳. مسیر حرکت و مسافت طی شده: مسیر حرکت یک متحرک، مجموعهٔ مکان‌هایی است که متحرک مورد نظر در لحظات مختلف در آن‌ها حضور داشته است. به عبارت دیگر، مسیر حرکت، همان ردّپای متحرک است. طول مسیر حرک متحرک را مسافت پیمود شده یا مسافت می‌نامیم و آن را با ℓ نمایش می‌دهیم.



در شکل نشان داده شده، مسافت طی شده توسط متحرک، ۹۶۶ کیلومتر است در حالی‌که جابه‌جایی انجام شده، برداری است به طول ۷۹۸ کیلومتر.

مثال ۴

در شکل مقابل، شعاع چرخ $r = ۰/۵\,\text{m}$ است و نقطهٔ P روی محیط چرخ مشخّص شده است. هنگامی‌که چرخ، بدون لغزش ۲/۵ دور می‌چرخد، نقطهٔ P چند متر جابه‌جا می‌شود؟ ($\pi = ۳$)

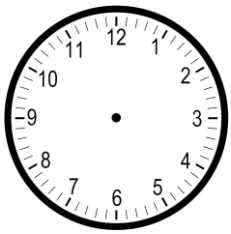
مثال ۵

یک پهپاد ایرانی، در طی یک مأموریت، ابتدا ۶ کیلومتر به طرف بالا، سپس ۲ کیلومتر به طرف غرب و در نهایت ۱۵۰۰ متر به طرف جنوب حرکت می‌کند. مسافت طی شده توسط این پهپاد چند برابر اندازهٔ جابه‌جایی آن در این مأموریت است؟

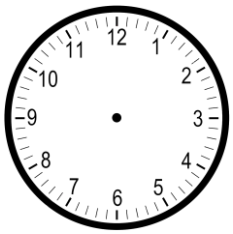
مثال ۶

طول عقربهٔ دقیقه شمار یک ساعت دیواری، $20\,cm$ است. در هرکدام از حالت‌های زیر، مسافت طی شده توسط نوک عقربه و جابه‌جایی انجام شده توسط آن را تعیین کنید:

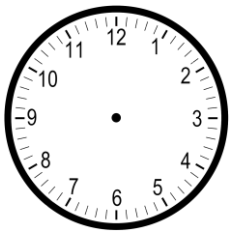
الف) از ساعت $9:15'$ تا $9:45'$.



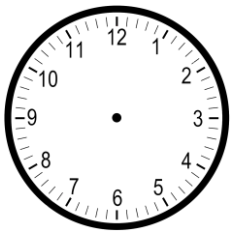
ب) از ساعت $6:00'$ تا $8:15'$.



پ) از ساعت $10:20'$ تا $12:10'$.



ت) از ساعت $5:30'$ تا $8:30'$.



۳. سرعت متوسط و بردار سرعت متوسط: معمولاً سرعت متوسط متحرّکی که روی خط راست حرکت می‌کند، در بازهٔ زمانی (t_1, t_2) را با نماد v_{av} نشان می‌دهیم و بر طبق تعریف داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (۵-۱۰)$$

یکای سرعت متوسط در SI، متر بر ثانیه $(\frac{m}{s})$ است.

مثال ۷

معادلهٔ حرکت متحرّکی در SI، به صورت $x = t^3 - 6t^2 + 5t - 2$ است.

الف) در چه لحظه‌ای متحرّک مجدداً از نقطهٔ شروع حرکت می‌گذرد؟

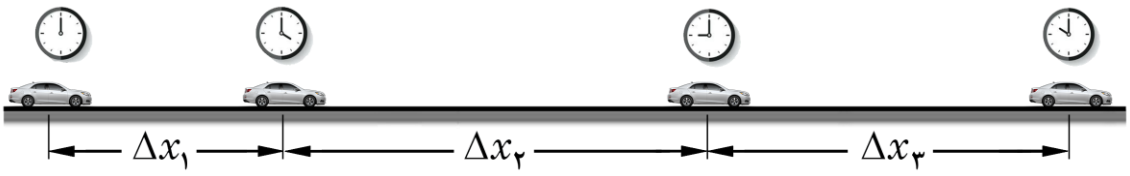
ب) سرعت متوسط حرکت در ثانیهٔ پنجم و سرعت متوسط در پنج ثانیهٔ اول را تعیین کنید.

مثال ۸

معادلهٔ حرکت متحرکی در SI به صورت $x = 2t^3 - 5t^2 - 12t + 6$ است. اگر سرعت متوسط متحرک از لحظهٔ شروع حرکت $(t = 0)$ تا t_1، صفر باشد، t_1 را تعیین کنید.

نکته: در مواردی که یک متحرّک، در بازه‌های زمانی متفاوتِ Δt_1، Δt_2، Δt_3 و ... بخش‌های مختلفی از یک مسیر بر روی یک خط راست را با سرعت‌های مختلف می‌پیماید، می‌توان سرعت متوسط را از رابطهٔ زیر به دست آورد:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\ \underset{\text{کل}}{=}\ \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots} \qquad (۶-۱۰)$$



مثال ۹

اتومبیلی ابتدا به مدّت $10\ \text{min}$ با تندی $10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ حرکت می‌کند و سپس مسافت $5\ \text{km}$ را با تندی $5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ و در نهایت در مدّت $400\ \text{s}$ مسافت $5\ \text{km}$ را در همان جهت می‌پیماید. سرعت متوسط متحرّک در کلّ حرکت چه‌قدر است؟

مثال ۱۰

دوچرخه سواری با تندی ثابتِ $20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ به سمت شهر A که در فاصلهٔ $10\ \text{km}$ از نقطهٔ شروع قرار دارد، حرکت می‌کند و پس از رسیدن به این شهر، باز می‌گردد و به مدّت $250\ \text{s}$ با تندی $36\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ رکاب می‌زند. سرعت متوسط دوچرخه‌سوار در این مدّت چه‌قدر است؟

مثال ۱۱

متحرّکی نیمی از فاصلهٔ میان دو نقطه را با تندی $5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$، نیمی از مسیر باقی مانده را با تندی $6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ و بقیهٔ مسیر را با تندی $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ در یک جهت طی می‌کند. سرعت متوسط متحرّک در کل مسیر چه‌قدر است؟

مثال ۱۲

نشان دهید اگر متحرکی $\frac{m_1}{n}$ فاصلهٔ میان دو نقطه را با تندی v_1، $\frac{m_2}{n}$ را با تندی v_2، $\frac{m_3}{n}$ را با تندی v_3 و ... در یک جهت حرکت کند، سرعت متوسط آن در کل مسیر از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود:

$$\frac{n}{v_{av}} = \frac{m_1}{v_1} + \frac{m_2}{v_2} + \frac{m_3}{v_3} + \cdots$$

مثال ۱۳

متحرکی نیمی از فاصلهٔ میان دو نقطه را با تندی $۶\,\frac{m}{s}$، $\frac{۱}{۴}$ فاصله را با تندی $۱/۵\,\frac{m}{s}$، $\frac{۱}{۶}$ فاصله را با تندی $۴\,\frac{m}{s}$ و بقیهٔ مسیر را با تندی $۲\,\frac{m}{s}$ در یک جهت حرکت می‌کند، سرعت متوسط آن در کل مسیر را تعیین کنید.

راه اول:

راه دوم:

نکته: برای متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، بردار سرعت متوسط را می‌توان به صورت زیر تعیین کرد:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} \qquad (۷-۱۰)$$

مثال ۱۴

جدول زیر را برای هر متحرک به صورت جداگانه تکمیل کنید:

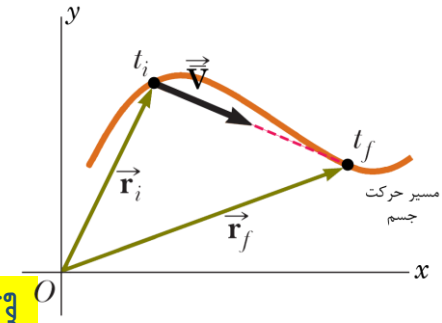
	بازهٔ زمانی	مکان آغازین	مکان پایانی	بردار جابه‌جایی	سرعت متوسط	جهت حرکت
متحرک A	$\Delta t = ۲۰\,s$	$(-۱۵m)\vec{i}$			$(۳/۲\frac{m}{s})\vec{i}$	
متحرک B		$(+۳m)\vec{i}$		$(-۲۶m)\vec{i}$	$(-۱۰\frac{m}{s})\vec{i}$	
متحرک C	$\Delta t = ۱۵\,s$		$(+۱۰m)\vec{i}$	$(-۵m)\vec{i}$		
متحرک D	$\Delta t = ۵\,s$		$(-۱۰m)\vec{i}$		$(۲/۰\frac{m}{s})\vec{i}$	

حرکت دو بعدی

بُردار سرعت متوسط: برطبق تعریف، نسبت بردار جابه‌جایی به زمان انجام جابه‌جایی را بردار سرعت متوسط می‌نامند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} \qquad (۸\text{-}۱۰)$$

از آن‌جاکه $\Delta t > ۰$ است، لذا می‌توان نتیجه گرفت بردار سرعت متوسط، همواره با بردار جابه‌جایی موازی و هم‌جهت است.

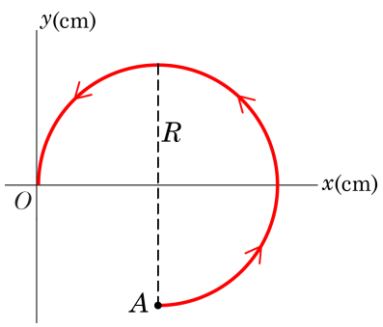


مثال ۱۵

مطابق شکل، ذرّه‌ای در مدّت ۲۰s بر روی محیط دایره‌ای به شعاع ۴m از نقطهٔ A تا O جابه‌جا می‌شود.

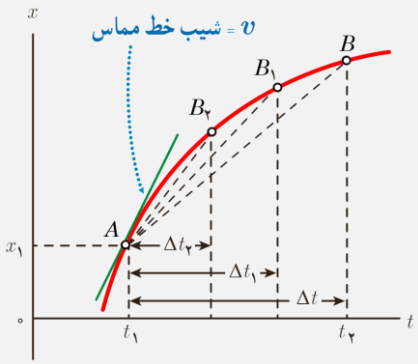
الف) بردار سرعت متوسط ذرّه در این جابه‌جایی را تعیین کنید.

ب) اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در این بازهٔ زمانی چند متر بر ثانیه است؟



۴. تندی و سرعت لحظه‌ای:

تندی متحرک در هر لحظه از زمان را تندی لحظه‌ای می‌نامند و با v نمایش می‌دهند. اگر هنگام گزارش تندی لحظه‌ای، به جهت حرکت متحرک نیز اشاره شود، در واقع سرعت لحظه‌ای ($\vec{v}$) آن را که کمیتی برداری است بیان کرده‌ایم.



به عبارت دیگر، هرگاه بازهٔ زمانی اندازه‌گیری سرعت متوسط بسیار بسیار کوچک باشد ($\Delta t \to ۰$)، آنچه به دست می‌آید، عملاً همان سرعت لحظه‌ای یا سرعت متحرّک است. بنابراین به کمک مفاهیمی که در ریاضیات خواهید خواند(!)، می‌توان نوشت:

$$v = \lim_{\Delta t \to ۰} v_{av} = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = x'_t \qquad (*-۱۰)$$

به عبارت دیگر با مشتق‌گیری از معادلهٔ مکان ـ زمان، می‌توان به معادلهٔ سرعت ـ زمان دست یافت و به کمک آن سرعت متحرّک در لحظات مختلف را به دست آورد.

مثال ۱۶

معادلهٔ مکان ـ زمان متحرّکی در SI به صورت $x = ۲t^۳ - ۱۵t^۲ + ۲۴t + ۱۲$ است.

الف) معادلهٔ سرعت ـ زمان را برای این متحرک بنویسید.

ب) سرعت اولیهٔ متحرک چند متر بر ثانیه است؟ متحرک در شروع حرکت، به کدام سمت در حرکت است؟

پ) متحرّک در چه لحظاتی متوقّف شده است؟

ت) سرعت متوسط متحرک بین دو لحظهٔ توقّف چه‌قدر است؟

نکته: علامت سرعت، بیانگر جهت حرکت متحرّک است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

- اگر $v>0$ باشد، متحرّک در جهت مثبت محور انتخاب شده و اگر $v<0$ باشد، متحرّک در خلاف جهت محور انتخاب شده در حال حرکت است.

- اگر متحرک بخواهد تغییر جهت دهد، باید علامت سرعت تغییر نماید. یعنی اولاً باید سرعت در لحظهٔ تغییر جهت صفر شده باشد و ثانیاً علامت سرعت در آن لحظه تغییر کرده باشد.
- اگر متحرک از مبدأ مختصات عبور کند (معادلهٔ $x=0$ جواب داشته باشد)، کمینهٔ فاصلهٔ متحرک تا مبدأ مختصات صفر است و در غیراینصورت، بیشینه (حداکثر) یا کمینه (حداقل) فاصلهٔ متحرک تا مبداء مختصات در لحظاتی اتفاق می‌افتد که متحرک تغییر جهت داده است.

نکته: توقف، شرط لازم برای تغییر جهت متحرک است، اما کافی نیست؛ به عبارت دیگر ممکن است متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، توقف نماید اما تغییر جهت ندهد.

مثال ۱۷

معادلهٔ مکان ـ زمان متحرّکی در SI به صورت $x=t^3-3t^2-45t+30$ است.

ب) متحرک در طول حرکت چند بار توقف کرده و چند بار تغییر جهت داده است؟

پ) چه مدّت متحرّک در خلاف جهت محور xها حرکت کرده است؟

ت) حداقل فاصلهٔ متحرک تا مبداء چند متر است؟

نکته: با دقت در معادلهٔ حرکت می‌توان نتیجه گرفت در لحظاتی که متحرک در حال نزدیک شدن به مبداء مختصات است، علامت x و سرعت ذره با یکدیگر مختلف است ($xv<0$) و در لحظاتی که متحرک در حال دور شدن از مبداء مختصات باشد، $xv>0$ است.

مثال ۱۸

معادلهٔ مکان ـ زمان متحرّکی در SI به صورت $x=-t^2+10t-30$ است.

الف) این متحرک چه مدت در حال نزدیک شدن به مبداء مختصات بوده است؟

ب) حداقل فاصلهٔ متحرک تا مبداء مختصات چند متر است؟

نکته: تندی لحظه‌ای، یک کمیت نرده‌ایِ همواره مثبت است. در حالی‌که سرعت، یک کمیت برداری است و در حرکت روی خط راست، عددی جبری و دارای علامت مثبت یا منفی است (و می‌دانیم این علامت، جهت حرکت را نشان می‌دهد). در حرکت روی خط راست، تندی متحرک، همان اندازهٔ سرعت آن است.

۶. تندی متوسط: بر طبق تعریف، تندی متوسط متحرک در هر بازهٔ زمانی، به صورت نسبت مسافت طی شده توسط متحرک به بازهٔ زمانی مورد نظر تعریف می‌شود. بنابراین داریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}$$ تندی متوسط در بازهٔ t_i تا t_f: (۹-۱۰)

مثال ۱۹

تندی متوسط و سرعت متوسطی که روی خط راست حرکت می‌کند، در مدت ۵۰ ثانیه، به ترتیب $15\frac{m}{s}$ و $(-10\frac{m}{s})\vec{i}$ است. اگر متحرک در طول حرکت خود فقط یک بار تغییر جهت داده باشد، حداکثر فاصلهٔ آن تا نقطهٔ شروع حرکت چند متر است؟

مثال ۲۰

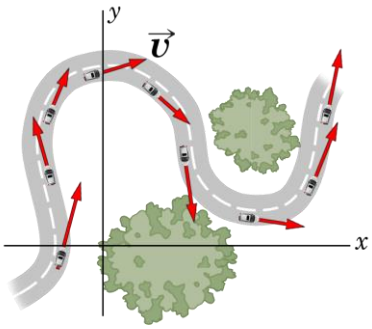
موتورسواری فاصلهٔ ۳۰۰ کیلومتری بین دو شهر را با تندی $۶۰\frac{\text{km}}{\text{h}}$ رفته و با تندی $۴۰\frac{\text{km}}{\text{h}}$ باز می‌گردد. تندی متوسط متحرک در هر کدام از حالت‌های زیر چند کیلومتر بر ساعت است؟

الف) در طول مدت رفت و برگشت.

ب) در مدتی که ۱۰ ساعت از شروع حرکت گذشته است.

پ) در مدتی که موتور سوار ۴۲۰ کیلومتر را طی کرده است. سرعت متوسط در این مدت چقدر است؟

حرکت دو بعدی

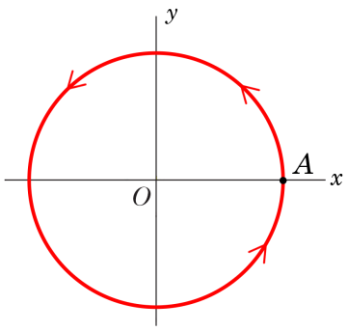


نکته: می‌توان نشان داد که همواره بردار سرعت لحظه‌ای، برداری مماس بر مسیر حرکت متحرّک است.

اندازهٔ این بردار نیز، بستگی به اندازهٔ سرعت متحرّک دارد. این مطلب بدان معنی است که: جسم همواره در جهتِ سرعت لحظه‌ای خود حرکت می‌کند (نه در جهت نیروهای وارد بر جسم یا در جهت شتاب!)

مثال ۲۱

مطابق شکل، متحرکی با تندی ثابت $۱۵\frac{\text{m}}{\text{s}}$ بر روی دایره‌ای به شعاع ۲۰۰ متر حرکت می‌کند و در لحظهٔ $t=۰$ از نقطهٔ A می‌گذرد. بردار سرعت متحرک را در هرکدام از لحظات $t=۶۰\text{s}$ و $t=۱۱۰\text{s}$ رسم نمایید و آن را برحسب بردارهای یکه بنویسید. ($\pi=۳$)

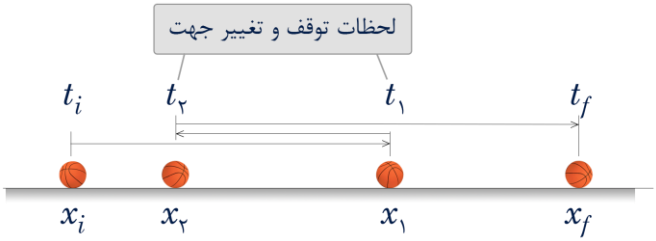


نکته: همانطور که گفته شد، جابه‌جایی یک جسم در یک بازهٔ زمانی، صرفاً به مکان نقاط ابتدایی و انتهایی بستگی دارد و مستقل از مسیری است که متحرّک در این مدّت پیموده است؛ اما مسافتی که متحرّک طی می‌نماید، کاملاً به مسیر حرکت بستگی دارد. در واقع مسافت طی شده در یک حرکت، برابر است با طول مسیری که متحرّک طی کرده است، تا از نقطهٔ مبدأ به نقطهٔ مقصد برسد.

نکته: تنها در حالتی که متحرک روی یک خط راست حرکت کند و در طول حرکت، جهت حرکت خود را تغییر ندهد، اندازهٔ جابه‌جایی با مسافت طی شده برابر خواهد بود.

نکته: اگر معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند را در اختیار داشته باشیم، برای تعیین مسافت طی شده، علاوه بر استفاده از نمودار سرعت ـ زمان (که بعداً توضیح داده می‌شود)، می‌توان مراحل زیر را طی کرد:

- ابتدا لحظاتی که متحرک در آن لحظات تغییر جهت می‌دهد را به دست می‌آوریم. (لحظاتی که سرعت متحرک صفر شده و علامت آن تغییر می‌کند)
- سپس بازهٔ زمانی کل را به صورت بازه‌های کوچک‌تری تقسیم می‌نماییم که در آنها متحرک تغییر جهت نداده است.
- و در نهایت قدر مطلق جابه‌جایی‌ها را با هم جمع می‌کنیم.



$$\ell = |\Delta x_۱| + |\Delta x_۲| + |\Delta x_۳| = |x_۱ - x_i| + |x_۲ - x_۱| + |x_f - x_۲|$$

مثال ۲۲

معادلهٔ حرکت متحرّکی در SI به صورت $x = ۲t^۲ - ۱۰t + ۱۵$ است.

الف) متحرّک در طول حرکت خود چند بار تغییر جهت داده است؟

ب) از شروع حرکت ($t_۱ = ۰$) تا $t_۲ = ۴\,s$، متحرک چه مسافتی را پیموده است؟

پ) در بازهٔ زمانی $t_۲ = ۴\,s$ تا $t_۳ = ۶\,s$، متحرک چند متر مسافت طی کرده است؟

ت) مسافت طی شده توسط این متحرک در ۶ ثانیهٔ اول حرکت، چند متر بیشتر از جابه‌جایی آن در همین مدت است؟

مثال ۲۳

معادلهٔ حرکت متحرّکی در SI به صورت $x = ۳t^۳ - ۶t^۲ + ۴t - ۱$ است.

الف) متحرّک در طول حرکت خود چند بار تغییر جهت داده است؟

ب) مسافت طی شده توسط متحرّک در سه ثانیهٔ اول حرکت چند متر است؟

مثال ۲۴

موتورسواری فاصلهٔ ۳۰۰ کیلومتری بین دو شهر را با تندی $۶۰\frac{\text{km}}{\text{h}}$ رفته و با تندی $۴۰\frac{\text{km}}{\text{h}}$ باز می‌گردد. تندی متوسط متحرک در هر کدام از حالت‌های زیر چند کیلومتر بر ساعت است؟

الف) در طول مدت رفت و برگشت.

ب) در مدتی که ۱۰ ساعت از شروع حرکت گذشته است.

پ) در مدتی که موتور سوار ۴۲۰ کیلومتر را طی کرده است. سرعت متوسط در این مدت چقدر است؟

مثال ۲۵

معادلهٔ مکان ـ زمان متحرّکی در SI به صورت $x = ۳t^۲ - ۲۴t - ۱۰$ است. سرعت متوسط و تندی متوسط متحرک در ۸ ثانیهٔ اوّل حرکت را بیابید.

۶. شتاب متوسط: بر طبق تعریف، آهنگ متوسط تغییر سرعت را شتاب متوسط می‌نامند. یعنی داریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} \quad (۱۰-۱۰)$$

شتاب متوسط در بازهٔ t_i تا t_f:

یکای شتاب متوسط در SI، متر بر مجذور ثانیه ($\frac{m}{s^۲}$) است.

مثال ۲۶

معادلهٔ مکان ـ زمان متحرّکی در SI به صورت $x = t^۳ - ۳t^۲ - ۲۴t + ۱۵$ است.

الف) متحرک چه مدت در خلاف جهت محور حرکت می‌کند؟

ب) شتاب متوسط متحرّک را در مدتی که متحرّک در خلاف جهت مثبت محور x ها حرکت می‌کند، به دست آورید؟

مثال ۲۷

گلوله‌ای با تندی $36\ \frac{km}{h}$ در امتداد یک خط راست حرکت می‌کند. این گلوله به دیواری برخورد می‌کند و در همان امتداد اولیّه با تندی $18\ \frac{km}{h}$ به عقب باز می‌گردد. اگر مدت زمان برخورد گلوله با دیوار $0/1s$ باشد، بزرگی شتاب متوسط در مدّت برخورد به دیوار چند متر بر مجذور ثانیه است؟

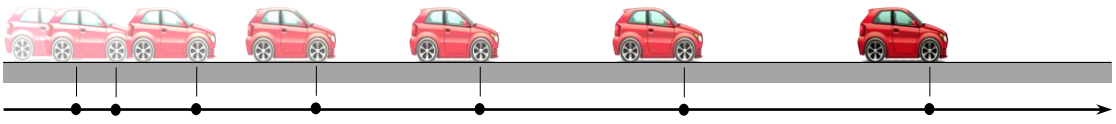
۷. شتاب لحظه‌ای: هرگاه بازهٔ زمانی تعیین شتاب متوسط بسیار کوچک باشد، کمیّتی به دست می‌آید که به آن شتاب لحظه‌ای گفته می‌شود:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_{av} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

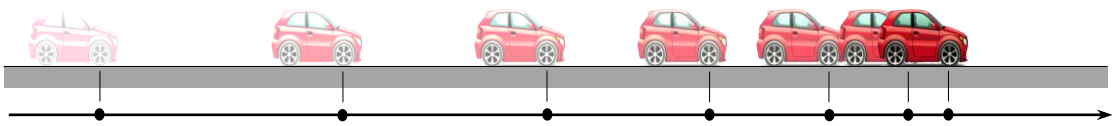
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad a = v'_t = x''_t \qquad (**-10)$$

به عبارت دیگر، شتاب، مشتق سرعت نسبت به زمان یا مشتق دوم مکان نسبت به زمان است!

نکته: هرگاه در یک حرکت، تندی متحرک در حال افزایش باشد، حرکت را تُندشونده می‌نامند. در این حرکت، جهت شتاب متحرّک، با جهت سرعت آن یکسان و در نتیجه $a.v > 0$ است. در حرکت تندشونده، اندازهٔ سرعت متحرّک مرتباً در حال افزایش است!



نکته: هرگاه تندی متحرک در حال کاهش باشد، حرکت را کُندشونده می‌نامند. در این نوع حرکت، علامت شتاب در خلاف جهت حرکت متحرّک و به عبارت دیگر $a.v < 0$ است. در این حرکت، اندازهٔ سرعت مرتباً در حال کاهش است و اگر با همین وضعیّت ادامه یابد متحرّک در نهایت متوقّف خواهد شد.



مثال ۲۹

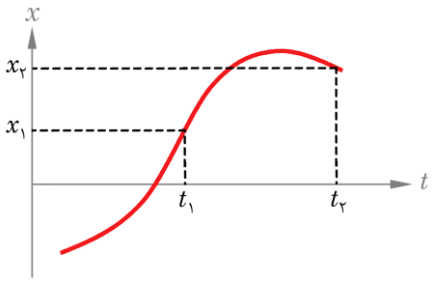
معادلهٔ حرکت متحرّکی در SI به صورت $x = t^{۳} - ۷/۵t^{۲} + ۱۲t - ۴$ است. این متحرّک در مجموع، چند ثانیه به صورت کُند شونده حرکت کرده است؟

۱۰-۲. تحلیل نمودارهای حرکت

دیدیم که وقتی جسمی بر روی خط راست حرکت می‌کند، مکان آن در حالت کلّی، تابعی از زمان است و به صورت $x = f(t)$ در نظر گرفته می‌شود. اکنون اگر این تابع را در دستگاه مختصات $x-t$ رسم نماییم، نمودار مکان ـ زمانِ حرکت را رسم کرده‌ایم. به همین ترتیب می‌توان نمودارهای سرعت ـ زمان و شتاب ـ زمان را نیز برای متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، رسم کرد.

از این نمودارها اطّلاعات بسیار مفیدی در مورد حرکت به دست می‌آید. در ادامه به بررسی نمودارهای حرکت و نحوهٔ استخراج اطلاعات از آن‌ها می‌پردازیم:

الف. نمودار مکان ـ زمان

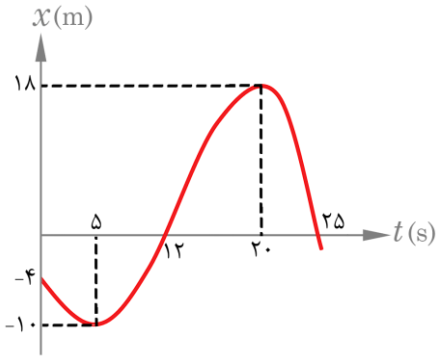


از روی نمودار مکان ـ زمان یک جسم، می‌توان اطّلاعات زیر را به دست آورد:

- **مکان متحرّک:** ساده‌ترین چیزی که می‌توان از نمودار مکان - زمان به دست آورد، مکان متحرّک در لحظات دلخواه است. برای این منظور کافی است از لحظهٔ مورد نظر، واقع بر محور زمان، خطی عمود بر محور افقی رسم نماییم تا نمودار را قطع کند و سپس از نقطهٔ به دست آمده، خطی موازی محور افقی رسم نماییم تا مکان ذره را مشخص کند.
- **جابه‌جایی:** با در دست داشتن مکان متحرّک در لحظات مختلف، به راحتی می‌توان جابه‌جایی جسم را در بازهٔ زمانی مورد نظر به کمک رابطهٔ $\Delta x = x_f - x_i$ به دست آورد.
- **مسافت طی شده:** اگر مجموع جابه‌جایی متحرّک در جهت مثبت را با قدر مطلق مجموع جابه‌جایی‌های آن در جهت منفی جمع نماییم، مسافت طی شده توسط متحرّک به دست می‌آید.

مثال ۳۰

نمودار مکان ـ زمان متحرّکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند. نشان داده شده است.

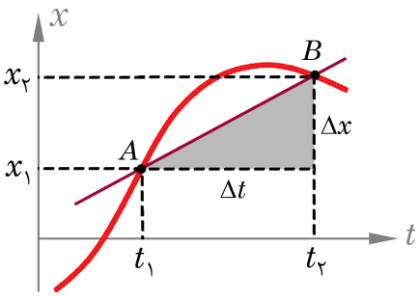


الف) جابه‌جایی متحرّک در ۲۵ ثانیهٔ اوّل حرکت چند متر است؟

ب) مسافت طی شده توسط متحرّک در ۲۵ ثانیهٔ اوّل حرکت چند متر است؟

پ) مسافت طی شده در ۱۲ ثانیهٔ اوّل، چند برابر مسافت طی شده در ۵ ثانیهٔ پنجم حرکت است؟

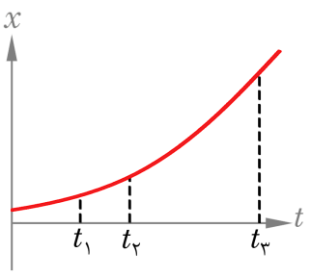
- **سرعت متوسط:** با معلوم بودن جابه‌جایی (Δx) و بازهٔ زمانی (Δt) به راحتی می‌توان سرعت متوسط را به کمک تعریف آن یعنی رابطهٔ $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ تعیین کرد.



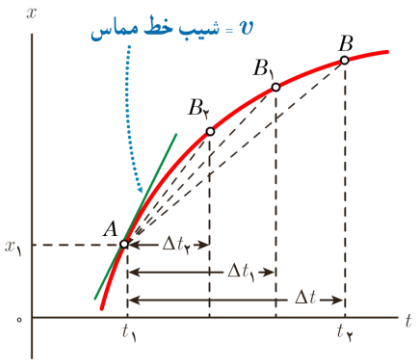
با توجّه به شکل مقابل، تعبیر هندسی سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی، چنین بیان می‌شود: سرعت متوسط یک متحرّک در یک بازهٔ زمانی، برابر شیب پاره‌خطی است که نقاط متناظر با آن دو لحظه روی نمودار را به هم وصل می‌کند.

مثال ۳۱

نمودار مکان ـ زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل است. در کدام بازهٔ زمانی، سرعت متوسط متحرک بیشتر از سایر بازه‌ها است؟



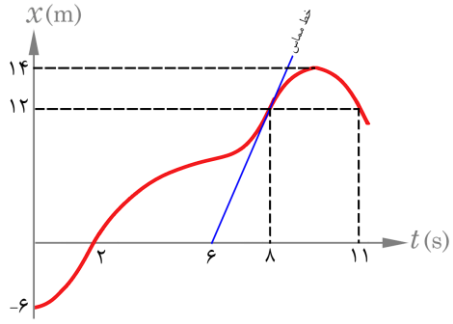
۱) صفر تا t_1
۲) t_1 تا t_2
۳) t_2 تا t_3
۴) صفر تا t_3



- **سرعت لحظه‌ای:** در تعریف سرعت لحظه‌ای دیدیم که $v=\frac{dx}{dt}$ است. یعنی سرعت مشتق تابع $x-t$ بر حسب زمان است. از سوی دیگر در ریاضیات خوانده‌ایم که برای به دست آوردن مشتق یک تابع در یک نقطهٔ مورد نظر کافی است شیب خط مماس بر نمودار نمایش تابع در آن نقطه را به دست آوریم. بنابراین سرعت متحرّک در هر لحظه، برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در آن لحظه است.
- **تندی متوسط:** برای تعیین تندی متوسط متحر در بازهٔ زمانی مورد نظر، کافی است مسافت طی شده توسط متحرک را به بازهٔ زمانی تقسیم نماییم.

◈ مثال ۳۲

با توجّه به نمودار روبه‌رو، ...



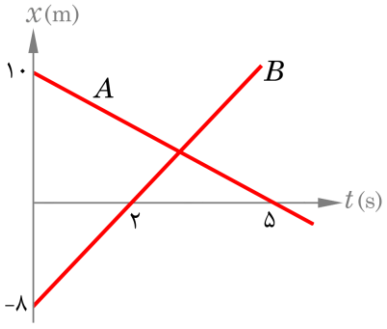
الف) سرعت متحرّک در لحظهٔ $t=8\,s$، چند برابر سرعت متوسط آن در ۸ ثانیهٔ اول حرکت است؟

ب) تندی متوسط متحرک در ۱۱ ثانیهٔ نخست حرکت را تعیین کنید.

- **شتاب متوسط:** بر اساس تعریف شتاب متوسط، برای تعیین این کمیت در یک بازهٔ زمانی معین، باید بتوانیم سرعت (شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان) در هر لحظه را به دست آوریم.

◈ مثال ۳۳

نمودار مکان ـ زمان دو متحرّک A و B که بر روی یک خط راست در حرکتند، مطابق شکل مقابل است.



الف) دو متحرّک در چه لحظه‌ای به هم می‌رسند؟

ب) چه مدت فاصلهٔ میان آن‌ها کمتر از $12\,m$ است؟

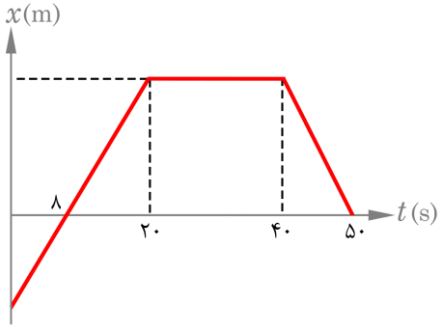
مثال ۳۴

نمودار مکان ـ زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. اگر تندی متوسط متحرک در این مدت (۵۰ ثانیه) برابر ۱۲/۸ متر بر ثانیه باشد، ...

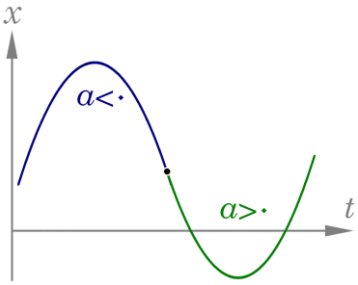
الف) حداکثر فاصلهٔ متحرک تا نقطهٔ شروع حرکت چند متر است؟

ب) سرعت متوسط متحرک در این مدت را تعیین کنید.

پ) شتاب متوسط متحرک بین دو لحظه‌ای که متحرک از مبدأ مختصات می‌گذرد را تعیین کنید.



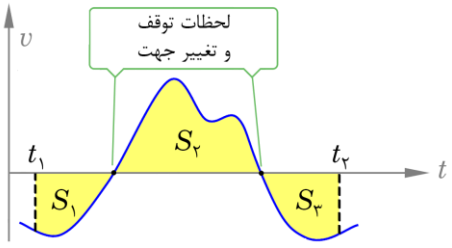
- **علامت شتاب:** با توجّه به آن‌که مشتق دوّم مکان نسبت به زمان، شتاب متحرّک را تعیین می‌کند و از سوی دیگر مشتق دوّم یک تابع، جهت تقعّر آن تابع است، می‌توان نتیجه گرفت جهت تقعر نمودار مکان ـ زمان، بیان کنندهٔ علامت شتاب متحرک است.



ب. نمودار سرعت ـ زمان

شاید بتوان مهم‌ترین و پرکاربردترین نمودار حرکت را نمودار سرعت ـ زمان به حساب آورد. تمامی اطلاعات حرکت، به جز مکان متحرّک را می‌توان از این نمودار استخراج کرد:

- **جابه‌جایی:** از آنجا که سرعت، مشتق مکان نسبت به زمان است (و در نتیجه مکان، انتگرال سرعت نسبت به زمان می‌باشد!) می‌توان نتیجه گرفت: مساحت بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان در یک بازهٔ زمانی، برابر جابه‌جایی متحرّک در آن بازهٔ زمانی است. یعنی:



$$\Delta x = -S_1 + S_2 - S_3 \pm \cdots \qquad (۱۱-۱۰)$$

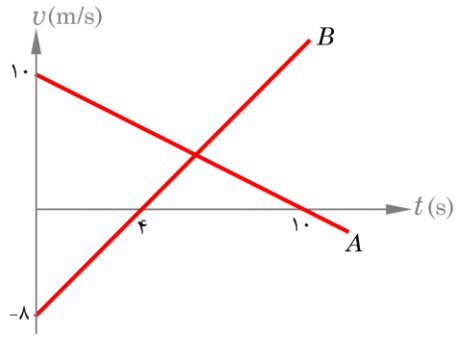
نکته: اگر *فقط* نمودار سرعت ـ زمان را در اختیار داشته باشیم، نمی‌توانیم اطّلاعاتی در مورد مکان ذرّه به‌دست آوریم و فقط اطلاعاتی در مورد تغییر مکان از نمودار قابل استخراج است. لذا برای به دست آوردن مکان متحرک، لازم است اطلاعات اولیه‌ای در مورد مکان در یکی از لحظات در اختیارمان باشد.

- **مسافت طی شده:** با توجّه به تعریف مسافت طی شده، می‌توان گفت: مسافت طی شده توسط متحرّک در یک بازهٔ زمانی، برابرِ مجموع قدر مطلق مساحت‌های محصور بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان در آن بازهٔ زمانی است.

$$l = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots \qquad (۱۲-۱۰)$$

مثال ۳۵

نمودار سرعت ـ زمان دو متحرّک A و B که بر روی یک خط راست در حرکتند، مطابق شکل مقابل است. در مدتی که متحرک A در جهت محور حرکت می‌کند، مسافت طی شده توسط متحرک B چند متر بیشتر از مسافت طی شده توسط متحرک A است؟

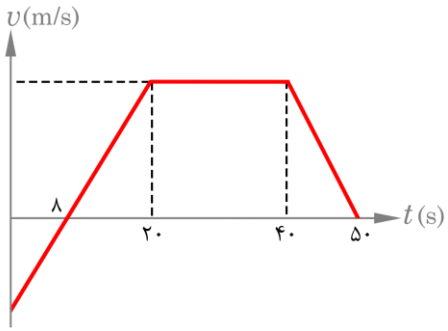


مثال ۳۶

نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. اگر تندی متوسط متحرک در این مدت (۵۰ ثانیه) برابر ۱۰/۱ متر بر ثانیه باشد، ...

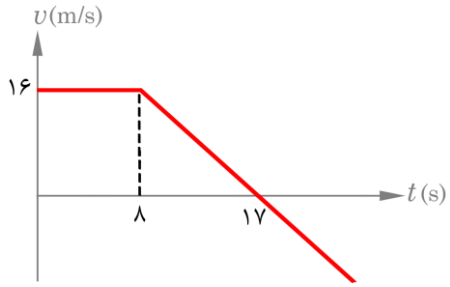
الف) حداکثر فاصلهٔ متحرک تا نقطهٔ شروع حرکت چند متر است؟

ب) سرعت متوسط متحرک در این مدت را تعیین کنید.



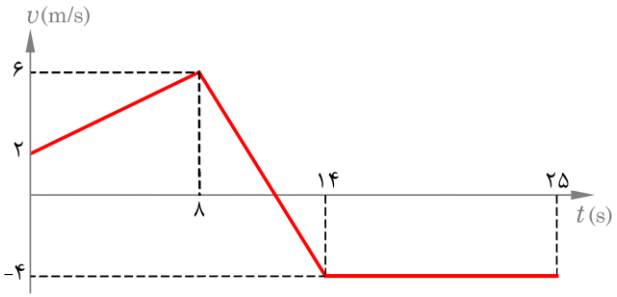
مثال ۳۷

نمودار سرعت ـ زمان حرکت متحرکی که روی مسیری مستقیم در حال حرکت است، به صورت مقابل است. در چه لحظه‌ای متحرک دوباره به نقطهٔ شروع حرکت می‌رسد؟



مثال ۳۸

نمودار سرعت ـ زمان متحرّکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل است.



الف) در چه لحظه‌ای متحرک متوقف شده است؟

ب) متحرّک در ۱۶ ثانیهٔ اول چه مسافتی پیموده و چند متر جابه‌جا شده است؟

پ) جابه‌جایی متحرک در کل این حرکت چند متر است؟

ت) حداکثر فاصلهٔ متحرّک تا نقطهٔ شروع حرکت چند متر است؟

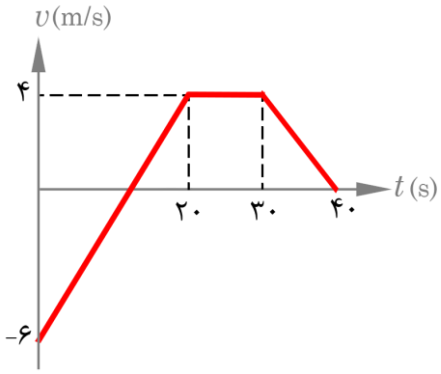
ث) متحرّک در ۴ ثانیهٔ دوم حرکت چند متر بیشتر از ۴ ثانیهٔ اول جابه‌جا شده است؟

ج) پس از چه مدت متحرک به نقطهٔ شروع حرکت خود باز می‌گردد؟

چ) متحرک تا لحظهٔ رسیدن به نقطهٔ شروع حرکت خود، چند متر مسافت طی کرده است؟

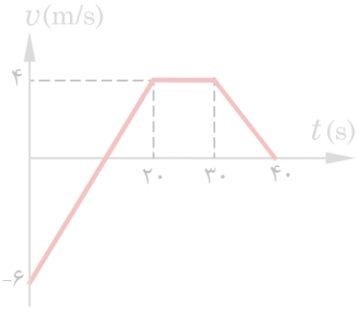
مثال ۳۹

نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل است.

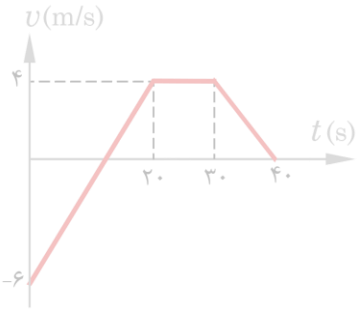


الف) سرعت متوسط متحرک از شروع حرکت تا لحظهٔ $t = ۴۰\,s$ چقدر است؟

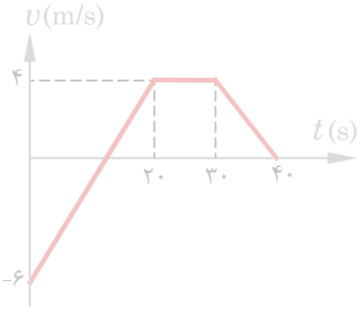
ب) سرعت متوسط متحرک بین دو لحظهٔ توقف چقدر است؟



پ) سرعت متوسط متحرک در نیمهٔ اول، چند برابر سرعت متوسط در نیمهٔ دوم حرکت است؟

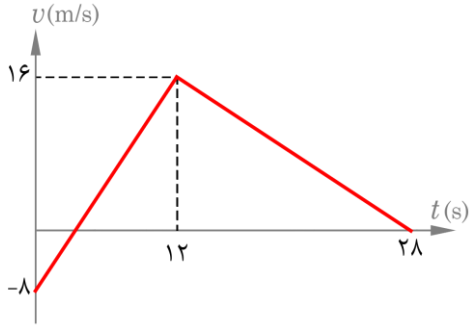


ت) این متحرک پس از چه مدت به نقطهٔ شروع حرکت باز می‌گردد؟

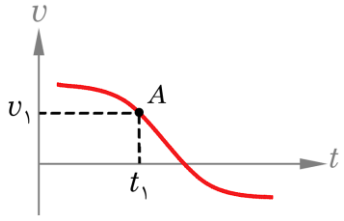


مثال ۴۰

نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل است. اگر مسافت طی شده از لحظهٔ شروع حرکت تا t_1، $\frac{11}{9}$ برابر جابه‌جایی متحرک در همین مدت باشد، t_1 را تعیین کنید.



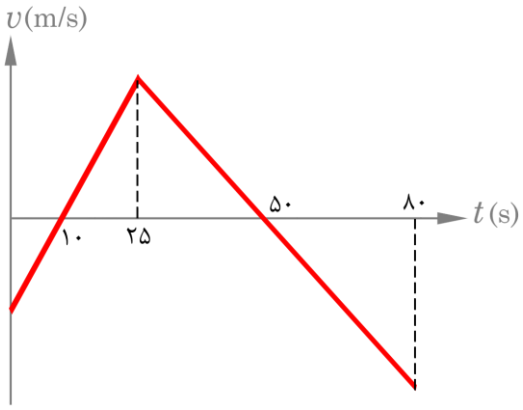
- **سرعت متوسط:** به کمک تعریف سرعت متوسط $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$، می‌توانیم ابتدا Δx و سپس v_{av} را به سادگی تعیین نماییم.
- **سرعت لحظه‌ای:** ساده‌ترین چیزی که می‌توان از نمودار سرعت ـ زمان به دست آورد، سرعت متحرک در هر لحظهٔ دلخواه است. (شبیه به‌دست آوردن مکـان متحرّک، از روی نمودار مکان ـ زمان!)



- **تندی متوسط:** به کمک تعریف سرعت متوسط $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}$، می‌توانیم ابتدا ℓ (مسافت طی شده) و سپس s_{av} را به سادگی تعیین نماییم.

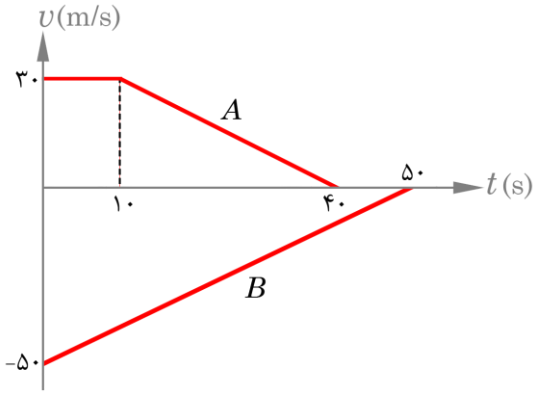
مثال ۴۱

نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. اگر اندازهٔ سرعت متوسط در این مدت $0/5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ باشد، تندی متوسط متحرک در همین مدت را تعیین کنید.



مثال ۴۲

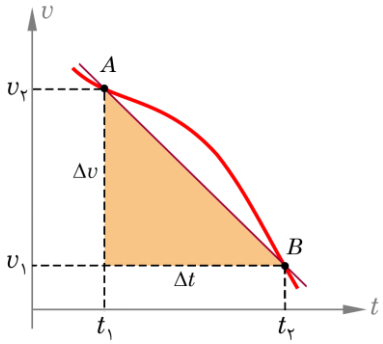
نمودار سرعت ـ زمان دو قطار که بر روی یک ریل، یکدیگر را در فاصلهٔ $۲/۱\text{km}$ متری از هم می‌بینند، مطابق شکل مقابل است.



الف) در لحظهٔ $t=۱۰\text{s}$ فاصلهٔ میان دو قطار چند متر است؟

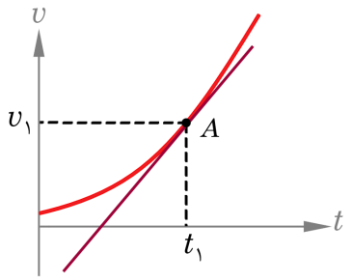
ب) در لحظه‌ای که قطار A متوقّف شده است، تندی قطار B چه‌قدر است؟ در این لحظه، فاصلهٔ دو قطار از هم چند متر است؟

پ) حداقل فاصلهٔ دو قطار از هم چند متر خواهد شد؟



- **شتاب متوسط:** با توجّه به تعریف شتاب متوسط، با معلوم بودن سرعت متحرّک در هر لحظهٔ دلخواه، می‌توانیم مقدار آن را در هر بازهٔ زمانی، از روی نمودار تعیین نماییم.

تعبیر هندسی شتاب متوسط در یک بازهٔ زمانی به صورت شیب پاره‌خطی که نقاط متناظر با آن دو لحظه، روی نمودار را به هم متّصل می‌کند، بیان می‌شود.

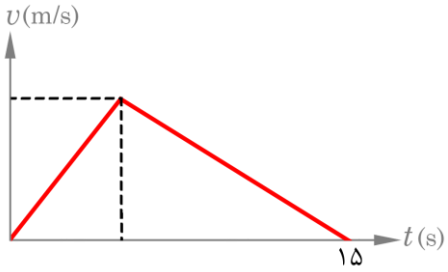


- **شتاب لحظه‌ای:** در تعریف شتاب لحظه‌ای، دیدیم که $a=\frac{dv}{dt}$ است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت: شتاب متحرک در هر لحظه، برابر شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان، در آن لحظه است.

نکته: در اینجا نیز همواره قبل از توقف (قبل از محل برخورد نمودار سرعت ـ زمان با محور زمان) علامت سرعت و شتاب مخالف یکدیگر و حرکت *کند شونده* و پس از آن، حرکت *تندشونده* است.

مثال ۴۳

نمودار سرعت ـ زمان متحرّکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. اگر سرعت متوسط متحرّک در کلّ زمان حرکت $۲۰\frac{m}{s}$ و شتاب در حرکت تند شونده دو برابر اندازهٔ شتاب در مرحلهٔ کند شونده باشد، ...



الف) بیشینهٔ سرعت متحرّک چقدر است؟

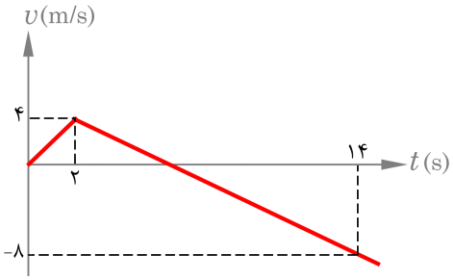
ب) شتاب حرکت در هر مرحله را بیابید.

پ) سرعت متوسط در نیمهٔ نخست حرکت، چند برابر سرعت متوسط در نیمهٔ دوم حرکت است؟

ت) نمودار شتاب ـ زمان را برای این متحرک رسم کنید.

مثال ۴۴

متحرّکی روی محور x حرکت می‌کند و نمودار سرعت ـ زمان آن مطابق شکل مقابل است.



الف) متحرّک در ۱۴ ثانیهٔ اوّل چه مدّت در خلاف جهت محور xها حرکت کرده است؟

ب) سرعت متوسط متحرک در مدتی که در خلاف جهت محور xها حرکت می‌کرده است را تعیین کنید.

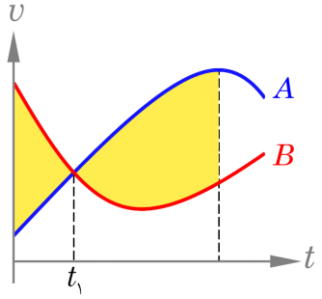
پ) سرعت متوسط متحرک در مدتی که در جهت مثبت محور x حرکت می‌کرده، چقدر است؟

ت) سرعت متوسط متحرّک در کلّ این مدت (۱۴ ثانیهٔ اول حرکت) چه‌قدر است؟

ث) آیا سرعت متوسط در کل حرکت، میانگین سرعت متوسط در بازه‌های زمانی بیان شده در قسمت‌های الف و ب است؟

نکته: با توجه به اینکه مساحت سطح زیر نمودار سرعت ـ زمان در هر بازهٔ زمانی بیانگر جابه‌جایی متحرک در آن بازهٔ زمانی است، می‌توان نتیجه گرفت:

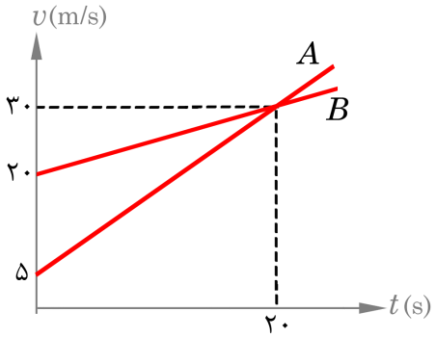
- مساحت سطح بین نمودارهای سرعت ـ زمان، برای دو متحرک که روی خط راست حرکت می‌کنند، بیانگر جابه‌جایی دو متحرک نسبت به یکدیگر است (چرا؟).



در این حالت، از لحظهٔ شروع حرکت تا لحظه‌ای که سرعت دو متحرک برابر می‌شود (لحظهٔ t_1 در شکل مقابل)، متحرکی که سرعت بیشتری دارد، نسبت به متحرک دیگر، جابه‌جایی بیشتری خواهد داشت و پس از آن، متحرک دیگر که سرعت بیشتری پیدا می‌کند، جابه‌جایی بیشتری دارد و مسافت عقب افتاده را به تدریج جبران خواهد کرد!!

- بیشترین (و گاهی اوقات، کمترین!) فاصلهٔ میان دو متحرک، تا قبل از به هم رسیدن، در لحظه‌ای اتفاق می‌افتد که سرعت دو متحرک با یکدیگر برابر شود (چرا؟)

◈ مثال ۴۵



دو متحرّک A و B که نمودار سرعت ـ زمان آن‌ها مطابق شکل است، در $t=۰$ از کنار هم عبور می‌کنند.

الف) در چه لحظه‌ای مجدداً دو متحرّک به هم می‌رسند؟ در این لحظه فاصلهٔ دو متحرک تا نقطهٔ شروع حرکت چند متر است؟

ب) بیشترین فاصلهٔ میان دو متحرک تا قبل از رسیدن به هم چقدر است؟

ب) در لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند، ...

- اختلاف سرعت آنها چند متر بر ثانیه است؟
- سرعت هرکدام از دو متحرک را تعیین کنید.

ت) فاصلهٔ میان دو متحرک را در هر کدام از لحظات زیر تعیین کنید:

- لحظهٔ $t=۱۲\,\mathrm{s}$.
- لحظهٔ $t=۳۰\,\mathrm{s}$.

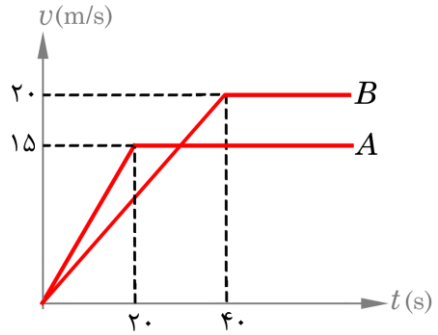
پ) چه مدت فاصلهٔ میان دو متحرک کمتر از $۵۴\,\mathrm{m}$ است؟

مثال ۴۶

نمودار سرعت ـ زمان دو متحرّک A و B، که روی محور x حرکت می‌کنند، مطابق شکل مقابل است. اگر در لحظهٔ $t=0$، متحرک A، ۲۰ متر جلوتر از متحرک دیگر باشد، ...

الف) در چه لحظه‌ای دو متحرّک به هم می‌رسند؟

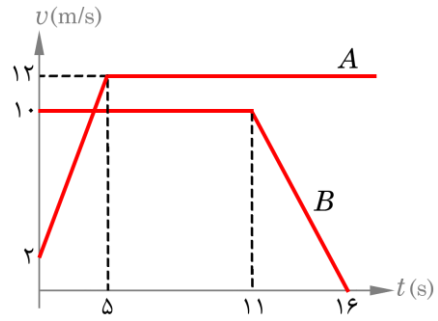
ب) تا قبل از رسیدن دو متحرک به هم، بیشترین فاصلهٔ میان آنها چند متر است؟



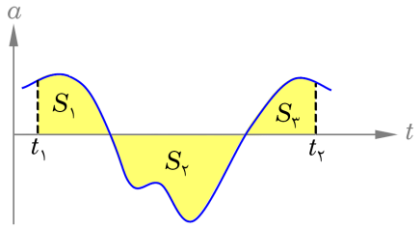
مثال ۴۷

کنکور سراسری: ریاضی ۹۰

نمودار سرعت ـ زمان دو متحرّک A و B، که روی محور x حرکت می‌کنند، مطابق شکل مقابل است. اگر در لحظهٔ $t=0$، هر دو متحرّک در $x=0$ قرار داشته باشند، چند ثانیه پس از آن، دو متحرّک به هم می‌رسند؟



پ. نمودار شتاب ـ زمان



- **تغییرات سرعت:** می‌توان نشان داد مساحت بین نمودار شتاب ـ زمان و محور زمان در یک بازهٔ زمانی، برابر تغییرات سرعتِ متحرّک در آن بازهٔ زمانی است. یعنی:

$$\Delta v = S_1 - S_2 + S_3 \pm \cdots \qquad (۱۳-۱۰)$$

نکته: *فقط* با در اختیار داشتن نمودار شتاب ـ زمان یک متحرّک، نمی‌توان اطّلاعی در مورد مکان، جابه‌جایی، مسافت طی شده، سرعت متوسط، سرعت لحظه‌ای، تندی متوسط، تندی لحظه‌ای متحرّک در لحظات و بازه‌های زمانی مختلف به دست آورد.

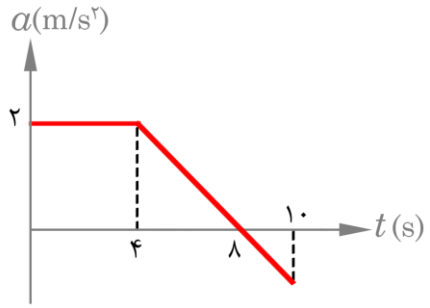
- **شتاب متوسط:** به کمک تعریف شتاب متوسط، می‌توان مقدار این کمیّت را در هر بازهٔ زمانی دلخواه و با استفاده از مساحت زیر نمودار شتاب ـ زمان، تعیین کرد.

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{S_{a-t}}{\Delta t} \qquad (۱۴-۱۰)$$

- **شتاب لحظه‌ای:** حداقل انتظاری که از این نمودار می‌رود، تعیین شتاب متحرّک در لحظات مختلف است!

مثال ۴۸

نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است.



الف) اگر سرعت متحرک در لحظهٔ $t=۱۰\,\mathrm{s}$ برابر $۱۵\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ باشد، سرعت اولیهٔ آن چند متر بر ثانیه بوده است؟

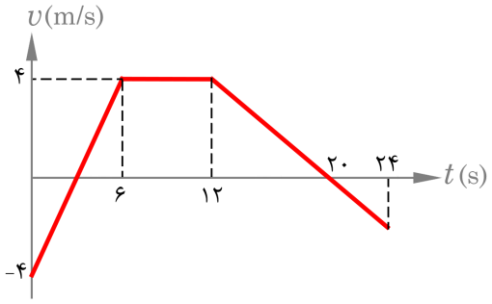
ب) شتاب متوسط متحرک در ۱۰ ثانیهٔ نخست حرکت را تعیین کنید.

نکته: به کمک نمودار مکان ـ زمان، می‌توان نمودار سرعت ـ زمان را برای متحرک رسم نمود. برای این کار کافی است، بتوانیم شیب خطوط مماس بر نمودار مکان ـ زمان را در لحظات مختلف تعیین نماییم. هر چند این کار در حالت کلّی دشوار به نظر می‌رسد، امّا برای حالت‌هایی که در حال بررسی حرکت یکنواخت، یا حرکت با شتاب ثابت هستیم (با توجّه به روابط موجود)، کار دشواری نخواهد بود.

به همین ترتیب، می‌توان به کمک شیب خط مماس بر نمودار، نمودار شتاب ـ زمان را از روی نمودار سرعت ـ زمان استخراج کرد.

مثال ۴۹

نمودار سرعت ـ زمان متحرّکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است.



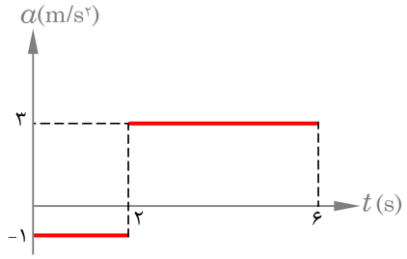
الف) نمودار شتاب ـ زمان را برای آن رسم نمایید.

ب) سرعت متوسط متحرک در مدتی که در جهت مثبت محور x حرکت می‌کرده است را تعیین کنید.

پ) تندی متوسط متحرک در ۲۴ ثانیهٔ اول حرکت چقدر است؟

نکته: از روی نمودار شتاب ـ زمان نیز، *با معلوم بودن شرایط اولیه*، می‌توان نمودار سرعت ـ زمان را رسم کرد. در این حالت، از این نکته استفاده می‌شود که تغییرات سرعت در هر بازهٔ زمانی دلخواه برابر مساحت زیر نمودار شتاب ـ زمان، در همان بازهٔ زمانی است. $(\Delta v = S_{v-t})$

مثال ۵۰



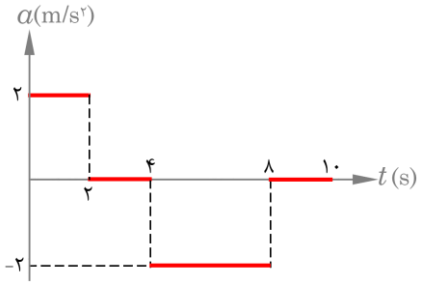
نمودار شتاب ـ زمان متحرّکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. اگر سرعت اولیهٔ متحرّک $-۳\frac{\text{m}}{\text{s}}$ باشد، ...

الف) سرعت متوسط متحرک در مدتی که در جهت مثبت محور x حرکت می‌کرده، چقدر است؟

ب) در چه لحظه‌ای متحرک متوقف می‌شود؟

پ) نوع حرکت را در لحظات $t_۱ = ۳\,\text{s}$ و $t_۲ = ۴\,\text{s}$ تعیین نمایید.

مثال ۵۱



نمودار شتاب ـ زمان متحرّکی که از حال سکون، حرکت خود را آغاز کرده، مطابق شکل است.

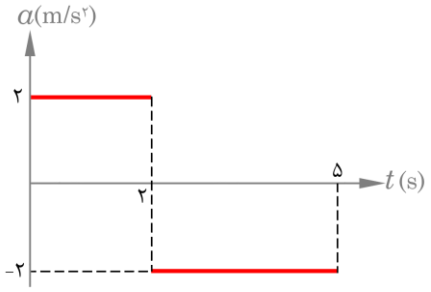
الف) نمودار سرعت ـ زمان را برای آن رسم نمایید.

ب) حداکثر فاصلهٔ متحرک تا نقطهٔ شروع حرکت چند متر است؟

پ) سرعت متوسط متحرک در مدت ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت چقدر است؟

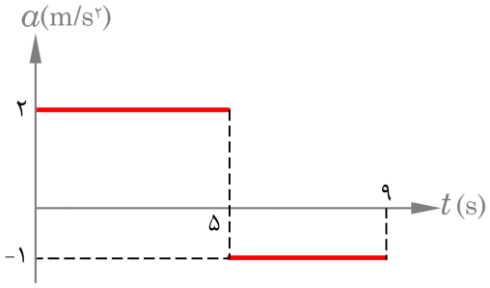
مثال ۵۲

نمودار شتاب ـ زمان متحرّکی در مسیر مستقیم، مطابق شکل است. اگر سرعت متوسط متحرک در این مدّت $۶/۴\ \frac{m}{s}$ باشد، سرعت اوّلیه آن چند متر بر ثانیه است؟ ($v_۰ > ۲\ \frac{m}{s}$)



مثال ۵۳

نمودار شتاب ـ زمان متحرّکی که در مسیری مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل است. اگر سرعت اولیهٔ متحرک $-۶\ \frac{m}{s}$ باشد، ...



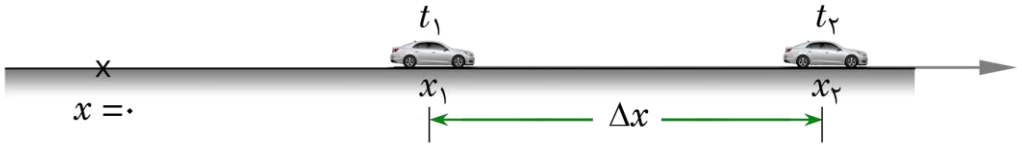
الف) نمودار سرعت ـ زمان را برای این متحرک رسم کنید.

ب) چند ثانیه قبل از توقف، متحرک به نقطهٔ شروع حرکت می‌رسد؟

پ) بیشینهٔ فاصلهٔ متحرک تا نقطهٔ شروع حرکت چند متر است؟

۱۰-۳. حرکت با سرعت ثابت (حرکت یکنواخت)

حرکت یکنواخت، حرکتی است بر روی خط راست که در آن، سرعت متوسط در تمامی بازه‌های زمانی دلخواه با هم برابر است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که سرعت لحظه‌ای متحرّک همواره ثابت و در نتیجه شتاب در این حرکت صفر است ($a=0$).



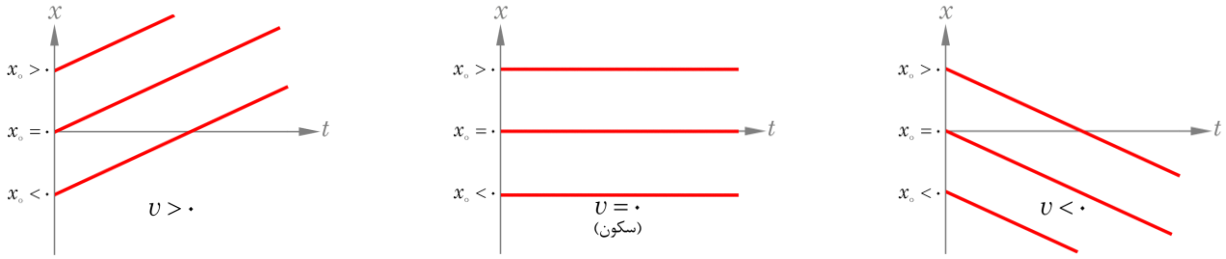
با توجّه به تعریف حرکت یکنواخت، می‌توان نتیجه گرفت $v=v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ است و بنابراین برای این نوع حرکت داریم:

$$\Delta x = v\Delta t \qquad (۱۵-۱۰)$$

$$x = vt + x_0 \qquad (۱۶-۱۰)$$

معادلهٔ اخیر را معادلهٔ حرکتِ یکنواخت می‌نامند. همانگونه که مشاهده می‌شود، این معادله از درجهٔ اول و یک معادلهٔ خطی نسبت به زمان است.

✍ **نکته:** با توجه به خطی بودن معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت یکنواخت روی خط راست، می‌توان نتیجه گرفت که نمودارهای حرکت، در حرکت یکنواخت به صورت زیر است:



◈ مثال ۵۴

جسمی که با سرعت ثابت بر محور xها حرکت می‌کند، در لحظهٔ $t_1=5\,s$ در مکان $x_1=24\,m$ و در لحظهٔ $t_2=7\,s$ در مکان $x_2=16\,m$ قرار دارد.

الف) معادلهٔ حرکت جسم در SI را بنویسید.

ب) نمودار مکان ـ زمان را برای این متحرک رسم کنید.

پ) متحرّک در چه لحظاتی در فاصلهٔ ۲۲ متری مبداء قرار دارد؟

نکته: در حرکت با تندی ثابت روی خط راست، می‌توان مسافت طی شده را نیز از رابطه‌ای شبیه رابطهٔ ۱۰-۱۵ و به صورت $l = |v|\Delta t$ تعیین کرد.

مثال ۵۵

دو دوچرخه‌سوار با سرعت‌های ثابت $10\frac{m}{s}$ و $8\frac{m}{s}$ به طور همزمان از یک نقطه، به سمت مقصد مشترکی حرکت می‌کنند. اگر حداکثر فاصلهٔ میان آن‌ها در طول مسیر و تا لحظهٔ رسیدن متحرّک سریع‌تر به مقصد، $160\,m$ باشد، ...

الف) فاصلهٔ میان مبدأ و مقصد چند متر است؟

ب) دوچرخه‌سوار دوم با چند ثانیه تاخیر به مقصد می‌رسد؟

پ) نمودار مکان ـ زمان را برای این دو متحرک رسم کنید.

مثال ۵۶

۲۰ ثانیه طول می‌کشد تا قطاری به طول $150\,m$ که با تندی ثابت $30\frac{m}{s}$ در حرکت است، به طور کامل از روی پلی عبور نماید.

الف) طول پل چند متر است؟

ب) چه مدت تمام قطار به طور کامل روی پل قرار داشته است؟

مثال ۵۷

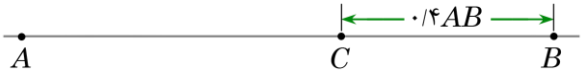
دو ترن که تندی یکی سه برابر دیگری است، از دو شهر به فاصلهٔ $800\,km$، در ساعت ۸ صبح رو به هم حرکت می‌کنند و ساعت ۱۲ ظهر به هم می‌رسند.

الف) اختلاف زمانی رسیدن ترن‌ها به مقصدشان چند ساعت است؟

ب) ترن کُندتر، در چه ساعتی به شهر دیگر می‌رسد؟

پ) سرعت هر قطار را تعیین کنید.

مثال ۵۸



دو متحرّک، هم زمان از نقاط A و B با تندی‌های ثابت به سمت یکدیگر حرکت می‌کنند و در نقطهٔ C به هم می‌رسند. ۴۰ ثانیه پس از این، متحرّک اوّل به نقطهٔ B می‌رسد. چند ثانیه طول می‌کشد تا متحرّک دوّم از C به A برسد؟

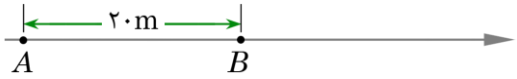
مثال ۵۹

راننده‌ٔ خودرویی فاصلهٔ میان دو شهر را باید در مدت معینی طی کند. اگر او با تندی ثابت $120\,\frac{km}{h}$ براند، ۲۰ دقیقه زودتر به مقصد می‌رسد و اگر با تندی $80\,\frac{km}{h}$ حرکت کند، ۲۰ دقیقه دیرتر می‌رسد. برای آنکه به موقع برسد، تندی حرکت او باید چند کیلومتر بر ساعت باشد؟

نکته: اگر دو متحرک با اختلاف زمانی شروع به حرکت نمایند، برای بررسی آنها لازم است یک مبداء زمان انتخاب شده و معادلات حرکت هر دو متحرک نسبت به آن نوشته شود. بنابراین اگر اختلاف زمانی شروع حرکت آنها Δt باشد، مبداء زمان را لحظهٔ شروع حرکت متحرک اول انتخاب می‌کنیم و معادلات حرکت متحرک دوم را با زمان $t' = t - \Delta t$ در نظر می‌گیریم!

مثال ۶۰

مطابق شکل، متحرک (۱) از نقطهٔ A با سرعت $۱۲\frac{\text{m}}{\text{s}}$ و ۴ ثانیه بعد متحرک (۲) از نقطهٔ B با سرعت $۲۰\frac{\text{m}}{\text{s}}$ می‌گذرند و در یک جهت به دنبال هم حرکت می‌کنند. در چه فاصله‌ای از نقطهٔ A دو متحرک به هم می‌رسند؟



۱۰-۴. حرکت نسبی (۱)

در بررسی حرکت یکنواخت دو یا چند جسم که هم‌زمان در حرکت هستند، علاوه بر آنکه می‌توانیم برای هر دو متحرک، جداگانه معادله بنویسیم و آن را حل نماییم، می‌توانیم معادلات حرکت را *نسبت به یکی از متحرک‌ها* نیز مورد استفاده قرار دهیم.

برای این منظور کافی است یکی از متحرک‌ها را به دلخواه ساکن در نظر گرفته و اطلاعات حرکت آن را به جسم یا اجسام دیگر منتقل نماییم! مثلاً برای تعیین سرعت نسبیِ متحرک B نسبت به متحرکی مانند A، باید تمام سرعت متحرک A را از سرعت B کم کنیم. یعنی می‌توان نوشت:

سرعت نسبی متحرک B نسبت به A: $v_r = v_B - v_A$

مثال ۶۱

دو قطار به طول‌های ۱۰۰ متر و ۲۰۰ متر به ترتیب با تندی‌های ثابت $۲۰\frac{\text{m}}{\text{s}}$ و $۳۰\frac{\text{m}}{\text{s}}$ به طرف هم در حال حرکت هستند.

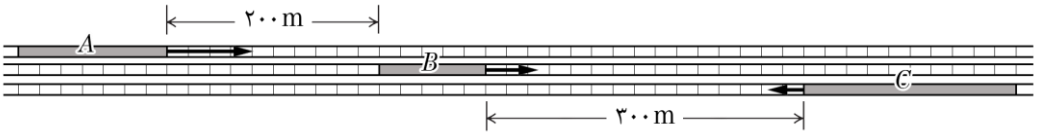
الف) چه مدت طول می‌کشد تا دو قطار به طور کامل از کنار هم عبور کنند؟

ب) مسافر قطار اول، چه مدت قطار دوم را مقابل خود می‌بیند؟

پ) مسافر قطار دوم، چه مدت قطار اول را مقابل خود می‌بیند؟

مثال ۶۲

مطابق شکل سه قطار به طول‌های $l_A = ۱۴۰\,\text{m}$، $l_B = ۱۰۰\,\text{m}$ و $l_C = ۲۴۰\,\text{m}$ به ترتیب با تندی‌های ثابت $۴۰\frac{\text{m}}{\text{s}}$، $۲۵\frac{\text{m}}{\text{s}}$ و $۱۰\frac{\text{m}}{\text{s}}$ در جهت‌های نشان داده شده در حرکت هستند.



الف) چه مدت طول می‌کشد تا قطار A به طور کامل از کنار قطار B عبور کند و از آن ۱۰ متر جلو بیفتد؟

ب) چه مدت قطارهای B و C به طور کامل در کنار هم قرار دارند.

پ) چه مدت فاصلهٔ میان قطارهای A و C کمتر از ۲۰۰ متر است؟

نکته: گاهی اوقات حرکت یکی از متحرک‌ها روی دیگری تأثیر دارد. مانند حالتی که شخصی روی یک پله‌برقی، شروع به حرکت می‌کند. در اینصورت اگر حرکت آنها در یک جهت باشد، سرعت شخص نسبت به زمین، مجموع سرعت شخص نسبت به پله‌برقی و سرعت خود پله برقی است.

مثال ۶۳

شناگری وقتی هم‌جهت با جریان آب یک رودخانه شنا می‌کند، فاصلهٔ ۶۰۰ متری میان دو نقطه را در مدت ۱۰۰ ثانیه طی می‌کند. اما زمانی که در خلاف جریان آب شنا می‌کند، همان مسیر را در مدت ۳۰۰ ثانیه می‌پیماید.

الف) تندی شناکردن این شخص در آب ساکن و تندی حرکت آب رودخانه چقدر است؟

ب) اگر این شناگر تندی شناکردن خود را ۲۵٪ افزایش دهد، زمان برگشت چند برابر زمان رفت خواهد شد؟

۱۰-۵. حرکت با شتاب ثابت

هرگاه اندازه و جهت شتاب متحرّکی که روی خط راست حرکت می‌کند، تغییر نکند، حرکت را حرکت با شتاب ثابت می‌نامیم. در این صورت می‌توان گفت سرعت متحرک با آهنگ ثابتی تغییر می‌کند (کاهش یا افزایش می‌یابد).

بنابراین در این حرکت، شتاب متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه، با شتاب لحظه‌ای برابر است و می‌توان نوشت:

$$a = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\Delta v = a\,\Delta t \qquad (۱۰-۱۷)$$

و اگر این رابطه را از ابتدای حرکت تا لحظهٔ دلخواه t به کار بریم خواهیم داشت:

$$v = a\,t + v_{\circ} \qquad (۱۰-۱۸)$$

در این رابطه، $v_{\circ}$ سرعت اولیهٔ متحرک (سرعت در لحظهٔ $t = ۰$) است. این معادله را معادلهٔ سرعت ـ زمان می‌نامند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، در این رابطه، x وجود ندارد. لذا این معادله، به معادلهٔ مستقل از مکان نیز شناخته می‌شود. این معادله معمولاً در مواردی به کار می‌رود که مکان متحرّک جزو معلومات و مجهولات مورد نظر نباشد!

◈ مثال ۶۴

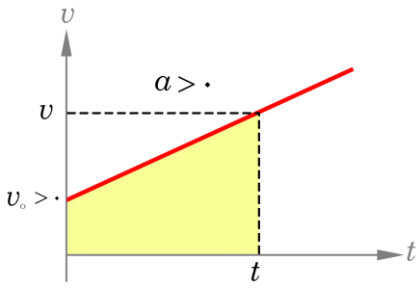
متحرکی با شتاب ثابت در مسیر مستقیم در حرکت است. اگر سرعت آن در دو لحظه $t_۱ = ۴\,s$ و $t_۲ = ۶\,s$ به ترتیب $v_۱ = ۱۰\,\frac{m}{s}$ و $v_۲ = ۱۴\,\frac{m}{s}$ باشد، ...

الف) شتاب و سرعت اولیّهٔ متحرّک را به دست آورید.

ب) معادلهٔ سرعت ـ زمان را برای آن بنویسید.

پ) نمودار سرعت ـ زمان را برای آن رسم کنید.

ت) این متحرک در سه ثانیهٔ اول حرکت چه مسافتی را پیموده است؟



نمودار سرعت ـ زمان برای جسمی که با شتاب ثابت روی مسیر مستقیم حرکت می‌کند، یک خط راست است. (شکل مقابل، این نمودار را با فرض $a>0$ و $\upsilon_0>0$ نشان می‌دهد.)

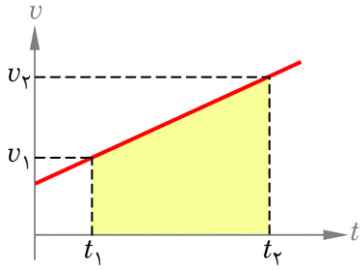
از سوی دیگر می‌دانیم مساحت سطح زیر نمودار سرعت ـ زمان در هر بازهٔ زمانی دلخواه، جابجایی متحرک در آن بازهٔ زمانی را نشان می‌دهد. بنابراین داریم:

$$\Delta x = S_{\upsilon-t} = \frac{\upsilon+\upsilon_0}{2}t$$

بنابراین میوان جابه‌جایی متحرک در ثانیهٔ اول حرکت را از رابطهٔ زیر تعیین کرد:

$$x - x_0 = \frac{\upsilon+\upsilon_0}{2}t \qquad (۱۹-۱۰)$$

این رابطه را ـ که رابطه‌ای بسیار مفید است! ـ رابطهٔ مستقل از شتاب می‌نامند و شبیه رابطه‌های قبلی، زمانی استفاده می‌شود که شتاب، جزو معلومات و مجهولات مسأله نباشد!



نکته: با توجه به نمودار سرعت ـ زمان نشان داده شده در شکل مقابل، نتیجه می‌گیریم که رابطهٔ بالا را می‌توان برای هر دو نقطهٔ دلخواه نیز به صورت زیر مورد استفاده قرار داد:

$$\Delta x = \frac{\upsilon_1+\upsilon_2}{2}\Delta t \qquad (۲۰-۱۰)$$

نکته: با توجه به تعریف سرعت متوسط، می‌توان نتیجه گرفت در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه، میانگین سرعت در ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی مورد نظر است. یعنی:

$$\upsilon_{av} = \frac{\upsilon_1+\upsilon_2}{2} \qquad (۲۱-۱۰)$$

مثال ۶۵

متحرّکی از حال سکون با شتاب ثابت به حرکت در می‌آید و پس از ۱۰ ثانیه سرعتش به $16\frac{m}{s}$ می‌رسد. سپس به مدّت ۲۰ ثانیه سرعتش به طور یکنواخت کاهش می‌یابد تا به $8\frac{m}{s}$ برسد.

الف) تندی متوسط متحرک در این مدت چند متر بر ثانیه است؟

ب) نمودار سرعت ـ زمان را برای این متحرک رسم کنید.

پ) اگر متحرک با همان آهنگ قبلی از سرعت خود بکاهد، پس از چه مدت دیگر متوقف خواهد شد؟

ت) سرعت متوسط متحرک در کل حرکت چقدر است؟

مثال ۶۶

متحرّکی با شتاب ثابت بر مسیر مستقیمی در حرکت است. اگر سرعت این متحرّک در مدّت ۱۵ دقیقه از $60\ \frac{km}{h}$ به $140\ \frac{km}{h}$ برسد، متحرّک در این مدّت چند کیلومتر را پیموده است؟

اکنون اگر به جای v ، مقدار آن را از معادلهٔ ۱۰-۱۷، قرار دهیم، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\Delta x = \frac{(at+v_0)+v_0}{2}t \quad \Rightarrow \quad x-x_0 = \frac{at^2+2v_0t}{2}$$

و در نهایت، برای جسمی که با شتاب ثابت در حرکت است، می‌توان معادلهٔ مکان ـ زمان یا معادلهٔ حرکت را به صورت زیر نوشت:

$$x = \frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \qquad (۱۰-۲۲)$$

همانگونه که به وضوح دیده می‌شود، در این رابطه، v (سرعت نهایی) وجود ندارد؛ لذا این رابطه‌ها را معادلهٔ مستقل از سرعت نهایی نیز می‌نامند و زمانی از آن استفاده می‌شود که v، جزو معلومات و مجهولات مسأله نباشد!

مثال ۶۷

متحرّکی با شتاب ثابت در حرکت است و در لحظات $t_1=2\,s$ و $t_2=4\,s$ به ترتیب در نقاط $x_1=18\,m$ و $x_2=47\,m$ قرار دارد. اگر $x_0=-5\,m$ باشد، ...

الف) شتاب حرکت و سرعت اولیهٔ متحرک را تعیین کنید.

ب) نمودارهای مکان ـ زمان و سرعت ـ زمان را برای این متحرک رسم نمایید.

مثال ۶۸

متحرّکی از حال سکون با شتاب ثابت به حرکت در می‌آید. نسبت زمان لازم برای طی $۱۰۰\,m$ اول به زمان لازم برای طی $۹۶\,m$ بعدی را بیابید.

مثال ۶۹

در یک مسیر مستقیم، اتومبیلی با سرعت ثابت $۲۰\frac{m}{s}$ در حرکت است. $۳۶\,m$ جلوتر، اتومبیل دیگری با شتاب ثابت $۲\frac{m}{s^۲}$ از حال سکون در همان جهت به راه می‌افتد. در این حرکت، اتومبیل‌ها دو بار از هم سبقت می‌گیرند.

الف) فاصلهٔ زمانی میان این دو سبقت چند ثانیه است؟

ب) دو نقطهٔ محل سبقت، چند متر از هم فاصله دارند؟

پ) نمودار مکان ـ زمان را برای این دو متحرک در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

ت) در چه لحظه‌ای سرعت این دو اتومبیل برابر می‌شود؟ در این لحظه فاصلهٔ میان آنها چند متر است؟

مثال ۷۰

اتومبیلی با سرعت ثابت $۴\frac{m}{s}$ بر مسیری مستقیم در حرکت است. ناگهان راننده به مدّت $۶s$ پای خود را روی پدالِ گاز فشار می‌دهد که در نتیجهٔ آن، سرعت اتومبیل با آهنگ ثابتی افزایش می‌یابد. اگر اتومبیل در ۲ ثانیهٔ آخر مدّت یاد شده، $۳۶m$ جابه‌جا شود، شتاب متحرّک را بیابید.

اکنون با حذف پارامتر t (زمان) از معادلات بیان شده، می‌توان به معادلهٔ مستقل از زمان دست یافت.

$$\left.\begin{matrix} x-x_{\circ}=\frac{v+v_{\circ}}{۲}t \\ t=\frac{v-v_{\circ}}{a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x-x_{\circ}=\frac{v+v_{\circ}}{۲}\times\frac{v-v_{\circ}}{a}$$

$$v^{۲}-v_{\circ}^{۲}=۲a\left(x-x_{\circ}\right) \qquad (۱۰-۲۳)$$

مثال ۷۱

متحرّکی روی محور x ها از مکان $x_{\circ}=+۴m$ با سرعت اولیهٔ $۸\frac{m}{s}$ و شتاب ثابت، به حرکت در می‌آید و در مکان $x=+۷/۵m$ سرعتش به $۶\frac{m}{s}$ می‌رسد.

الف) معادلهٔ حرکت این متحرّک در SI را بنویسید.

ب) در چه لحظه‌ای متحرک در فاصلهٔ ۱۰ متری مبداء قرار دارد؟

نکته: رابطه ۱۰-۲۳ را نیز می‌توان برای هر دو نقطهٔ دلخواه استفاده کرد:

$$v_{۲}^{۲}-v_{۱}^{۲}=۲a\,\Delta x \qquad (۱۰-۲۴)$$

مثال ۷۲

گلوله‌ای با تندی $۴۰\frac{m}{s}$ به تنهٔ درختی به ضخامت $۲۰cm$ برخورد کرده و با تندی $۱۰\frac{m}{s}$ از آن خارج می‌شود. اگر شتاب حرکت گلوله در داخل تنهٔ درخت ثابت فرض شود، ...

الف) اندازهٔ این شتاب را بیابید.

ب) این گلوله چه مدت در تنهٔ درخت حرکت کرده است؟

پ) تندی گلوله وقتی ۵ سانتی‌متر درون درخت وارد شده، چقدر است؟

ت) مبدأ مختصات را نقطهٔ ورود گلوله به تنهٔ درخت در نظر بگیرید و نمودار سرعت ـ جابه‌جایی را برای این گلوله رسم کنید.

مثال ۷۳

جسمی با شتاب ثابت بر روی یک خط راست حرکت می‌کند و با سرعت‌های $۲\frac{m}{s}$ و $۳\frac{m}{s}$ به ترتیب از مکان‌های $x_۱ = ۱m$ و $x_۲ = ۱۱m$ عبور می‌کند. این متحرّک با چه سرعتی از مکان $x_۳ = ۴۳\,m$ می‌گذرد؟

مثال ۷۴

جسمی با شتاب ثابت بر روی یک خط راست حرکت می‌کند و با سرعت‌های $۱۰\frac{m}{s}$ و $۳۰\frac{m}{s}$ به ترتیب از نقاط A و B عبور می‌کند. سرعت جسم در هنگام عبور از وسط پاره خط AB چه‌قدر است؟

مثال ۷۵

دو قطار به ترتیب با تندی‌ها $۲۰\frac{m}{s}$ و $۳۰\frac{m}{s}$ روی یک ریل به طرف یکدیگر در حرکت هستند و در لحظه‌ای که فاصلهٔ میان آنها $۱۵۰m$ می‌شود، لوکوموتیوران‌ها به ترتیب با شتاب‌های به بزرگی $۴\frac{m}{s^۲}$ و $۵\frac{m}{s}$ ترمز می‌کنند.

الف) آیا این دو قطار به یکدیگر برخورد خواهند کرد؟

ب) اگر به یکدیگر برخورد نمی‌کنند، حداقل فاصلهٔ میان آنها چند متر خواهد شد و اگر برخورد می‌کنند، سرعت هرکدام در هنگام برخورد چقدر است؟

نکته: متحرّکی را در نظر بگیرید که با سرعت $v_۰$ در حال حرکت روی خط راست است که ناگهان حرکت کندشوندهٔ با شتاب a انجام می‌دهد و پس از طی زمان Δt_s و پیمودن مسافت Δx_s متوقف می‌شود. در این صورت زمان توقّف و مسافت قبل از توقف را می‌توان از روابط زیر به دست آورد:

$$v = at + v_۰ \xrightarrow{v=۰} ۰ = at_s + v_۰$$

$$\Delta t_s = \frac{v_۰}{|a|} \quad \text{(زمان توقف)} \qquad (۱۰-۲۵)$$

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x \xrightarrow{v=۰} ۰ - v_۰^۲ = ۲ax_s$$

$$\Delta x_s = \frac{v_۰^۲}{|۲a|} \quad \text{(مسافت توقف)} \qquad (۱۰-۲۶)$$

و از ترکیب دو رابطهٔ اخیر می‌توان به رابطهٔ زیر بین زمان و مسافت توقف دست یافت:

$$\Delta x_s = \frac{۱}{۲}|a|\Delta t_s^{۲}$$

نکته: تعبیر فیزیکی رابطهٔ اخیر به این صورت است: می‌توان حرکت ذره‌ای که در نهایت متوقف می‌شود را به صورت وارونه بررسی کرد. به عبارت دیگر اگر از حرکت این ذره فیلم‌برداری کنیم و سپس آن را به صورت برعکس تماشا کنیم، ذره‌ای خواهیم دید که از حال سکون با همان شتاب، شروع به حرکت کرده است.

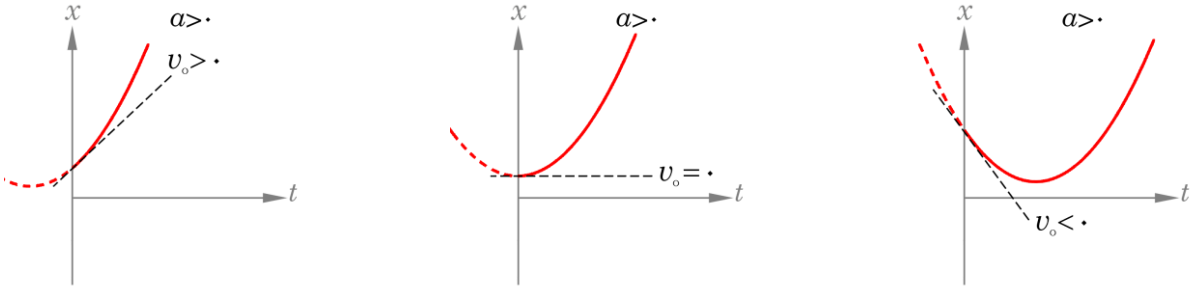
مثال ۷۶

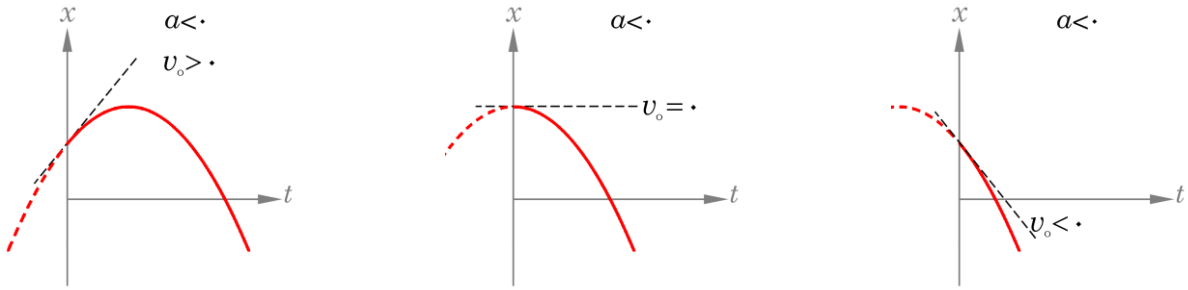
اتومبیلی با سرعت $۴۰\frac{km}{h}$ حرکت می‌کند و پس از ترمز کردن، با طی مسافت $۱۶m$ می‌ایستد. اگر این اتومبیل با سرعت $۲۵\frac{m}{s}$ حرکت کند و با همان شتاب ثابت ترمز نماید پس از طی چه مسافتی خواهد ایستاد؟

مثال ۷۷

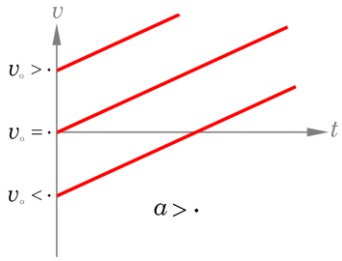
متحرّکی با سرعت $v_۰$ در حال حرکت بر روی خط راست است که ناگهان با شتاب $۲\frac{m}{s^۲}$ ترمز می‌نماید و بعد از گذشت $۲۰s$ متوقّف می‌شود. متحرّک در این مدّت چه مسافتی را پیموده است؟

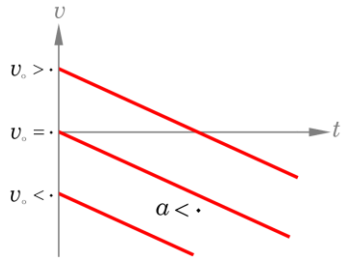
نکته: نمودارهای حرکت، در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، به صورت زیر است:





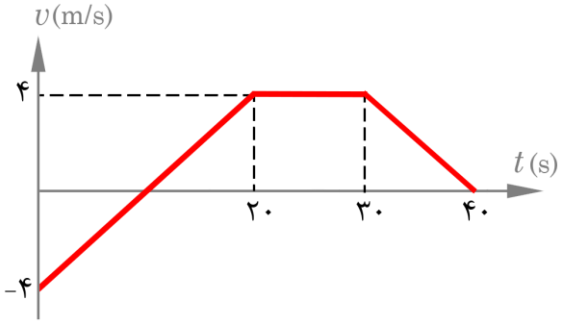
... و نمودارهای سرعت ـ زمان نیز، به صورت‌های زیر خواهند بود:





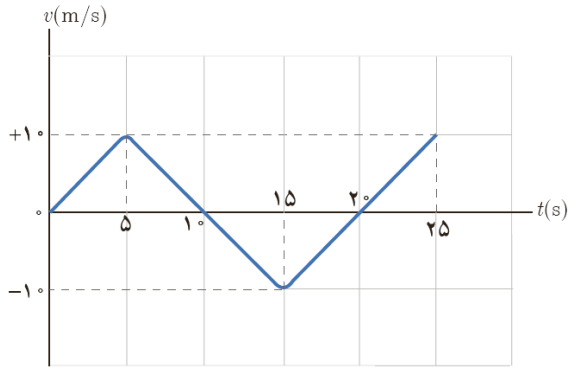
◈ مثال ۷۸

نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. اگر متحرک در لحظهٔ شروع حرکت در $x=۰$ قرار داشته باشد، نمودار های شتاب ـ زمان و مکان ـ زمان را برای آن رسم نمایید.



مثال ۷۹

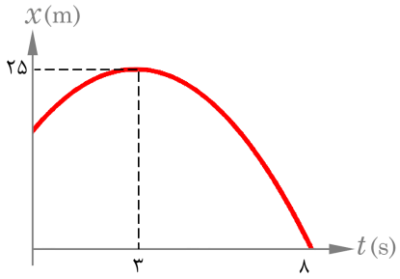
نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. اگر متحرک در لحظهٔ شروع حرکت در $x=0$ قرار داشته باشد، نمودارهای شتاب ـ زمان و مکان ـ زمان را برای آن رسم نمایید.



✍ **نکته:** *تنها* در صورتی از روی نمودار مکان ـ زمان می‌توان مقدار شتاب متحرک را تعیین کرد که حرکت *با شتاب ثابت* باشد. در این وضعیت، نمودار مکان ـ زمان متحرک یک *سهمی* است و برای تعیین شتاب، می‌توان از رابط ریاضی مربوط به رأس سهمی، تقارن آن و ... و یا معادلات حرکت با شتاب ثابت، به ویژه معادلات مستقل از شتاب و مستقل از مکان استفاده کرد.

مثال ۸۰

نمودار مکان ـ زمان متحرّکی که با شتاب ثابت، روی محور xها حرکت می‌کند، مطابق شکل است.

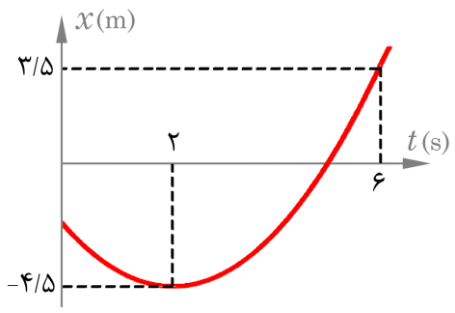


الف) معادلهٔ مکان ـ زمان را برای این متحرک بنویسید.

ب) نمودارهای سرعت ـ زمان و شتاب ـ زمان را برای آن رسم کنید.

مثال ۸۱

نمودار مکان ـ زمان متحرّکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، سهمی نشـان داده شده در شکل مقابل است.



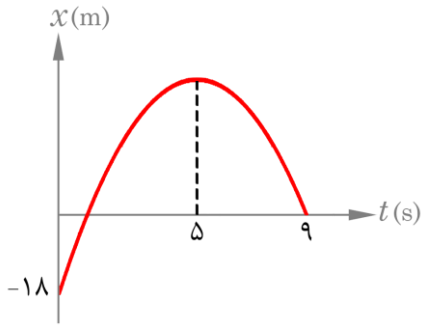
الف) سرعت اولیه و شتاب متحرّک را بیابید و معادلهٔ حرکت را برای آن بنویسید.

ب) این متحرک در چه لحظه‌ای از مبدأ مکان می‌گذرد؟

پ) نمودارهای سرعت ـ زمان و شتاب ـ زمان را برای آن رسم کنید.

مثال ۸۲

نمودار مکان ـ زمان متحرّکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، سهمی نشان داده شده در شکل مقابل است.

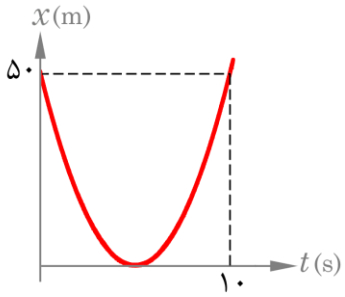


الف) سرعت اولیه و شتاب متحرّک را بیابید و معادلهٔ حرکت را برای آن بنویسید.

ب) تندی این متحرک در لحظه‌ای که متحرّک از مبدأ مکان می‌گذرد، چنـد متـر بـر ثانیـه است؟

مثال ۸۳

نمودار مکان ـ زمان متحرّکی که روی خط راست حرکت می‌کند، سهمی نشان داده شده در شکل مقابل است.

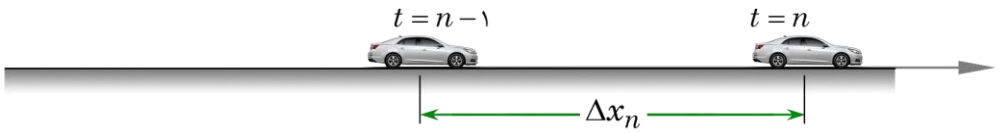


الف) سرعت اولیهٔ متحرک چند متر بر ثانیه است؟

ب) شتاب حرکت متحرک را تعیین کنید.

پ) در چه مکانی تندی متحرک $۲۴\frac{m}{s}$ می‌شود؟

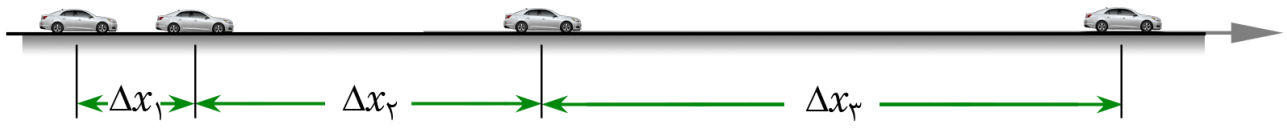
نکته: برای تعیین جابه‌جایی متحرّک در ثانیهٔ nاُم (Δx_n) باید مکان متحرّک در لحظهٔ $t=n-۱$ را از مکان متحرک در لحظهٔ $t=n$ کم کنیم.



اکنون اگر متحرّک با شتاب ثابت در حال حرکت باشد می‌توان نوشت:

$$\Delta x_n = x_n - x_{n-۱}$$
$$= \frac{۱}{۲}a\left[n^۲-(n-۱)^۲\right]-v_۰\left[n-(n-۱)\right]=\frac{۱}{۲}a(۲n-۱)+v_۰$$

$$\Delta x_n = a(n-۰/۵)+v_۰ \qquad (۲۷\text{-}۱۰)$$



مثال ۱۴

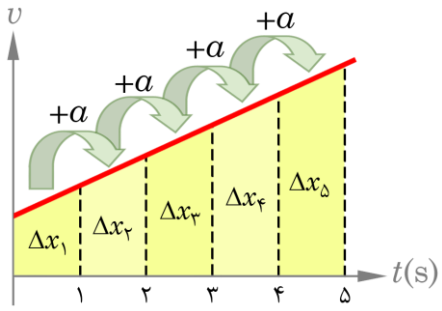
متحرّکی با شتاب ثابت در حرکت است و جابه‌جایی‌ها آن در ثانیهٔ هفتم حرکت، $6\,m$ بیش از جابه‌جایی آن در ثانیهٔ چهارم است. شتاب متحرّک را بیابید.

مثال ۱۵

جسمی که با شتاب ثابت بر روی یک خط راست در حرکت است، در ثانیهٔ سوم حرکت $12\,m$ و در ثانیهٔ هفتم، $20\,m$ جابه‌جا می‌شود. جابه‌جایی این جسم در ثانیهٔ پنجم و در ثانیهٔ دهم چند متر است؟

نکته: در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، جابه‌جایی در ثانیه‌های متوالی، یک تصاعد حسابی با قدر نسبت a (شتاب) تشکیل می‌دهند. یعنی اگر به جابه‌جایی در هر ثانیه، مقدار a را اضافه نماییم، جابه‌جایی در ثانیهٔ بعدی به‌دست می‌آید:

$$\Delta x_n - \Delta x_{n-1} = a \qquad (۲۸\text{-}۱۰)$$



با تعمیم نکتهٔ فوق، می‌توان به رابطهٔ زیر دست یافت:

$$a = \frac{\Delta x_m - \Delta x_n}{m-n}$$

مثال ۱۶

جسمی با شتاب ثابت، بر روی خط راست در حرکت است و در ثانیهٔ پنجم حرکت، $20\,m$ را می‌پیماید. جابه‌جایی متحرّک دربازهٔ زمانی $(3\,s, 6\,s)$ چند متر است؟

مثال ۸۷

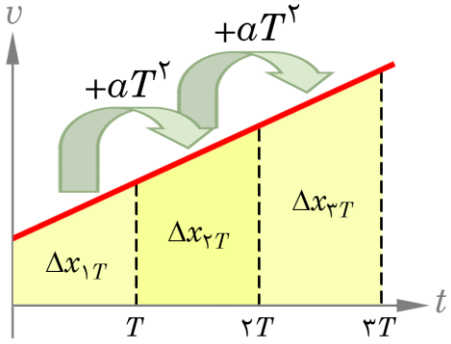
سرعت اولیهٔ متحرّکی که با شتاب ثابت بر روی خط راست حرکت می‌کند، $۱۵\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ است. مسافتی که این متحرّک درهر ثانیه می‌پیماید، $۳\,\mathrm{m}$ کمتر از مسافت ثانیهٔ قبل است.

الف) این متحرّک از مبدأ زمان تا لحظهٔ توقّف چه مسافتی را می‌پیماید؟

ب) سرعت متوسط و تندی متوسط این متحرک را از لحظهٔ شروع حرکت تا لحظهٔ $t=۱۰\,\mathrm{s}$ تعیین کنید.

نکته: برای جسمی که با شتاب ثابت روی خط راست حرکت می‌کند، می‌توان جابه‌جایی در T ثانیهٔ nاُم را از رابطهٔ زیر تعیین کرد:

$$\Delta x_{n,T}=aT^{۲}\left(n-۰/۵\right)+v_{۰}T \qquad (۲۹\text{-}۱۰)$$



از رابطهٔ بالا می‌توان نتیجه گرفت در حرکت با شتاب ثابتِ a، جابه‌جایی‌های طی شده در بازه‌های زمانی یکسانِ متوالیِ $\Delta t=T$، تشکیل یک دنبالهٔ عددی با قدر نسبت $aT^{۲}$ می‌دهند. (چرا؟)

مثال ۸۸

ذرّه‌ای با سرعت اولیه $۵\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ و با شتاب $۲\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^{۲}}$ بر روی خط راست در حرکت است. جابه‌جایی متحرّک در ۵ ثانیهٔ سوم حرکت چند متر بیشتر از جابه‌جایی آن در ۳ ثانیهٔ پنجم حرکت است؟

مثال ۸۹

متحرکی با شتاب ثابت بر روی خط راست در حرکت است. اگر این متحرک در ۳ ثانیهٔ اول حرکت ۲۲ متر و در ۳ ثانیهٔ دوم حرکت، ۴۶ متر جابه‌جا شده باشد، سرعت اولیه و شتاب حرکت آن را تعیین کنید.

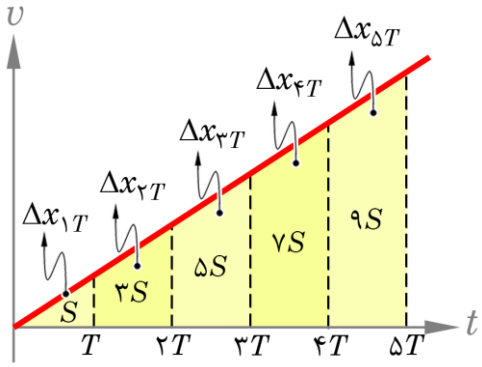
مثال ۹۰

معادلهٔ حرکت متحرکی در SI به صورت $x=-۴t^۲+۲۰t-۱۵$ است.

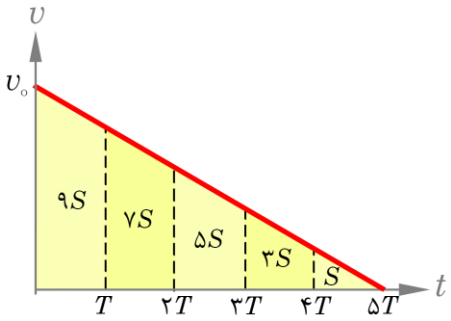
الف) جابه‌جایی و مسافت طی شده توسط متحرک را در ۶ ثانیهٔ نخست حرکت تعیین کنید.

ب) تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t=۱\text{s}$ تا $t=۸\text{s}$ را تعیین کنید.

نکته: برای جسمی که از حال سکون با شتاب ثابت روی خط راست شروع به حرکت می‌نماید، نمودار سرعت ـ زمان به صورت شکل روبه‌رو است. در اینصورت به راحتی (!) می‌توان نشان داد اگر جابه‌جایی متحرک در T ثانیهٔ نخست $\Delta x_{۱,T}=\text{S}$ باشد، جابه‌جایی در بازه‌های زمانی T ثانیه‌ای بعدی، به ترتیب $\Delta x_{۲,T}=۳\text{S}$، $\Delta x_{۳,T}=۵\text{S}$، $\Delta x_{۴,T}=۷\text{S}$، $\Delta x_{۵,T}=۹\text{S}$ و ... است.



برعکس این نکته نیز برقرار است؛ یعنی اگر بین جابه‌جایی‌های انجام شده در بازه‌های زمانی متوالی، رابطهٔ S، ۳S، ۵S، ۷S و ... برقرار باشد، می‌توان نتیجه گرفت بازه‌های زمانی با یکدیگر برابر هستند و ...



این رابطه برای جسم که با سرعت اولیهٔ $v_۰$ در حرکت است و با شتاب ثابت متوقف می‌شود نیز برقرار است.

مثال ۹۱

خودرویی با تندی ثابت در حرکت است که ناگهان راننده ترمز می‌کند و خودرو با شتاب ثابت پس از مدت زمان ۱۲ ثانیه متوقف می‌شود. اگر مسافت طی شده توسط خودرو در سه ثانیهٔ ابتدایی ۳۰ متر بیش‌تر از مسافت طی شده در سه ثانیهٔ انتهایی باشد، شتاب توقف و سرعت اولیهٔ خودرو را تعیین کنید.

مثال ۹۲

خودرویی با سرعت ثابت در حرکت است که ناگهان راننده با شتاب ثابت خودرو را متوقف می‌نماید. اگر این متحرک در ۲ ثانیهٔ اول ۷۲ متر و در دو ثانیهٔ آخر ۸ متر جابه‌جا شده باشد،...

الف) زمان توقف خودرو چند ثانیه بوده است؟

ب) سرعت اولیهٔ خودرو چند متر بر ثانیه است؟

پ) کل مسافت توقف خودرو چند متر است؟

نکته: در تمامی روابط حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست، سرعت اولیه (v_0) حضور دارد. مناسب است که رابطه‌ای مستقل از این کمیّت نیز به دست آوریم. برای این کار کافی است v_0 را از میان معادلات حذف نماییم.

$$\left.\begin{matrix} v=at+v_0 \Rightarrow v_0=v-at \\ x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=\frac{1}{2}at^2+(v-at)t+x_0$$

$$x=-\frac{1}{2}at^2+vt+x_0 \qquad (۳۰-۱۰)$$

مثال ۹۳

متحرّکی در مسیر مستقیم و با شتاب ثابت، فاصلهٔ ۸۰ متری از A تا B را در مدّت $8\,s$ طی می‌کند و در لحظهٔ رسیدن به نقطهٔ B، سرعتش $15\,\frac{m}{s}$ است. شتاب متحرّک را بیابید.

نکته: با توجّه به رابطهٔ مکان ـ زمان و تعریف سرعت متوسط، می‌توان برای تعیین سرعت متوسط در t ثانیهٔ اول حرکت از رابطهٔ زیر استفاده کرد:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\frac{1}{2}at^2+v_0t}{t-0}$$

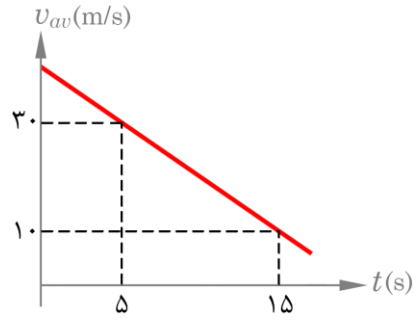
$$v_{av}=\frac{1}{2}at+v_0 \qquad (۳۱-۱۰)$$

مثال ۹۴

سرعت متوسط متحرّکی که با شتاب ثابت $۲\frac{m}{s^۲}$ در حرکت است، در ۵ ثانیهٔ اوّل حرکت، $۳۰\frac{m}{s}$ است. سرعت اولیّهٔ این متحرّک را تعیین کنید.

مثال ۹۵

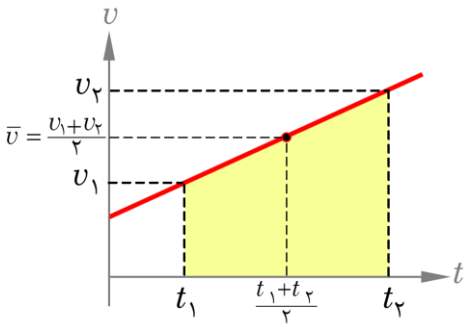
نمودار سرعت متوسط بر حسب زمان برای متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل است.



الف) شتاب این متحرک و سرعت اولیهٔ آن را تعیین کنید.

ب) سرعت متوسط متحرک در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت چقدر است؟

نکته: در حرکت با شتاب ثابت، از آنجا که رابطهٔ سرعت ـ زمان یک رابطهٔ خطی است، می‌توان نشان داد که سرعت لحظه‌ای متحرک در وسط هر بازهٔ زمانی، میانگین سرعت متحرک در ابتدا و انتهای آن بازه زمانی یا به عبارت دیگر، برابر با سرعت متوسط متحرک در آن بازه زمانی است. یعنی:



$$\bar{v}_{(t_۱,t_۲)}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}=v_{\frac{t_۱+t_۲}{۲}} \qquad (۳۲\text{-}۱۰)$$

مثال ۹۶

متحرکی با شتاب ثابت روی مسیر مستقیم در حال حرکت است. اگر سرعت متوسط این متحرک بین لحظه‌های ۲s تا ۶s برابر $۲۶\frac{m}{s}$ و بین لحظه‌های ۱۰s تا ۱۲s برابر $۴۰\frac{m}{s}$ باشد، شتاب حرکت آن چند متر بر مجذور ثانیه است؟

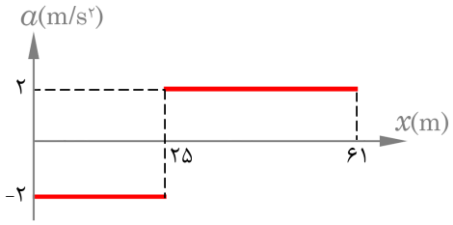
مثال ۹۷

متحرکی با شتاب ثابت روی مسیر مستقیم در حال حرکت است و در لحظات $t_1 = 2\,s$، $t_2 = 5\,s$ و $t_3 = 10\,s$ به ترتیب در نقاط $x_1 = 41\,m$، $x_2 = 110\,m$ و $x_3 = 325\,m$ قرار دارد. شتاب حرکت این متحرک را تعیین کنید و معادلهٔ مکان ـ زمان را برای آن بنویسید.

مثال ۹۸

کنکور سراسری داخل: تجربی ۹۷

نمودار شتاب ـ مکان متحرّکی که روی محور x حرکت می‌کند، به صورت شکل مقابل است.

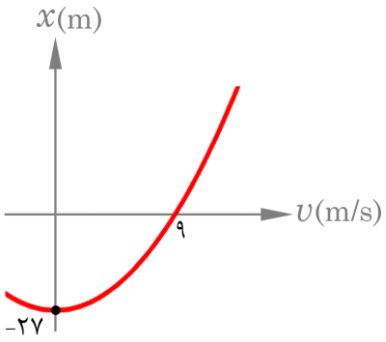


الف) اگر متحرک در لحظهٔ $t = 0$ از مبدأ با سرعت $10\,\frac{m}{s}$ عبور کند، سرعت آن در مکان $x = 61\,m$ چند متر بر ثانیه است؟

ب) نمودار سرعت ـ زمان را برای آن رسم کنید.

مثال ۹۹

نمودار مکان ـ سرعت متحرّکی که روی محور x حرکت می‌کند، سهمی نشان داده شده در شکل مقابل است. اگر متحرک در لحظهٔ $t=۰$ در مکان $x_۰=-۱۵\,\mathrm{m}$ قرار داشته باشد، ...



الف) سرعت اولیه و شتاب متحرک را تعیین کنید.

ب) نمودارهای مکان ـ زمان و سرعت ـ زمان را برای آن رسم کنید.

نکته: یکی از روش‌های بسیار مناسب برای حل مسائل حرکت شناسی، به ویژه مسائل حرکت با شتاب ثابت، رسم نمودار سرعت ـ زمان و استفاده از آن است!!

مثال ۱۰۰

معادلهٔ حرکت متحرکی در SI به صورت $x=t^۲-۲۰t-۱۵$ است.

الف) جابه‌جایی متحرک در ۲۰ ثانیهٔ اول حرکت چند متر است؟

ب) مسافت طی شده توسط متحرک در ۲۰ ثانیهٔ اول حرکت چند متر است؟

پ) تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱=۸\,\mathrm{s}$ تا $t_۲=۱۴\,\mathrm{s}$ چند متر بر ثانیه است؟

مثال ۱۰۱

معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی در SI به صورت $v=-۴t+۱۶$ است.

الف) تندی متوسط متحرک در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت چند متر بر ثانیه است؟

ب) سرعت متوسط متحرک در سه ثانیهٔ دوم حرکت چند متر بر ثانیه است؟

مثال ۱۰۲

کامیونی با سرعت ثابت $۷۲\frac{km}{h}$ از یک چهار راه می‌گذرد. ۵ ثانیه بعد، خودرویی از همان چهارراه با شتاب ثابت $۲/۵\frac{m}{s^۲}$ شروع به حرکت می‌نماید.

الف) در چه فاصله‌ای از چهارراه خودرو به کامیون می‌رسد؟

ب) چه مدت فاصلهٔ میان آنها کمتر از ۱۷۵ متر است؟

مثال ۱۰۳

یک قطار مترو، فاصلهٔ میان دو ایستگاه را به صورت زیر می‌پیماید: ابتدا به مدت ۲۰ ثانیه با شتاب $۰/۸\frac{m}{s^۲}$ از حال سکون شروع به حرکت می‌کند، سپس به مدت ۴ دقیقه با سرعت ثابت حرکت می‌نماید و در نهایت در مدت ۴۰ ثانیه ترمز می‌کند تا در ایستگاه مقصد متوقف شود.

الف) فاصلهٔ میان این دو ایستگاه چند متر است؟

ب) سرعت متوسط متحرک در کل این مدت چند متر بر ثانیه است؟

مثال ۱۰۴

خودرویی با سرعت $۱۰۸\frac{km}{h}$ در جاده‌ای مستقیم در حرکت است که ناگهان راننده مانعی را در فاصلهٔ ۱۲۵ متری خود مشاهده می‌کند و با شتاب $۴\frac{m}{s^۲}$ ترمز می‌نماید. اگر زمان واکنش راننده (مدت زمان بین لحظهٔ مشاهدهٔ مانع و اعمال ترمز) ۰/۵ ثانیه باشد، ...

الف) نمودار سرعت ـ زمان را برای آن رسم کنید.

ب) آیا خودرو به مانع برخورد می‌کند؟ اگر برخورد می‌کند، سرعت برخورد و اگر برخورد نمی‌کند، فاصلهٔ محل توقف تا مانع را تعیین کنید.

مثال ۱۰۵

متحرکی از حال سکون، با شتاب ثابت شروع به حرکت می‌کند و مسافت ۱۲۰۰ متر را طی می‌کند. اگر این متحرک ۴۳۲ متر پایانی را در مدت ۸ ثانیه طی کرده باشد، سرعت متوسط متحرک در کل زمان طی کردن این مسیر چقدر است؟

مثال ۱۰۶

متحرکی با شتاب ثابت روی محور x در حال حرکت است و در مبدأ زمان، در جهت مثبت محور x از مبدأ مکان عبور می‌کند. اگر تندی متوسط متحرک در ۶ ثانیهٔ اول حرکت $\frac{۱۰}{۳}\frac{\text{m}}{\text{s}}$ و بردار سرعت متوسط آن در این مدت $(۲\frac{\text{m}}{\text{s}})\vec{\text{i}}$ باشد، ...

الف) متحرک در چه لحظه‌ای تغییر جهت داده است؟

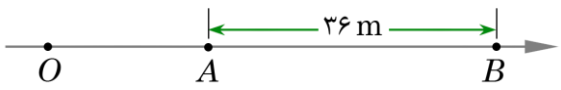
ب) تندی متحرک در لحظهٔ $t = ۵\text{s}$ چند متر بر ثانیه است؟

مثال ۱۰۷

متحرکی با شتاب ثابت $\vec{a} = (-۴\frac{\text{m}}{\text{s}^۲})\vec{\text{i}}$ روی محور x حرکت می‌کند. اگر جابه‌جایی متحرک در ثانیهٔ سوم حرکت برابر صفر باشد، مسافت طی شده توسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۱\text{s}$ تا $t_۲ = ۶\text{s}$ چند متر است؟

مثال ۱۰۸

در شکل زیر، متحرکی از حال سکون با شتاب ثابت و از نقطهٔ O شروع به حرکت می‌کند و با تندی $۱۲\frac{\text{m}}{\text{s}}$ از نقطهٔ B می‌گذرد. اگر متحرک فاصلهٔ A تا B را در مدت زمان ۴ ثانیه طی کند، فاصلهٔ OA چند متر است؟



مثال ۱۰۹

اتومبیلی با سرعت ثابت در حرکت است که ناگهان راننده ترمز می‌کند و خودرو با شتاب ثابت و پس از گذشت زمان Δt ثانیه متوقف می‌شود.

الف) مسافت طی شده تا نیمهٔ زمانی توقف، چند برابر مسافت طی شده در نیمهٔ دوم است؟

ب) مسافت طی شده توسط این اتومبیل در یک سوم زمان ابتدایی شروع توقف (شروع حرکت تا $\frac{1}{3}\Delta t$)، چند برابر مسافت طی شده در یک سوم زمان انتهایی توقف ($\frac{2}{3}\Delta t$ تا Δt) است؟

مثال ۱۱۰

اتومبیلی با تندی ثابت در حرکت است که ناگهان راننده ترمز می‌کند و اتومبیل با شتاب ثابت متوقف می‌شود. اگر زمان توقف اتومبیل ۱۰ ثانیه باشد، ...

الف) مسافت طی شده در ۴ ثانیهٔ اول، چند برابر مسافت طی شده در بقیهٔ مسیر حرکت است؟

ب) زمان طی شده برای طی نیمهٔ اول مسافت توقف، چند برابر زمان لازم برای طی شدن نیمهٔ دوم مسیر است؟

پ) مسافت طی شده در ۲ ثانیهٔ ابتدایی، چند برابر مسافت طی شده در ۲ ثانیهٔ پایانی حرکت است؟

ت) زمان لازم برای طی شدن ۳۶٪ ابتدایی حرکت چند ثانیه است؟

مثال III

قطار A به طول ۲۰۰ متر با سرعت ثابت $40\frac{m}{s}$ در حال حرکت است. قطار B به طول ۲۲۵ متر که روی ریل مجاور توقف کرده است، به محض اینکه قطار A کاملاً از آن عبور کرد، با شتاب ثابت $2\frac{m}{s^2}$ در همان جهت حرکت قطار A شروع به حرکت می‌کند و سرعت خود را به $50\frac{m}{s}$ می‌رساند و با همان سرعت، حرکت خود را ادامه می‌دهد. قطار B چند ثانیه پس از شروع حرکت، از قطار A سبقت گرفته و از کنار آن کاملاً عبور می‌کند؟

۱۰-۶. حرکت نسبی (۲)

در بررسی حرکت دو یا چند جسم، با حرکت شتاب‌دار نیز علاوه بر آنکه می‌توانیم برای هر دو متحرک، جداگانه معادله بنویسیم و آن را حل نماییم، می‌توانیم معادلات حرکت را نسبت به یکی از متحرک‌ها نیز مورد استفاده قرار دهیم.

در این حالت باید کمیّت‌های نسبی ($x_r, \Delta x_r, v_r, a_r$) را تعیین کنیم و آنها را در معادلات حرکت به کار بریم. برای تعیین کمیّت‌های نسبیِ متحرک B نسبت به متحرکی مانند A، کافی است تمام کمیت‌های مربوط به A را از کمیت‌های متناظر آن در B کم کنیم (یا به عبارت دیگر، کمیت‌های مربوط به A قرینه کرده و با کمیت‌های متناظر آن در B، جمع کنیم!) یعنی می‌توان نوشت:

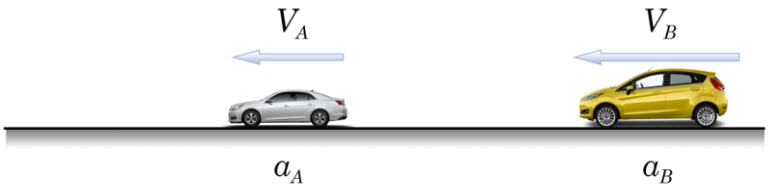
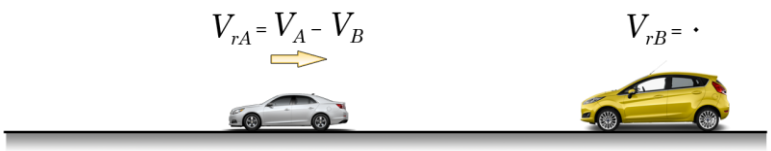
(۱۰-۳۳ الف) $x_r = x_B - x_A$: مکان نسبی متحرک B نسبت به A

(۱۰-۳۳ ب) $\Delta x_r = \Delta x_B - \Delta x_A$: جابه‌جایی نسبی متحرک B نسبت به A

(۱۰-۳۳ پ) $v_r = v_B - v_A$: سرعت نسبی متحرک B نسبت به A

(۱۰-۳۳ ت) $a_r = a_B - a_A$: شتاب نسبی متحرک B نسبت به A

در شکل‌های زیر، دو خودرو با سرعت‌های متفاوت به دنبال یکدیگر در حرکت هستند. در اینصورت می‌توان هرکدام از راننده‌ها را به عنوان ناظر در نظر گرفت و از دید این ناظر، مسأله را حل و بررسی کرد:

نسبت به ناظر ساکن زمینی	
نسبت به ناظر A (A ساکن فرض می شود)	
نسبت به ناظر B (B ساکن فرض می شود)	

نکته: باید دقّت داشت که حل مسأله به روش حرکت نسبی فقط زمانی قابل استفاده است که در تمامی لحظات، هر دو متحرک با همان وضعیت قبلی در حال حرکت باشند. به عبارت دیگر، اگر یکی از متحرک‌ها با تأخیر زمانی حرکت کرده است یا یکی از آن‌ها زودتر از دیگری متوقّف شده و دیگری هنوز در حرکت است، نمی‌توان از این روش استفاده کرد.

مثال ۱۱۲

یک قطار بر روی ریلی با سرعت $10\frac{m}{s}$ در حرکت است و قطار دیگری روی همان ریل با سرعت $40\frac{m}{s}$ به دنبال آن حرکت می‌کند. وقتی فاصلهٔ میان دو قطار به $300m$ می‌رسد، قطار عقبی ترمز می‌کند.

الف) حداقل شتاب ترمز چه‌قدر باشد تا دو قطار به هم برخورد نکنند؟

ب) اگر قطار عقیب با همان شتاب کمینه ترمز کند، نمودار مکان ـ زمان آن‌ها را در یک دستگاه مختصات رسم نمایید.

مثال ۱۱۳

دو متحرک، اولی با سرعت اولیهٔ $۶\frac{m}{s}$ و شتاب $۳\frac{m}{s^۲}$ و متحرک دوّم با سرعت اولیهٔ $۱۰\frac{m}{s}$ و شتاب $۵\frac{m}{s^۲}$، هر دو تند شونده، از فاصلهٔ ۸۴ متری به سمت هم حرکت می‌کنند. بعد از چند ثانیه به هم می‌رسند؟

مثال ۱۱۴

در یک مسیر مستقیم، رانندهٔ اتومبیلی می‌خواهد از کامیونی که با سرعت ثابت $۲۰\frac{m}{s}$ در حرکت است، سبقت بگیرد. در ابتدا، سرعت اتومبیل $۲۰\frac{m}{s}$ و فاصلهٔ اولیهٔ دو وسیلهٔ نقلیه (فاصلهٔ ابتدای اتومبیل تا انتهای کامیون) $۲۵m$ است. اگر طول اتومبیل $۵m$ و طول کامیون $۲۰m$ و شتاب حرکت خودرو $۱/۵\frac{m}{s^۲}$ باشد، چند ثانیه طول می‌کشد تا اتومبیل از کامیون سبقت بگیرد و انتهای آن در فاصلهٔ ۲۵ متری از ابتدای کامیون قرار گیرد؟

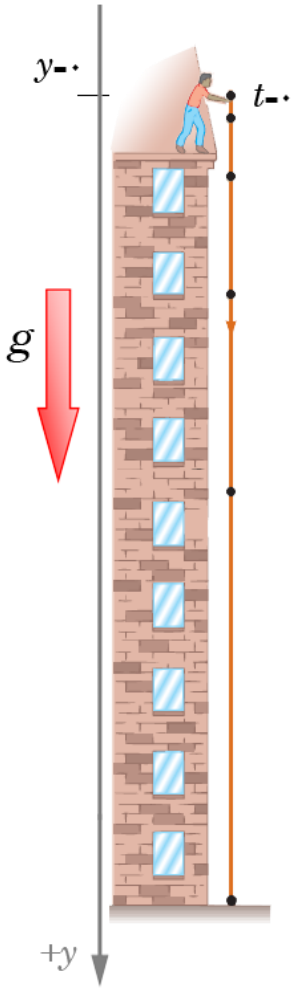
۱۰-۷. سقوط آزاد

هنگامی‌که جسمی را در نزدیکی سطح زمین رها می‌کنیم، اگر بتوان از اثر مقاومت هوا در مقابل حرکت جسم، صرف نظر کرد، حرکت در راستای قائم و فقط تحت تأثیر نیروی وزن آن صورت می‌گیرد. این حرکت را اصطلاحاً سقوط آزاد می‌نامیم. از آنجا که تنها نیروی وارد بر جسم، وزن آن است، می‌توان نتیجه گرفت که در این حرکت، شتاب همواره ثابت است و اندازه و جهت آن در حین حرکت تغییر نمی‌کند.

در حالت کلی، حرکت سقوط آزاد، افزون بر رها کردن جسم، شامل پرتاب کردن جسم رو به پایین یا رو به بالا نیز می‌شود و در همهٔ این موارد، اندازهٔ شتاب، g (شتاب جاذبهٔ زمین) و جهت آن همواره رو به پایین است.

ما در اینجا فقط به بررسی حالتی می‌پردازیم که جسم، بدون سرعت اولیه، از ارتفاع مشخصی رها شده باشد.

بنابر آنچه گفته شد، تمامی معادلات حرکت روی خط راست با شتاب ثابت را می‌توان برای حرکت سقوط آزاد به کار بُرد. برای استفاده صحیح از معادلات حرکت، توجّه به چند نکته ضروری است:



- ***انتخاب محور مختصّات، به همراه مبدأ و جهت محور:*** هر چند انتخاب مبدأ مختصّات و جهت آن کاملاً دلخواه است، امّا این انتخاب باید انجام شود؛ زیرا بسته به آن‌که مبدأ مختصّات کجا قرار داشته باشد و جهت حرکت به کدام سمت باشد، علامت و مقادیر کمیّت‌ها در معادلات، مختلف خواهد بود.
- ***در نظر گرفتن علامت برای کمیّت‌ها:*** کمیّت‌های مورد استفاده در معادلات سقوط آزاد، یعنی مکان، جابه‌جایی، سرعت، سرعت متوسط و شتاب، همگی دارای علامت هستند؛ که این علامت‌ها با توجّه به جهت دستگاه انتخاب شده تعیین می‌شوند.

اگر جهت مثبت دستگاه مختصات را رو به پایین و محل رها شدن جسم را مبداء مختصات انتخاب نماییم، می‌توان معادلات حرکت را به صورت زیر نوشت:

$$v = gt \qquad (۳۴-۱۰)$$

$$y = \frac{۱}{۲} g t^{۲} + y_{۰} \qquad (۳۵-۱۰)$$

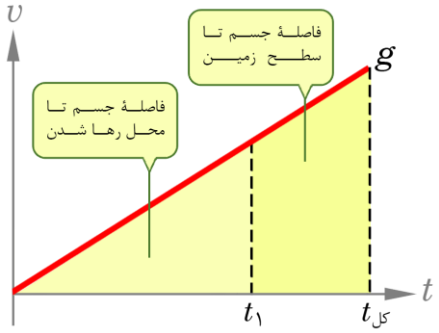
$$v^{۲} = ۲g\,y \qquad (۳۶-۱۰)$$

$$y = \frac{v}{۲} t \qquad (۳۷-۱۰)$$

$$v_{av} = \frac{v}{۲} \qquad (۳۸-۱۰)$$

نکته: شبیه آنچه در مورد حرکت با شتاب ثابت دیدیم، جابه‌جایی جسمی که در حال سقوط آزاد است، در ثانیهٔ nام حرکت از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\Delta y_n = g\left(n - ۰/۵\right) \qquad (۳۹-۱۰)$$



نکته: اگر جهت مثبت دستگاه مختصات را به طرف پایین در نظر بگیریم، نمودار سرعت ـ زمان برای جسمی که از یک بلندی، بدون سرعت اولیه رها می‌شود، به صورت شکل مقابل است.

در این شکل، مساحت ناحیهٔ اول (بازهٔ زمانی صفر تا $t_۱$)، بیانگر فاصلهٔ متحرک تا محل رها شدن جسم و مساحت ناحیهٔ دوم (بازهٔ زمانی $t_۱$ تا t) نشان دهندهٔ فاصله جسم تا سطح زمین است.

مثال ۱۱۵

گلولهٔ کوچکی از ارتفاع ۸۰ متری سطح زمین رها می‌شود. ($g = ۱۰ \frac{m}{s^۲}$)

الف) این جسم پس از چه مدت و با چه سرعتی به زمین برخورد می‌کند؟

ب) این جسم در لحظهٔ $t = ۳\,s$ در چه فاصله‌ای از سطح زمین قرار دارد؟

پ) در چه فاصله‌ای از سطح زمین، سرعت آن به $۲۵ \frac{m}{s}$ می‌رسد؟

ت) این جسم در آخرین ثانیهٔ حرکت خود، چه مسافتی را طی می‌کند؟

ث) تندی متوسط جسم در دو ثانیهٔ آخر حرکتش چند متر بر ثانیه است؟

مثال ۱۱۶

گلوله‌ای در شرایط خلاء رها می‌شود. اگر مسافت طی شده توسط متحرک در ثانیهٔ سوم و مسافت طی شده در ۲ ثانیهٔ سوم را به ترتیب با $d_۱$ و $d_۲$ نشان دهیم، نسبت $\frac{d_۲}{d_۱}$ را تعیین کنید.

مثال ۱۱۷

گلوله‌ای در شرایط خلاء از ارتفاع h رها می‌شود. اگر این گلوله با تندی v به زمین برخورد کند، تندی آن در ارتفاع $\frac{۷}{۱۶}h$ از سطح زمین چند برابر v خواهد بود؟

مثال ۱۱۸

گلوله‌ای از ارتفاع ۳۶۰ متری سطح زمین رها می‌شود. اگر گلوله این مسیر را در سه بازهٔ زمانی مساوی سپری کرده باشد، مسافت‌های طی شده در این سه بازهٔ زمانی را تعیین کنید. ($g = ۱۰ \frac{m}{s^۲}$)

نکته: شبیه آنچه در مورد حرکت با شتاب ثابت گفته شد، می‌توان معادلات فوق را بین هر دو نقطه از حرکت تعمیم داد و از روابط زیر نیز استفاده کرد:

$$\Delta v = +g\Delta t \quad (۴۰-۱۰)$$

$$v_۲^۲ - v_۱^۲ = +۲g\Delta y \quad (۴۱-۱۰)$$

$$\Delta y = \frac{v_۱+v_۲}{۲}\Delta t \quad (۴۲-۱۰)$$

$$v_{av} = \frac{v_۱+v_۲}{۲} \quad (۴۳-۱۰)$$

مثال ۱۱۹

گلوله‌ای در شرایط خلاء از بالای یک ساختمان رها می‌شود و لحظه‌ای که به ارتفاع ۱۲۰ متری سطح زمین می‌رسد سرعتش $۵۰\frac{m}{s}$ می‌شود. $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$

الف) این گلوله چند ثانیه در حرکت بوده‌است؟

ب) تندی این جسم در فاصلهٔ ۶۵ متری سطح زمین چقدر است؟

مثال ۱۲۰

گلوله‌ای در شرایط خلاء از بالای یک ساختمان رها می‌شود و در دو ثانیهٔ آخر حرکت خود، ۱۰۰ متر جابه‌جا می‌شود.

الف) ارتفاع ساختمان چند متر است؟

ب) این گلوله در نیمهٔ اول زمان کل حرکت، چه مسافتی را پیموده است؟

پ) این گلوله، نیمهٔ نخست مسیر را در چه مدت پیموده است؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$

مثال ۱۲۱

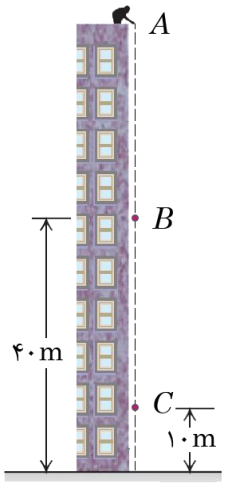
گلولهٔ A در شرایط خلاء از ارتفاع ۱۲۵ متری زمین رها می‌شود. گلولهٔ B را چند ثانیه پس از آن، از همان نقطه رها کنیم تا حداکثر فاصلهٔ میان آنها ۸۰ متر شود؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$

مثال ۱۲۲

دو گلوله در شرایط خلاء با اختلاف زمانی ۲/۵ ثانیه از یک بلندی رها می‌شوند. اگر بیشینهٔ فاصلهٔ بین این دو متحرک در کل حرکت ۶۸/۷۵ متر شود، گلوله‌ها از چه ارتفاعی رها شده‌اند؟ ($g = ۱۰ \frac{m}{s^۲}$)

مثال ۱۲۳

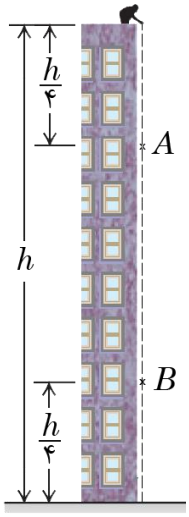
در شکل مقابل، جسمی از نقطهٔ A رها می‌شود و فاصلهٔ میان نقاط B و C را در مدت ۱ ثانیه می‌پیماید. ارتفاع نقطهٔ A از سطح زمین چند متر است؟ ($g = ۱۰ \frac{m}{s^۲}$)



مثال ۱۲۴

گلولهٔ A در شرایط خلاء، از ارتفاع h رها می‌شود. گلولهٔ B را نیم ثانیه بعد از آن، از ۲۱/۲۵ متر پایین‌تر رها می‌کنیم و هر دو گلوله همزمان به سطح زمین می‌رسند. h چند متر است؟ ($g = ۱۰ \frac{m}{s^۲}$)

مثال ۱۲۵



در شکل مقابل، جسمی از بالای ساختمان رها می‌شود و فاصلهٔ میان نقاط A و B را در مدت ۲ ثانیه طی می‌کند. اگر از مقاومت هوا صرف نظر شود، تندی گلوله هنگام رسیدن به سطح زمین چند متر بر ثانیه است؟ ($g = ۱۰ \frac{m}{s^۲}$)

مثال ۱۲۶

قطره‌های آب از ارتفاع H از یک دوش، در بازه‌های زمانی مساوی T، یکی پس از دیگری می‌چکند. وقتی اولین قطره به زمین می‌رسد، پنجمین قطره در حال جدا شدن از دوش است.

الف) در این لحظه، فاصلهٔ هر قطره تا محل رها شدن قطره‌ها را برحسب H بیابید.

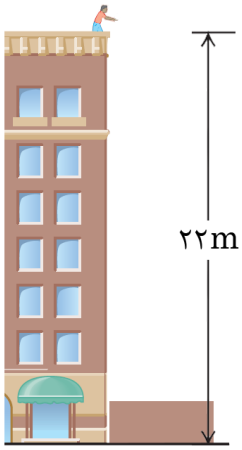
ب) فاصلهٔ میان قطرات متوالی را برحسب H تعیین کنید.

مثال ۱۲۷

کنکور سراسری: ریاضی ۹۶

گلوله‌ای در شرایط خلاء بدون سرعت اولیه از ارتفاع h رها می‌شود. اگر این گلوله مسافتی را که در ثانیهٔ آخر حرکت طی کرده، ۳ برابر مسافتی باشد که تا قبل از آن طی کرده است. h چند متر است؟ ($g = ۱۰ \frac{m}{s^۲}$)

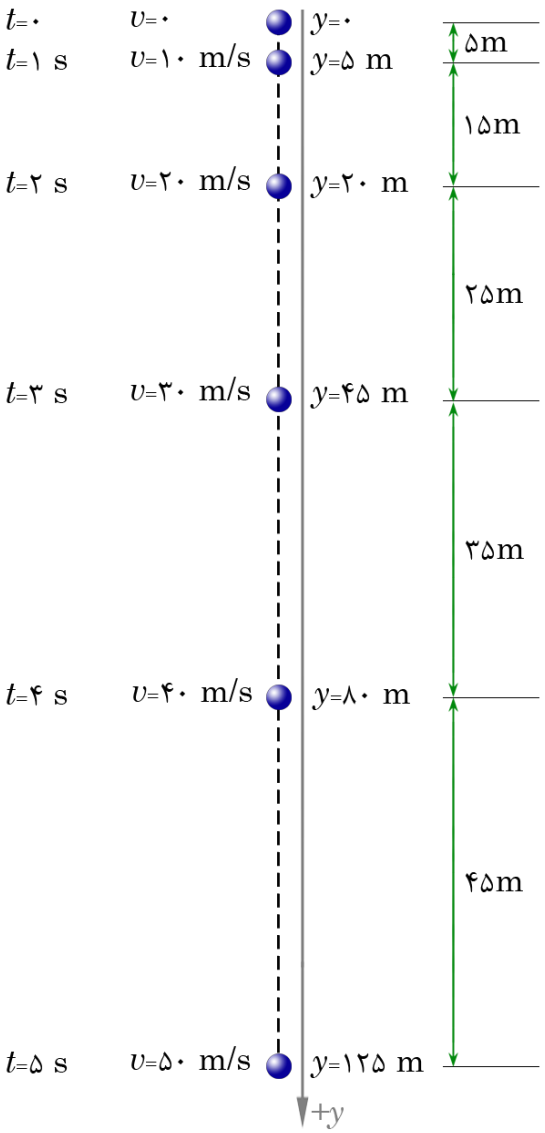
مثال ۱۲۸



مطابق شکل، شخصی از بالای ساختمانی به ارتفاع ۲۲ متر خود را رها می‌کند تا روی تشکی به ضخامت ۲ متر فرود آید. اگر هنگام فرورفتن شخص در تشک، ضخامت تشک حداقل به ۰/۵ متر برسد، شتاب متوسط حرکت شخص در تشک چقدر است؟ (حرکت شخص در تشک را با شتاب ثابت در نظر بگیرید و $g = ۱۰ \frac{m}{s^۲}$ است.)

نکته: در حرکت سقوط آزاد، هنگامی‌که جسم از یک بلندی، بدون سرعت اولیه رها می‌شود، مسافت‌های طی شده در ثانیه‌های متوالی، جملات یک دنبالهٔ عددی هستند که قدر نسبت این دنباله، شتاب جاذبه (g) است. بنابراین همواره می‌توان از اعداد زیر برای توصیف این حرکت استفاده کرد.

این اعداد در مبحث سقوط آزاد، به اعداد طلایی معروف هستند! اعداد طلایی نشان داده شده در نمودار مقابل را به خاطر بسپارید!!



نکته: برای جسمی که در شرایط خلاء بدون سرعت اولیه سقوط می‌کند و در لحظات $t_۱$ و $t_۲$ به ترتیب با سرعت‌های $\upsilon_۱$ و $\upsilon_۲$ در فاصلهٔ $y_۱$ و $y_۲$ از نقطهٔ پرتاب قرار داشته باشد، می‌توان نوشت:

$$\frac{t_۲}{t_۱} = \frac{\upsilon_۲}{\upsilon_۱} = \sqrt{\frac{y_۲}{y_۱}} \qquad (۴۴\text{-}۱۰)$$

مثال ۱۲۹

جسم کوچکی را از بالای ساختمانی رها می‌کنیم. این جسم در آخرین ثانیهٔ حرکت خود، ۴۵m را می‌پیماید.

الف) ارتفاع ساختمان چند متر است؟

ب) جسم چه مدّت در راه بوده است؟

پ) سرعت آن هنگام برخورد به زمین چه‌قدر است؟ ($g = ۱۰ \frac{m}{s^۲}$)

مثال ۱۳۰

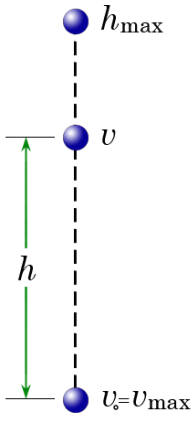
جسم کوچکی را از بالای ساختمانی رها می‌کنیم. این جسم در نیمهٔ دوم زمان حرکت خود، ۲۰ متر بیش از نیمهٔ اول حرکت طی می‌کند. ارتفاع ساختمان چند متر است و سرعت جسم هنگام برخورد به زمین چه‌قدر است؟ ($g = ۱۰ \frac{m}{s^۲}$)

مثال ۱۳۱

جسم کوچکی از یک بلندی رها می‌شود و ۷۵٪ پایانی مسیر را در مدت ۳ ثانیه می‌پیماید. جسم از چه ارتفاعی رها شده است؟ ($g = ۱۰ \frac{m}{s^۲}$)

نکته: هنگامی که جسمی در شرایط خلاء از ارتفاع h_{max} رها می‌شود، با سرعت v_{max} به سطح زمین می‌رسد. در ارتفاع h از سطح زمین، دارای سرعت v خواهد بود و در این‌صورت داریم:

$$\left(\frac{v}{v_{max}}\right)^۲ + \frac{h}{h_{max}} = ۱ \qquad (۴۵-۱۰)$$



مثال ۱۳۲

جسم کوچکی از ارتفاع H رها می‌شود و با سرعت ۶۰ متر بر ثانیه به سطح زمین می‌رسد.

الف) سرعت این جسم در فاصلهٔ ۱۰۰ متری سطح زمین چند متر بر ثانیه است؟

ب) در چه ارتفاعی از سطح زمین، سرعت جسم $۲۴ \frac{m}{s}$ است؟ ($g = ۱۰ \frac{m}{s^۲}$)

مثال ۱۳۳

شخصی سنگی را از لبهٔ چاه رها می‌کند و صدای برخورد سنگ با آب را پس از ۴/۲۵ ثانیه می‌شنود. اگر سرعت انتشار صوت در هوا $۳۲۰\frac{m}{s}$ باشد، آب درون چاه در چه عمقی قرار دارد؟ ($g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$)

نکته: در اینجا نیز اگر اجسام مورد مطالعه، به‌طور هم‌زمان حرکت خود را آغاز کرده باشند، می‌توان از مفاهیمی که در حرکت نسبی بیان شد استفاده کرد. توجه داریم که در این حالت، شتاب تمام اجسامی که تحت اثر جاذبه حرکت می‌کنند، همان شتاب جاذبه (g) است و لذا برای تمامی آنها، شتاب نسبی، صفر خواهد بود.

مثال ۱۳۴

دو گلوله در شرایط خلاء هم‌زمان از پنجره‌های یک ساختمان رها می‌شوند. اگر مکان اولیهٔ یکی از گلوله‌ها ۱۵ متر بالاتر از گلولهٔ دیگر باشد، فاصلهٔ میان آنها بعد از گذشت ۴ ثانیه، چند متر است؟

مثال ۱۳۵

دو گلوله در شرایط خلاء از نقطه‌ای بالای سطح زمین با اختلاف زمانی ۲ ثانیه رها می‌شوند. چند ثانیه پس از رها شدن گلولهٔ دوم، فاصلهٔ گلوله‌ها به ۶۰ متر می‌رسد؟ ($g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$)

مثال ۱۳۶

دو گلوله در شرایط خلاء با اختلاف زمانی ۱/۵ ثانیه رها می‌شوند. اگر محل رها شدن گلولهٔ دوم ۱۰ متر پایین‌تر از محل رها شدن گلولـهٔ اول باشـد، فاصلهٔ گلوله‌ها بعد از گذشت ۵ ثانیه از لحظهٔ رها شدن گلولهٔ اول، چند متر خواهد شد؟ ($g = ۱۰ \frac{\text{m}}{\text{s}^۲}$)

مثال ۱۳۷

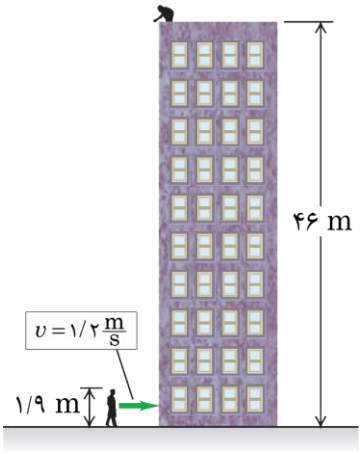
گلولهٔ A را در شرایط خلاء از ارتفاع h و سه ثانیهٔ بعد گلولهٔ B را از ارتفاع $\frac{h}{۴}$ رها می کنیم.

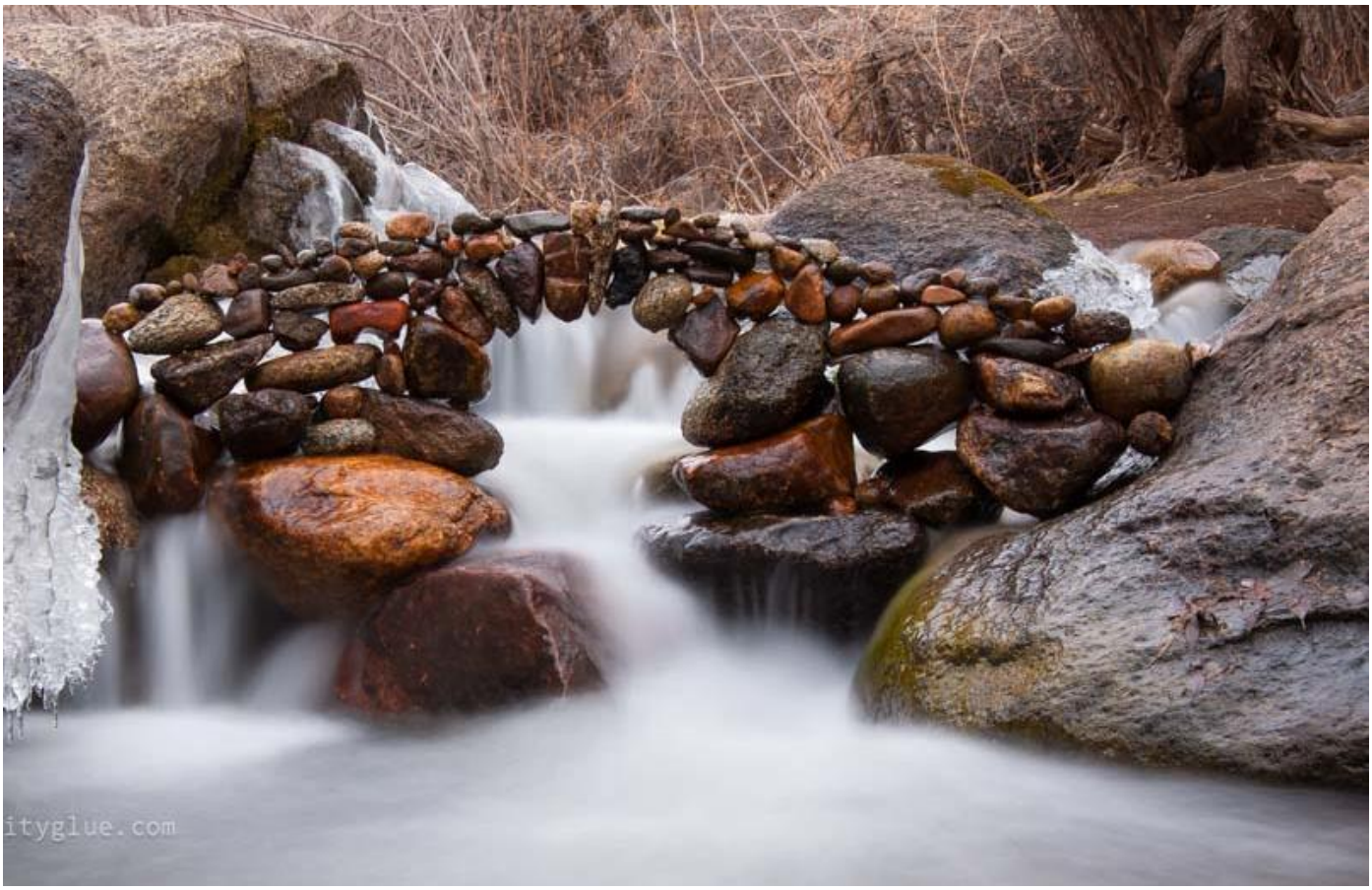
الف) نسبت تندی گلولهٔ A به تندی گلولهٔ B در لحظهٔ رسیدن به زمین چقدر است؟

ب) اگر دو گلوله هم‌زمان به زمین برسند، زمان سقوط هر گلوله و ارتفاع h را تعیین کنید. ($g = ۱۰ \frac{\text{m}}{\text{s}^۲}$)

مثال ۱۳۸

مطابق شکل، دانش‌آموزی بالای پشت بام مدرسه قرار دارد و می‌خواهد تخم مرغی را روی سر یکـی از دوستانش بیندازد (!). این دوست در سطح حیاط مدرسه با تندی ثابت $۱/۲ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ حرکت می‌کنـد و طـول قد وی ۱۹۰ سانتی‌متر است. وقتی تخم مرغ رها می‌شود، شخص در چه فاصله‌ای از ساختمان باید باشـد!؟ ($g = ۹/۸ \frac{\text{m}}{\text{s}^۲}$)





۱۱ دینامیک (نیرو شناسی)

دینامیک شاخه‌ای از فیزیک است که در آن عامل ایجاد شتاب در اجسام بررسی می‌شود. این عامل، نیرو است و می‌گوییم نیرو به یک جسم وارد می‌شود. می‌توان نیرو را به صورت‌های زیر توصیف کرد:

- نیرو عاملی است که اگر بر یک جسم وارد شود، باعث تغییر در وضعیت حرکت آن جسم می‌شود.
- نیرو، بر همکنش دو جسم بر یکدیگر است. این تأثیر ممکن است ناشی از تماس دو جسم باشد و یا دو جسم از راه دو بر یکدیگر نیرو وارد کنند.

نیرو کمیتی برداری و دارای اندازه، راستا و جهت است.

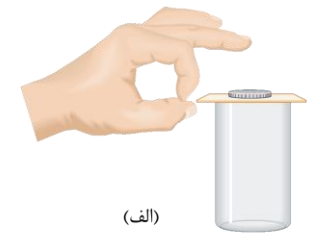
۱۱-۱. قوانین حرکت نیوتون

برای بررسی نیروها و ارتباط آن با حرکت و ...، قوانین زیر توسط نیوتون ارائه شده است:

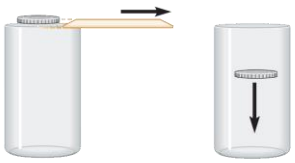
۱. قانون اول نیوتون

تا قبل از آنکه مکانیک نیوتونی پایه‌ریزی شود، تصور می‌شد برای این‌که جسم بتواند به حرکت با سرعت ثابت خود ادامه دهد، نیرو لازم است. آن زمان تصوّر می‌شد که یک جسم وقتی در *حالت طبیعی* خود قرار دارد که ساکن باشد و در این وضعیت برای حرکت با سرعت ثابت، باید ظاهراً جسم به نحوی، رانده شود. در غیر این‌صورت جسم باید بنابر طبیعت خود بایستد. امّا با انجام آزمایشاتی مشخّص شد که

این تصوّر صحیح نیست؛ زیرا یک جسم وقتی با سرعت ثابتی بر روی سطح‌های متفاوتی در حرکت است، پس از طی مسافت‌های مختلفی ـ که به جنس سطح‌ها بستگی دارد ـ متوقف می‌شود و هر قدر سطح مورد نظر سُرتر باشد، جسم مسافت بیشتری را قبل از توقف می‌پیماید. یعنی می‌توان نتیجه گرفت برای این که جسم با سرعت ثابت حرکت کند، نیازی به نیرو نیست. به این ترتیب قانون اوّل نیوتون چنین بیان می‌شود:


(الف)

یک جسم، حالت سکون یا حرکت یکنواخت روی خط راست خود را حفظ می‌کند، مگر آن‌که تحت تأثیر نیرویی مجبور به تغییر آن حالت شود.


(ب) (پ)

از قانون اوّل نیوتون نتیجه می‌شود که: اگر به جسمی نیرو وارد نشود (یا برآیند نیروهای وارد بر جسم، صفر باشد)، چنانچه جسم ساکن باشد، ساکن می‌ماند و اگر در حرکت باشد، به حرکت خود با سرعت ثابت روی خط راست ادامه می‌دهد.

مثال ۱

شخصی در اتومبیلی با تندی ثابت حرکت می‌کند، نشسته است. توضیح دهید.

الف) چرا وقتی راننده ترمز می‌کند، شخص به جلو پرتاب می‌شود؟

ب) چرا وقتی راننده تندی اتومبیل را افزایش می‌دهد، شخص به طرف عقب رانده می‌شود و به صندلی می‌چسبد؟

پ) چرا وقتی اتومبیل تغییر جهت می‌دهد، شخص به طرف بیرون پرتاب می‌شود؟

نکته: از قانون اوّل نیوتون نتیجه می‌شود که اجسام تمایل دارند وضعیت سکون و یا حرکت یکنواخت روی خط راست خود را حفظ کنند. به این تمایل اجسام، لختی گفته می‌شود. به همین دلیل به قانون اوّل، قانون لختی یا قانون اینرسی نیز گفته می‌شود.

۲. قانون دوّم نیوتون

از آنچه به عنوان قانون اوّل نیوتون بیان شد، استنباط می‌شود که اگر بر جسم نیرو وارد شود، نه تنها جسم ساکن نمی‌ماند، بلکه حرکتش شتابدار خواهد بود. رابطهٔ میان نیروی وارد بر جسم، جرم جسم و شتاب آن به صورت قانون دوّم نیوتون بیان می‌شود:

اگر به یک جسم نیروهایی وارد شود، جسم تحت تأثیر آن نیرو شتاب می‌گیرد که این شتاب با نیروی خالص ($\vec{F}_{net}$) وارد بر جسم، نسبت مستقیم دارد و در همان جهت نیروی خالص است و با جرم جسم نسبت وارون دارد.

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}_{net}}{m} \Rightarrow \vec{F}_{net}=m\vec{a} \qquad (۱-۱۱)$$

در این رابطه، جرم بر حسب کیلوگرم (kg)، شتاب بر حسب متر بر مجذور ثانیه $(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})$ و نیرو بر حسب $\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ است که آن را نیوتون می‌نامیم و با نماد N نشان می‌دهیم.

مثال ۲

جسمی به جرم $۵\,\mathrm{kg}$ تحت تأثیر سه نیروی $\vec{F}_۱=(-۱۵\mathrm{N})\vec{\mathbf{i}}+(۸\mathrm{N})\vec{\mathbf{j}}$، $\vec{F}_۲=(-۲۱\mathrm{N})\vec{\mathbf{i}}+(۱۹\mathrm{N})\vec{\mathbf{j}}$ و $\vec{F}_۳$ قرار گرفته و شتاب $\vec{a}=(-۴\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})\vec{\mathbf{i}}+(۳\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})\vec{\mathbf{j}}$ پیدا کرده است.

الف) اندازهٔ نیروی $\vec{F}_۳$ را تعیین کنید.

ب) اگر نیروی $\vec{F}_۳$ حذف شود، بزرگی شتاب جسم چند برابر خواهد شد؟

نکته: رابطهٔ مربوط به قانون دوم نیوتون را می‌توان به صورت غیر برداری $|\vec{F}_{net}|=m|\vec{a}|$ نیز مورد استفاده قرار داد.

مثال ۳

جسمی تحت تأثیر سه نیروی $\vec{F}_۱=\alpha\vec{\mathbf{i}}+۳\vec{\mathbf{j}}$، $\vec{F}_۲=۴\vec{\mathbf{i}}-۳\vec{\mathbf{j}}$ و $\vec{F}_۳=-\vec{\mathbf{i}}+\beta\vec{\mathbf{j}}$ قرار دارد (نیروها برحسب نیوتون هستند.) و جسم ساکن است. اگر نیروی $\vec{F}_۱$ را حذف کنیم، شتاب جسم، $a_۱$ و اگر نیروی $\vec{F}_۳$ را حذف کنیم، شتاب جسم، $a_۲$ می‌شود. نسبت $\frac{a_۳}{a_۱}$ را بیابید.

مثال ۴

نیروی F، به جسمی به جرم m، شتاب a و به جسمی به جرم $m-۲$، شتاب $\frac{۳}{۲}a$ می‌دهد. m را بیابید. (تمامی کمیت‌ها بر حسب یکای آنها در SI بیان شده است.)

مثال ۵

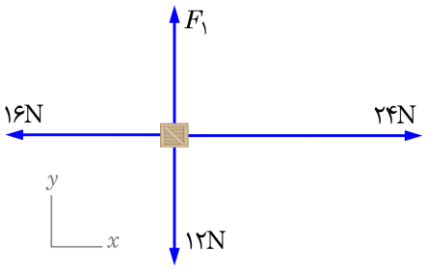
نیروی F، به جسمی به جرم $m_۱$، شتاب $۲\frac{m}{s^۲}$ و به جسمی به جرم $m_۲$ شتاب $۳\frac{m}{s^۲}$ می‌دهد. این نیرو به جسمی به جرم $۴m_۱+۹m_۲$ چه شتابی می‌دهد؟

مثال ۶

بردار مکان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، در SI به صورت $\vec{x}=(۲t^۲+۶t+۳)\vec{i}$ و جرم جسم $۲\,kg$ است. برآیند نیروهای وارد بر جسم را هنگامی که تندی متحرک $۱۴\frac{m}{s}$ می‌شود، تعیین کنید.

مثال ۷

مطابق شکل چهار نیروی ثابت به جسمی به جرم $۵\,kg$ وارد شده و جسم در راستای محور x شتاب گرفته است. اگر بخواهیم اندازهٔ شتاب جسم $۱/۴\frac{m}{s^۲}$ بیشتر شود و جهت آن در راستای محور y قرار گیرد، حداقل چند نیوتون دیگر باید به جسم نیرو وارد کنیم؟



مثال ۸

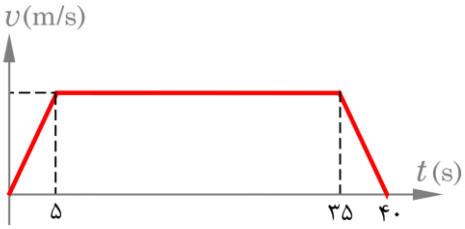
چهار نیروی $F_1 = 7\,N$، $F_2 = 6\,N$، $F_3 = 12\,N$ و $F_4 = 10\,N$ به جسمی به جرم $4\,kg$ اثر می‌کند و جسم ساکن است.

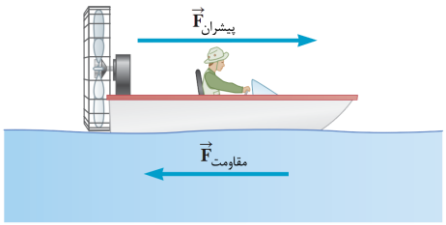
الف) هرگاه نیروی F_3 حذف شود، شتاب جسم چه‌قدر می‌شود؟

ب) اگر بدون تغییر جهت، اندازهٔ نیروهای F_1، F_2 و F_3 سه برابر شود، شتاب جسم چقدر می‌شود؟

مثال ۹

نمودار سرعت ـ زمان حرکت یک قایق موتوری که جرم آن با سرنشینش $400\,kg$ است و در آب ساکن حرکت می‌کند، بین دو نقطه که در فاصلهٔ $350\,m$ از هم قرار دارند، مطابق شکل است. اگر مقاومت آب در مقابل حرکت قایق ثابت باشد و قایق‌ران برای توقف کردن در مقصد، موتور خود را خاموش کند، ...





الف) بیشینهٔ تندی قایق چقدر است؟

ب) شتاب حرکت قایق در هر مرحله را تعیین کنید.

پ) در لحظات $t = 2\,s$ و $t = 20\,s$ نیروی پیشران موتور قایق چند نیوتون است؟

مثال ۱۰

اتومبیلی به جرم ۲ تن در جادّه‌ای افقی با تندی $۷۲\frac{\text{km}}{\text{h}}$ حرکت می‌کند. در یک لحظه، راننده ترمز می‌کند و اتومبیل با شتاب ثابت، پس از ۱۰s متوقف می‌شود. برآیند نیروهایی که اتومبیل را از حرکت بازداشته چند نیوتون است؟

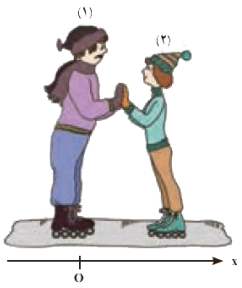
۳. قانون سوّم نیوتون

هنگامی که دو جسم یکدیگر را می‌کشند و یا می‌رانند، می‌گوییم با هم اندرکنش دارند. نیروها همواره به صورت جفت وجود دارند. اگر یکی از نیروها را کُنش بنامیم، نیروی دیگر واکنش نامیده می‌شود. بر طبق قانون سوم نیوتون، **اگر جسمی به جسم دیگر نیرو وارد کند، جسم دون نیز به جسم اول نیرویی هم‌اندازه و هم‌راستا اما در خلاف جهت وارد می‌کند.** به عبارت دیگر، اگر جسم A به جسم B نیروی $\vec{F}_{AB}$ را وارد کند، جسم B نیز به جسم A نیرویی درخلاف جهت و هم اندازهٔ آن ($\vec{F}_{BA}$) وارد می‌کند. و در اینصورت داریم:

$$\vec{F}_{AB}=-\vec{F}_{BA} \quad \Rightarrow \quad F_{AB}=F_{BA} \qquad (۲\text{-}۱۱)$$

نکته: توجه داریم که نیروهای کنش و واکنش (عمل و عکس‌العمل) هم‌نوع‌اند. همچنین در استفاده از قانون سوّم نیوتون باید توجه داشت که نیروهای عمل و عکس‌العمل هر چند مساوی و در خلاف جهت هستند، هیچ‌گاه یکدیگر را خنثی نمی‌کنند؛ زیرا این دو نیرو به دو جسم مختلف وارد می‌شوند.

مثال ۱۱



دو شخص به جرم‌های ۸۰kg و ۴۰kg با کفش‌های چرخ‌دار در یک سالن مسطح و صاف روبه‌روی هم ایستاده‌اند. شخص اول با نیروی ۱۰۰N شخص دوم را به طرف راست هُل می‌دهد. شتاب هر کدام از افراد را تعیین کنید.

مثال ۱۲

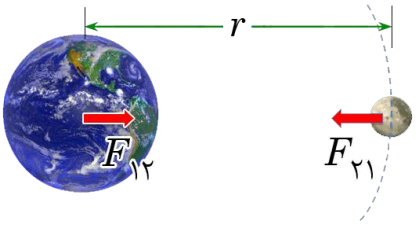
شخصی به جرم ۸۰kg که روی سطح افقی بدون اصطکاکی ساکن است، ناگهان توپی به جرم ۱۶۰g را با سرعت افقی $۲۰\frac{\text{m}}{\text{s}}$ به سمت جلو پرتاب می‌کند. این شخص با چه سرعتی و در چه جهتی رانده می‌شود؟

۱۱-۲. معرّفی برخی از نیروهای خاص

در ادامهٔ بحث، به معرّفی تعدادی از نیروها می‌پردازیم که در مکانیک مطرح می‌شود. این نیروها عبارتند از: *نیروی گرانش نیوتون*، نیروی مقاومت شاره، *نیروی عمودی سطح*، *نیروی اصطکاک (ایستایی و جنبشی)*، *نیروی کشش نخ* و *نیروی کشش فنر*.

نیروهایی مانند نیروی الکتریکی، نیروی مغناطیسی و نیروی هسته‌ای نیز در بخش‌های دیگر فیزیک بررسی می‌شود.

۱. نیروی گرانش نیوتون



برطبق قانون گرانش نیوتون، هرگاه دو جسم به جرم‌های $m_۱$ و $m_۲$ در فاصلهٔ r از یکدیگر قرار داشته باشند، یکدیگر را با نیرویی می‌رُبایند که این نیرو با حاصلضرب جرم دو جسم، رابطهٔ مستقیم و با مجذور فاصلهٔ آنها از یکدیگر رابطهٔ وارون دارد. یعنی:

$$F = G \cdot \frac{m_۱ \cdot m_۲}{r^۲} \qquad (۳-۱۱)$$

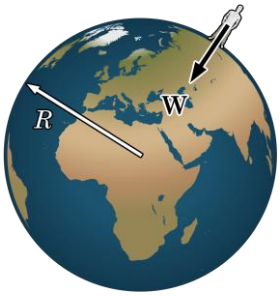
در این رابطه، G، ثابت جهانی گرانش نام دارد و مقدار آن $G = ۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} \frac{\mathrm{N\,m^۲}}{\mathrm{kg^۲}}$ است.

◈ مثال ۱۳

جرم زمین و ماه به ترتیب $۶ \times ۱۰^{۲۴}\ \mathrm{kg}$ و $۷/۴ \times ۱۰^{۲۲}\ \mathrm{kg}$ و فاصلهٔ میان ماه و زمین، $۴ \times ۱۰^{۵}\ \mathrm{km}$ است. در چه فاصله‌ای از مرکز ماه، نیروی گرانشی ماه و زمین با هم برابر است؟

۲. نیروی وزن:

هنگامی که جسمی در نزدیکی سیّاره یا جسم با جرم زیادی قرار داشته باشد، از طرف آن جسم کشیده می‌شود. این نیرو را نیروی وزن جسم می‌نامند و معمولاً آن را با $\vec{W}$ $(Weight)$ نشان می‌دهند. این نیرو را در دو وضعیّت بررسی می‌کنیم:



الف) جسم روی سطح سیّاره:

در این حالت، فاصلهٔ مراکز دو جسم، عملاً شعاع سیّاره است و بنابراین بر طبق قانون گرانش نیوتون می‌توان نوشت:

$$F = G \cdot \frac{M\,m}{R^۲} \qquad (۴-۱۱)$$

حاصل عبارت $\frac{G\,M}{R^۲}$ برای هر سیّاره مقدار ثابتی است که آن را شتاب جاذبه در سطح سیّاره می‌نامند و با g نمایش می‌دهند.

بنابراین:

$$g = \frac{G M}{R^2} \qquad (۵-۱۱)$$

و در این‌صورت برای تعیین نیروی وزن جسمی به جرم m در نزدیکی سطح سیاره خواهیم داشت:

$$W = m g \qquad (۶-۱۱)$$

مقدار g در حالتی که جسم روی سطح زمین قرار داشته باشد، برابر است با:

$$g_e = \frac{G M_e}{R_e^2} \simeq ۹/۸ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

مثال ۱۴

جرم کرهٔ زمین تقریباً ۸۰ برابر جرم کرهٔ ماه و شتاب گرانش در سطح زمین تقریباً ۶ برابر شتاب گرانش در سطح ماه است. شعاع زمین تقریباً چند برابر شعاع ماه است؟

مثال ۱۵

جرم مرّیخ تقریباً ۰/۱ جرم زمین و شعاع مریخ نصف شعاع زمین است. وزن شخصی به جرم $۵۰\,\mathrm{kg}$، در کرهٔ مرّیخ تقریباً چند نیوتون است؟

مثال ۱۶

جرم سیاره‌ای فرضی، ۸ برابر جرم زمین و چگالی متوسط آن با چگالی متوسط زمین برابر است. شتاب گرانش در سطح این سیّاره چند برابر شتاب گرانش در سطح زمین است؟

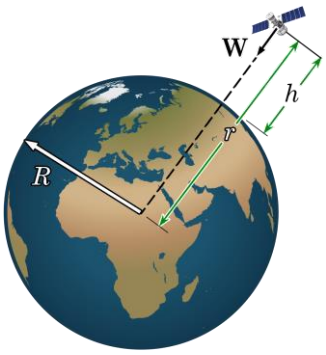
مثال ۱۷

الف) نشان دهید شتاب گرانش روی سطح سیاره‌ای به شعاع R که چگالی متوسط آن ρ است را می‌توان از رابطهٔ $g=\frac{۴}{۳}\pi G\rho R$ تعیین کرد.

ب) چگالی متوسط سیاره‌ای ۲ برابر چگالی متوسط زمین و شعاع سیاره ۲ برابر شعاع زمین است. شتاب گرانش روی سطح سیاره چند برابر شتاب گرانش روی سطح زمین است؟

ب) جسم در ارتفاع h از سطح سیّاره:

در این حالت، فاصلهٔ جسم تا مرکز سیّاره را می‌توان به صورت $r=R+h$ نوشت. بنابراین بر طبق قانون جهانی گرانش نیوتون خواهیم داشت:



$$F=G\cdot\frac{m_۱\cdot m_۲}{(R+h)^۲}$$

اگر بخواهیم مشابه حالت قبل، نیروی وزن در ارتفاع h از سطح سیّاره را به صورت $W_h=m\,g_h$ بنویسیم، در این‌صورت:

$$g_h=G\frac{M}{(R+h)^۲} \qquad (۷-۱۱)$$

نکته: با توجّه به روابطی که برای g و g_h به‌دست آمد، می‌توان نوشت:

$$\frac{W}{W_h}=\frac{g}{g_h}=\frac{G\frac{M}{R^۲}}{G\frac{M}{(R+h)^۲}}=\frac{(R+h)^۲}{R^۲}=\left(\frac{R+h}{R}\right)^۲$$

$$\frac{W}{W_h}=\frac{g}{g_h}=\left(۱+\frac{h}{R}\right)^۲ \qquad (۸-۱۱)$$

مثال ۱۸

در چه فاصله‌ای از سطح زمین (بر حسب R_e، شعاع این کره)، شتاب گرانش ۴٪ مقدار آن در سطح کره زمین است؟

مثال ۱۹

وزن سفینه‌ای در سطح سیّارهٔ پلوتون $۱۲۵۰\mathrm{N}$ و در فاصلهٔ ۴۰۰ کیلومتری سطح آن $۸۰۰\mathrm{N}$ است. قطر این سیّاره چند کیلومتر است؟

نکته: جهت نیروی وزن، همواره به سمت مرکز زمین و برای اجسامی که ما بررسی می‌کنیم، به سمت پایین و اصطلاحاً در راستای شاغول قرار دارد!

نکته: در حل مسائل دینامیک با استفاده از قوانین نیوتون، معمولاً گام‌های زیر باید طی می‌شود:

- جسم یا اجسام مورد مطالعه را مشخّص نماییم.
- نیروهای وارد بر جسم یا مجموعهٔ اجسام مورد نظر، از طرف سایر اجسام را رسم کنیم.
- یک دستگاه مختصات مناسب برای توصیف حرکت در نظر می‌گیریم.
- (نیروهایی که در راستای محورهای مختصات نیستند را روی محورها تجزیه می‌نماییم.)
- تعیین کنیم که جسم در راستای محورهای مختصات چه نوع حرکتی دارد (سکون، حرکت یکنواخت و حرکت شتاب‌دار) و متناسب با آن قوانین نیوتون را در راستای افقی و قائم به کار می‌بریم.

مثال ۲۰

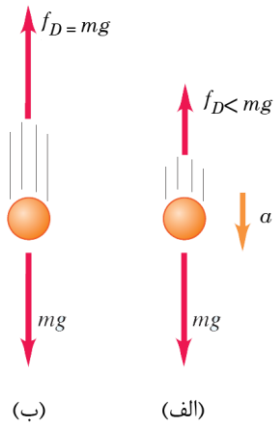
یک بالون تحقیقاتی به جرم کلی M در راستای قائم با شتاب a فرود می‌آید. چه جرمی از وزنه‌های تعادل، باید از بالون بیرون ریخته شود (m) تا بالون با شتاب ثابت a به طرف بالا حرکت کند؟ (از نیروی مقاومت هوا با بالون صرف نظر می‌شود و نیروی بالا بر بالون در هر دو حالت ثابت است.)

* این مثال بالا را به ازای $M=۵۰۰۰\mathrm{kg}$ ، $a=۰/۵\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^۲}$ حل کنید.

۳. نیروی مقاومت شاره:

وقتی جسمی از بالای ساختمانی رها می‌شود، علاوه بر وزن جسم، نیروی دیگری از طرف هوا به جسم در خلاف جهت حرکت وارد می‌شود. به طور کلی وقتی جسمی در یک شاره (مایع یا گاز) قرار دارد و نسبت به آن حرکت می‌کند، از طرف شاره نیرویی در خلاف جهت حرکت جسم، به آن وارد می‌شود که به آن نیروی مقاومت شاره می‌گویند و معمولاً آن را با $\vec{f}_D$ نمایش می‌دهند.

نیروی مقاومت شاره به بزرگی جسم، تندی آن و... بستگی دارد. هر چه تندی جسم بیشتر باشد، نیروی مقاومت شاره بیشتر خواهد شد. همان طور که می‌دانیم اگر جسم در هوا حرکت کند، به این نیرو، نیروی مقاومت هوا می‌گویند.



نکته: تندی جسمی که درون هوا، از حال سکون سقوط می‌کند، به تدریج افزایش می‌یابد (شکل الف) و نیروی مقاومت هوا نیز زیاد می‌شود تا آنکه پس از طی مسافت کافی، نیروی مقاومت هوا با نیروی وزن جسم برابر شود (شکل ب). در اینصورت برایند نیروهای عمودی وارد بر جسم صفر خواهد شد و بر طبق قانون دوم نیوتون، شتاب نیز صفر می‌شود و سرعت جسم تغییر نخواهد کرد. در این حالت، جسم با یک تندی ثابت موسوم به تندی حد (v_t) به حرکت خود ادامه می‌دهد و پایین می‌آید.

تندی حد برای برخی از اجسامی که در هوا سقوط می‌کنند، در جدول مقابل آمده است.

تندی حد برای چند جسم در هوا

جسم	تندی حد (m/s)
وزنهٔ ۷ کیلوگرمی	۱۴۵
سقوط آزاد انسان	۶۰
توپ تنیس	۳۱
توپ بسکتبال	۲۰
توپ پینگ پنگ	۹
قطرهٔ باران	۷
چترباز	۵

مثال ۲۱

با رسم نیروهای وارد بر ذره، حرکت یک قطرهٔ باران از لحظهٔ رها شدن تا لحظهٔ برخورد به زمین را بررسی کنید و ...

الف) عبارت زیر را برای آن کامل نمایید.

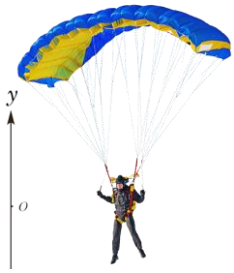
- در لحظهٔ رها شدن قطره، تندی آن ..... است و در نتیجه نیروی مقاومت هوا در مقابل حرکت وجود ندارد و شتاب جسم در این لحظه، ..... خواهد بود. به تدریج که قطره سقوط می‌کند، تندی ذره ..... می‌یابد و بنابراین، نیروی مقاومت هوا ..... می‌شود و شتاب حرکت ..... می‌یابد. (حرکت .....شونده و شتاب در حال ..... است). این وضعیت ادامه می‌یابد تا زمانی‌که نیروی مقاومت هوا ..... نیروی وزن شود. در این لحظه برایند نیروهای وارد بر قطره ..... خواهد شد و پس از آن، شتاب ذره ..... می‌شود و جسم با ..... ثابتی در حدود ۷ متر بر ثانیه به زمین می‌رسد.

ب) نمودار تقریبی تندی قطره برحسب زمان را برای آن رسم نمایید.

مثال ۲۲

دو گوی هم‌اندازه را که جرم یکی دو برابر دیگری است ($m_۲ = ۲m_۱$) از بالای برجی به ارتفاع h به طور هم زمان رها می‌کنیم. با فرض اینکه نیروی مقاومت هوا در طی حرکت دو گوی ثابت و یکسان باشد، تندی برخورد کدام گوی با زمین بیشتر است؟ چرا؟

مثال ۲۳



چتربازی به جرم ۶۰kg مدتی پس از یک پرش آزاد، چترش را باز می‌کند. ناگهان نیروی مقاومت هوا به ۱۱۴۰N افزایش می‌یابد. شتاب چترباز را در این لحظه به دست آورید. ($g = ۱۰\frac{\text{m}}{\text{s}^۲}$)

مثال ۲۴

چتربازی از یک بالگرد تقریباً ساکن که در ارتفاع نسبتاً زیادی قرار دارد، به بیرون می‌پرد و پس از مدتی چتر خود را باز می‌کند و در امتداد قائم سقوط می‌نماید.

الف) حرکت چترباز را از لحظهٔ پرش تا رسیدن به زمین تحلیل کنید.

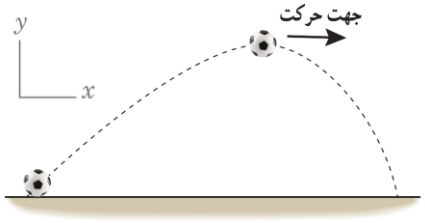
ب) نموداری تقریبی از تندی آن برحسب زمان رسم نمایید.

مثال ۲۵

اگر برای جسمی به جرم $m = ۱۰\text{g}$ که در هوا سقوط می‌کند، نیروی مقاومت هوا از رابطهٔ $f_D = ۰/۰۵v^۲$ تعیین شود، تندی حدی حرکت این جسم در هوا چند متر بر ثانیه است؟ ($g = ۱۰\frac{\text{m}}{\text{s}^۲}$)

مثال ۲۶

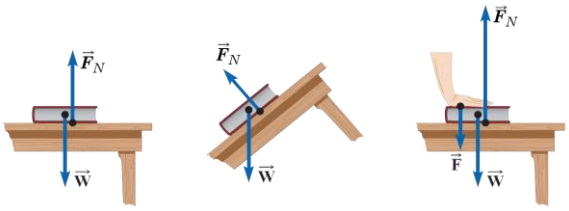
در شکل مقابل، مسیر حرکت توپی به جرم $m = ۴۰۰\,g$ نشان داده شده است. اگر بزرگی شتاب توپ در این لحظه، $a = ۱۲/۵\,\frac{m}{s^۲}$ باشد، اندازهٔ نیروی مقاومت هوا در نقطهٔ اوج توپ چند نیوتون است؟ $(g = ۱۰\,\frac{m}{s^۲})$



۴. نیروی عمودی سطح (تکیه‌گاه):

هرگاه جسمی بر روی سطحی قرار داشته باشد، از طرف سطح نیرویی در راستای عمود بر سطح و به طرف خارج سطح، به آن جسم وارد می‌شود که آن را نیروی عمودی سطح یا نیروی عمودی تکیه‌گاه می‌نامیم و معمولاً آن را با $\vec{F}_N$ نمایش می‌دهیم.

توجه به این نکته ضروری است که *هیچ رابطه‌ای برای تعیین اندازهٔ این نیرو وجود ندارد!* و مقدار آن فقط به کمک قوانین نیوتون تعیین می‌شود.



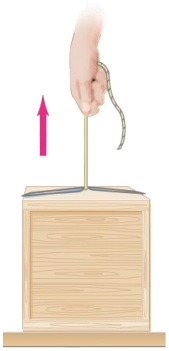
نکته: عکس‌العمل نیروی عمودی تکیه‌گاه، نیرویی است که از طرف جسم بر سطح، به صورت عمودی و به طرف درون سطح وارد می‌شود و این نیرو هیچ ارتباطی با نیروی وزن جسم ندارد. لذا *هیچ‌گاه نیروی وزن، عکس‌العمل نیروی عمودی سطح نیست.*

مثال ۲۷

مطابق شکل، جعبه‌ای به جرم $۴\,kg$ روی میزی افقی قرار دارد. در هرکدام از حالت‌های زیر، نیروی عمودی سطح را تعیین کنید.

نکته: در حالتی‌که جسم روی سطح قرار دارد، $F_N > 0$ است. اگر بخواهیم حالتی را در نظر بگیریم که جسم در آستانهٔ جدا شدن از سطح قرار می‌گیرد، باید شرط $F_N = 0$ را اعمال نماییم.

مثال ۲۸



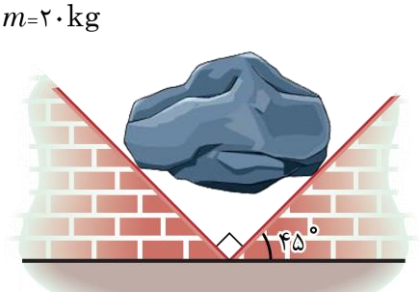
در شکل مقابل، $m = 2/5\,\text{kg}$ است.

الف) حداکثر نیروی F چند نیوتون باشد تا جسم از سطح جدا نشود؟ $(g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2})$

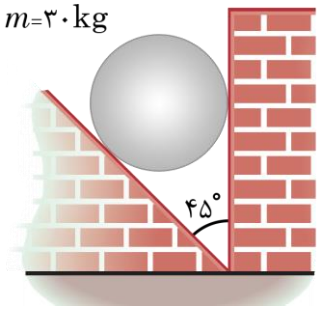
ب) وضعیت حرکت جسم را به ازای $F = 30\,\text{N}$ توصیف کنید.

مثال ۲۹

در هرکدام از شکل‌های زیر، نیرویی که از طرف هر سطح به جسم وارد می‌شود را تعیین کنید. $(g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2})$



(الف)



(ب)

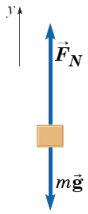
نکته: به نیرویی که جسم به سطح تکیه‌گاه خود وارد می‌کند، اصطلاحاً وزن ظاهری جسم گفته می‌شود، که هم‌اندازهٔ نیروی عمودی تکیه‌گاه است. اگر شخصی روی یک ترازوی فنری قرار داشته باشد، ترازو عملاً وزن ظاهری شخص را اندازه‌گیری می‌نماید.

هنگامی که جسم روی سطح افقیِ ساکن قرار دارد یا زمانی که سطح افقی با سرعت ثابت به طرف بالا یا پایین حرکت کند (مانند زمانی که جسم، درون آسانسور قرار دارد و آسانسور با سرعت ثابت حرکت می‌کند)، برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر است و بنابراین وزن ظاهری با وزن واقعی برابر است و در اینصورت داریم:

$$F_N = mg$$

اما اگر سطح با شتاب ثابت حرکت کند، وزن ظاهری با وزن واقعی برابر نخواهد شد و در این‌صورت می‌توان دو حالت را تصوّر کرد:

(الف)

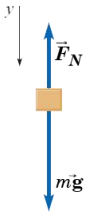


الف) تکیه‌گاه با شتاب ثابتِ به طرف بالایِ a حرکت نماید. در اینصورت برایند نیروهای وارد بر جسم، به طرف بالا خواهد بود و $F_N > mg$ است. اگر جهت مثبت دستگاه مختصات را به طرف بالا انتخاب نماییم، می‌توان نوشت:

$$F_N - mg = ma \quad \Rightarrow \quad F_N = m(g+a)$$

دقت کنید که وقتی آسانسور از حال سکون شروع به حرکت به طرف بالا می‌کند (حرکت تندشونده رو به بالا) یا در هنگام حرکت رو به پایین متوقف می‌شود (حرکت کندشونده رو به پایین)، جهت شتاب رو به بالا است،

(ب)



ب) تکیه‌گاه با شتاب ثابتِ به طرف پایینِ a حرکت نماید. در اینصورت برایند نیروهای وارد بر جسم، به طرف پایین خواهد بود و $F_N < mg$ است. اگر جهت مثبت دستگاه مختصات را به طرف پایین انتخاب نماییم، خواهیم داشت:

$$mg - F_N = ma \quad \Rightarrow \quad F_N = m(g-a)$$

در اینجا نیز دقت کنید که وقتی آسانسور از حال سکون شروع به حرکت به طرف پایین می‌کند (حرکت تندشونده رو به پایین) یا در هنگام حرکت رو به بالا متوقف می‌شود (حرکت کندشونده رو به بالا)، جهت شتاب رو به پایین است،

نکته: می‌توان این دو رابطه را به صورت خلاصهٔ زیر نوشت و برای تعیین وزن ظاهری در آسانسور (و سایر موارد مشابه) به کار برد:

$$F_N = m(g \pm a) \qquad (۹-۱۱)$$

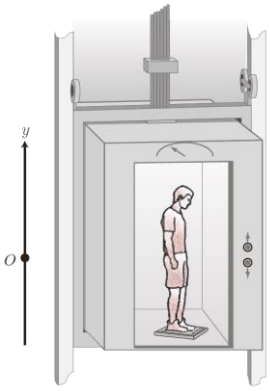
هنگام استفاده از این رابطه باید توجّه داشت که:

- علامت مثبت ($+$) برای زمانی است که آسانسور به طرف بالا حرکت می‌کند و علامت منفی ($-$) زمانی به کار می‌رود که آسانسور در حال حرکت به طرف پایین است. (به عبارت دیگر این علامت، بر اساس جهت حرکت آسانسور تعیین می‌گردد و ربطی به تند یا کند شونده بودن نوع حرکت ندارد.)
- برای حالتی که آسانسور شروع به حرکت می‌کند و حرکت تند شونده است، $a > 0$ و برای حالتی که آسانسور در حال توقف و حرکت کند شونده است، $a < 0$ در نظر گرفته شود.

مثال ۳۰

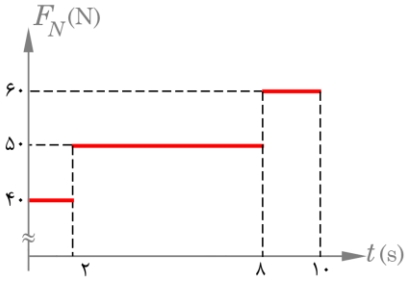
شخصی به جرم $۸۰\,\mathrm{kg}$ روی یک ترازو، درون آسانسوری ایستاده است. آسانسور قسمتی از مسیر را با شتاب ثابت $۱/۵\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^۲}$ به طرف بالا می‌رود و سپس حرکت خود را با شتاب $۲/۰\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^۲}$ کند کرده و متوقف می‌شود. اختلاف وزنی که ترازو در این دو حالت نشان می‌دهد، چند نیوتون است؟ $(g = ۱۰\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^۲})$

مثال ۳۱



شخصی به جرم $۴۸\,\mathrm{kg}$ درون آسانسوری روی یک ترازو ایستاده است. اگر ترازو وزن او را $۶۰۰\,\mathrm{N}$ نشان دهد، در مورد شتاب آسانسور و جهت حرکت آن چه می‌توان گفت؟ بردار شتاب حرکت آسانسور را تعیین کنید. $(g = ۱۰\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^۲})$

مثال ۳۲

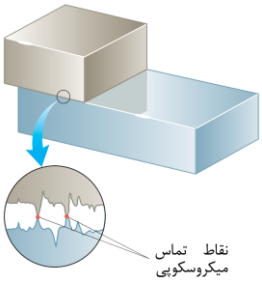


نمودار وزن ظاهری بر حسب زمان برای جسمی به جرم $۵\,\mathrm{kg}$ که درون آسانسوری قرار دارد و آسانسور از حال سکون به طرف پایین شروع به حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. $(g = ۱۰\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^۲})$

الف) نمودار سرعت ـ زمان را برای این آسانسور رسم کنید.

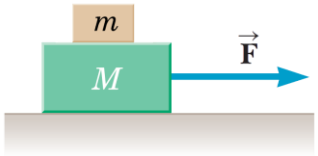
ب) آسانسور در این مدت چند متر جابه‌جا شده است؟

۵. نیروی اصطکاک:



هنگامی که بخواهیم دو جسم را بر روی یکدیگر به حرکت در آوریم، در سطح تماس دو جسم، به دلیل وجود نیروهای الکترومغناطیسی بین مولکول‌های سازندهٔ ماده، نیرویی در امتداد سطح ایجاد می‌شود که تمایل دارد از لغزش دو جسم نسبت به هم جلوگیری کند. این نیرو را نیروی اصطکاک می‌نامیم و معمولاً آن را با f نمایش می‌دهیم.

توجّه به این نکته بسیار مهم است که نیروی اصطکاک، در مقابل حرکت یک جسم نسبت به جسم دیگر (مثلاً سطح تکیه‌گاه) مخالفت می‌کند، امّا گاهی اوقات، خود این نیرو سبب حرکت جسم خواهد شد!

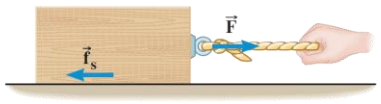


برای مثال، در شکل مقابل، اگر اصطکاکی بین دو جسم وجود نداشته باشد، جسم بالای حرکت نخواهد کرد. یا مثلاً اگر اصطکاک بین لاستیک اتومبیل و سطح جاده وجود نداشته باشد، چرخ‌های اتومبیل در جای خود می‌چرخند و اتومبیل حرکت نخواهد کرد. راه رفتن ما بر روی سطح زمین نیز به کمک نیروی اصطکاک صورت می‌گیرد.

معمولاً نیروی اصطکاک میان دو جسم را نسبت به آنکه جسم مورد نظر، روی سطح تماس خود ساکن باشد یا حرکت نماید، در دو وضعیّت بررسی می‌کنند؛ زیرا رفتار این نیرو، تابع این وضعیّت‌ها است:

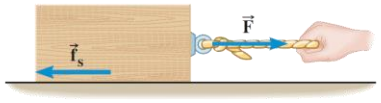
الف) اصطکاک ایستایی

زمانی که جسم نسبت به سطح تیکه‌گاهش حرکت نکند، نیروی اصطکاک را اصطکاک ایستایی می‌نامیم و با f_s نمایش می‌هیم. اندازه و جهت این نیرو به‌گونه‌ای است که قوانین نیوتون برقرار بمانند. به عبارت دیگر مقدار این نیرو را فقط می‌توان به کمک قوانین نیوتون تعیین کرد و در حالت کلی رابطهٔ خاصی برای آن وجود ندارد.



جسم، ساکن است

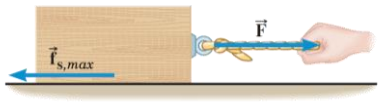
برای درک ماهیّت این نیرو، جسمی را در نظر می‌گیریم که روی یک سطح افقی در حال سکون قرار دارد. نیروهای وارد بر این جسم (F_N و W) با یکدیگر برابرند و جسم در تعادل خواهد بود و در این حالت، $f_s = 0$ است. اکنون اگر نیروی افقی F را به جسم وارد کنیم و جسم همچنان ساکن باشد، در این‌صورت با توجّه به قوانین نیوتون می‌توان نتیجه گرفت:



جسم، ساکن است

$$(F_{net})_x = 0 \Rightarrow \quad F - f_s = 0 \quad \Rightarrow \quad f_s = F$$

اگر در همین حالت، نیروی F را افزایش دهیم، تا زمانی که جسم ساکن است، نیروی اصطکاک ایستایی نیز به تدریج افزایش می‌یابد و در هر حالت نیروی اصطکاک ایستایی، با نیروی افقی وارد بر جسم برابر است.



جسم، ساکن و در آستانه‌ی حرکت است

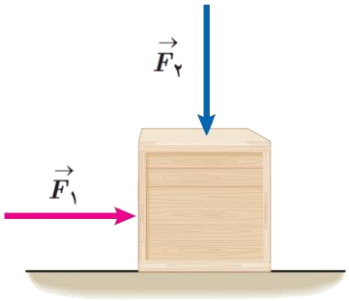
این وضعیّت تا زمانی که جسم در آستانهٔ حرکت قرار گیرد ادامه خواهد داشت. در این موقعیّت نیروی اصطکاک ایستایی در حالت بیشینه خواهد بود و داریم:

$$f_{s,\max} = \mu_s F_N \qquad (۱۰-۱۱)$$

در این رابطه، μ_s ضریب اصطکاک ایستایی نامیده می‌شود که کمیّتی بدون واحد است و مقدار آن به جنس دو سطح بستگی دارد.

نکته: در مواردی که نمی‌دانیم نیروی وارد بر جسم می‌تواند سبب حرکت آن شود یا نه، لازم است ابتدا نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه ($f_{s,\max}$) را محاسبه کرده و با نیروی وارد شده بر جسم مقایسه نماییم. اگر نیروی وارد بر جسم کمتر از نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه ($f_{s,\max}$) باشد، جسم حرکت نخواهد کرد، شتاب آن صفر است و نیروی اصطکاک وارد بر جسم را باید با استفاده از قانون دوم نیوتون ($F_{net}=۰$) تعیین کنیم.

مثال ۳۳



در شکل زیر، نیروی $\vec{F}_۱$ بر جعبه وارد شده است، اما جعبه همچنان ساکن است. اگر در همین حالت بزرگی نیروی قائم $\vec{F}_۲$، از صفر شروع به افزایش کند، کمیت‌های زیر چگونه تغییر می‌کنند؟

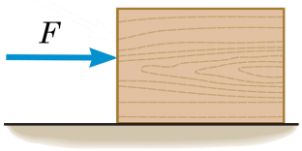
الف) اندازهٔ نیروی عمودی سطح وارد بر جعبه.

ب) اندازهٔ نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر جعبه.

پ) اندازهٔ بیشینهٔ نیروی اصطکاک ایستایی.

ت) نیروی خالص وارد بر جسم.

مثال ۳۴



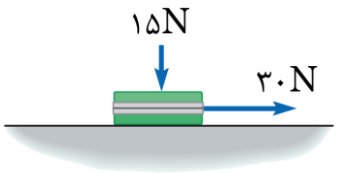
در شکل مقابل، $m=۶\,\mathrm{kg}$ و ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح، $\mu_s=۰/۴$ است. در هرکدام از حالت‌های زیر، شتاب حرکت جسم و نیروی اصطکاک وارد بر آن را تعیین کنید:

الف) $F=۱۵\,\mathrm{N}$.

ب) $F=۲۰\,\mathrm{N}$.

پ) $F=۲۴\,\mathrm{N}$. $\left(g=۱۰\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^۲}\right)$

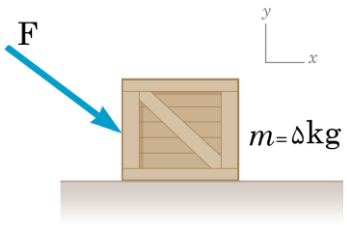
مثال ۳۵



در شکل مقابل، جسم ۳/۵ کیلوگرمی روی سطح افقی قرار دارد و در اثر نیروهای وارد بر آن، در آستانهٔ حرکت است. ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح را بیابید. $\left(g=۱۰\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^۲}\right)$

مثال ۳۶

در شکل مقابل، نیروی $\vec{F}=(۴۰\text{N})\vec{\mathbf{i}}+(-۳۰\text{N})\vec{\mathbf{j}}$ به جسم وارد می‌شود و جسم در آستانهٔ حرکت است. $g=۱۰\frac{\text{m}}{\text{s}^۲}$

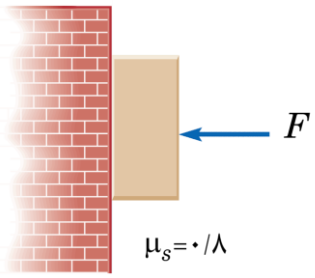


الف) ضریب اصطکاک ایستای سطح را تعیین کنید.

ب) اگر بدون تغییر جهت نیروی F، فقط بزرگی آن را ۲۰ ٪ کاهش دهیم، نیروی اصطکاک چند نیوتون می‌شود؟

مثال ۳۷

در شکل مقابل، جرم وزنهٔ کنار دیوار، $m=۲\text{kg}$ است. $(g=۱۰\frac{\text{m}}{\text{s}^۲})$

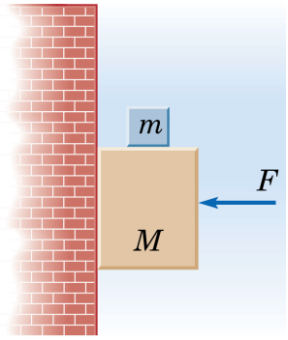


الف) حداقل نیروی F چند نیوتون باشد تا جسم حرکت نکند؟

ب) اگر $F=۳۰\text{N}$ باشد، نیروی اصطکاک وارد بر جسم چند نیوتون است؟

پ) اگر به تدریج نیروی افقی را افزایش دهیم، نیروی اصطکاک وارد بر جسم چگونه تغییر خواهد کرد؟ چرا؟

مثال ۳۸

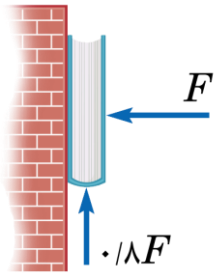


در شکل مقابل، $F = ۲۰۰\,\mathrm{N}$ و ضریب اصطکاک بین جسم و دیوار $۰/۳$ است. ($g = ۱۰\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^۲}$)

الف) حداکثر جرم m چه‌قدر باشد تا جرم $M = ۴\,\mathrm{kg}$ حرکت نکند؟

ب) به ازای $m = ۱/۵\,\mathrm{kg}$، نیروی اصطکاک ایستایی وارد بر جسم کیلوگرمی چند نیوتون است؟

مثال ۳۹



در شکل مقابل، کتابی به جرم $۲/۲\,\mathrm{kg}$ توسط نیروی افقی به دیوار فشرده می‌شود و ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح کتاب $\mu_s = ۰/۳$ است.

الف) حداقل و حداکثر F چقدر باشد تا جسم حرکت نکند؟

ب) به ازای چه مقداری از نیروی اصطکاک بین کتاب و دیوار صفر می‌شود؟ ($g = ۱۰\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^۲}$)

مثال ۴۰

در شکل مقابل، ضریب اصطکاک ایستایی بین دو سطح، μ_s است و سطح افقی اصطکاک ندارد.

الف) حداقل شتاب حرکت جسم‌ها را به گونه‌ای تعیین کنید که جسم با جرم m نسبت به جسم دیگر حرکت نکند.

ب) اگر شتاب جسم، بیش از شتاب به دست آمده در قسمت الف باشد، نیروی اصطکاک بین دو سطح چقدر خواهد شد؟

پ) قسمت‌های الف و ب را به ازای $m = ۲/۵\,\text{kg}$ و $\mu_s = ۰/۴$ حل کنید.

مثال ۴۱

مطابق شکل، کامیونی به شتاب $\vec{a} = (۲/۵\frac{\text{m}}{\text{s}^۲})\vec{\mathbf{i}}$ در حرکت است. قطعه چوبی به جرم ۶ کیلوگرم را با نیروی F روی دیوارهٔ عقب واگن نگه داشته‌ایم. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و دیواره ۰/۸ باشد، ... ($g = ۱۰\frac{\text{m}}{\text{s}^۲}$)

الف) حداقل مقدار F را به گونه‌ای تعیین کنید که قطعه چوب سر نخورد.

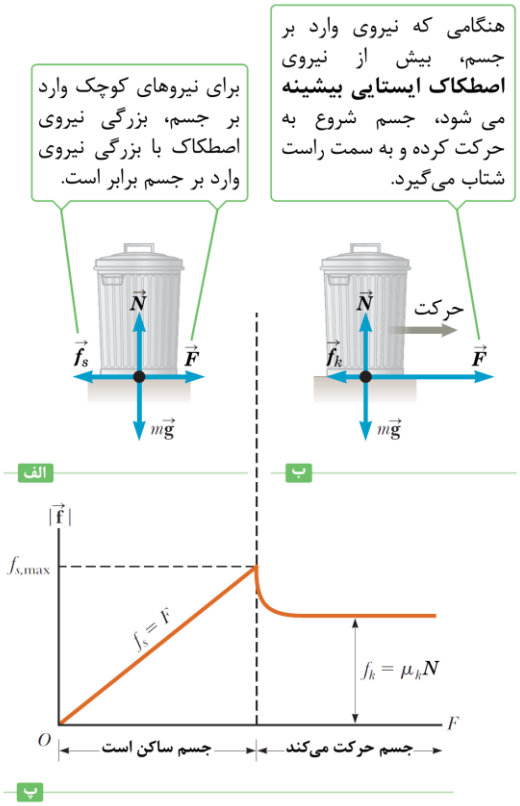
ب) اگر بخواهیم همین جسم را روی دیوارهٔ جلویی ساکن نگه‌داریم، حداقل مقدار F چند نیوتون است؟

ب) اصطکاک جنبشی

هرگاه جسم نسبت به سطح تماس و تکیه‌گاه خود حرکت داشته باشد، نیرویی در خلاف جهت حرکت جسم، در امتداد سطح به جسم وارد می‌شود که آن را نیروی اصطکاک جنبشی می‌نامند. مقدار این نیرو از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود:

$$f_k = \mu_k F_N \qquad (۱۱\text{-}۱۱)$$

در اینجا نیز μ_k را ضریب اصطکاک جنبشی می‌نامیم. آزمایش نشان می‌دهد که معمولاً $\mu_s > \mu_k$ است.

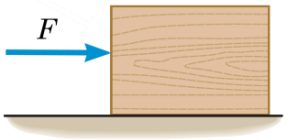


نکته: نمودار تغییرات نیروی اصطکاک بر حسب نیروی افقی وارد بر جسمی که روی سطح افقی قرار دارد، مطابق شکل مقابل است.

ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی برای برخی از سطح‌ها در جدول زیر داده شده است. دقت کنید که ضریب اصطکاک می‌تواند مقداری بیش از ۱ هم داشته باشد.

جنس دو سطح تماس	μ_k	μ_s
فولاد بر فولاد	۰/۵۷	۰/۷۴
فولاد بر آلومینیوم	۰/۴۷	۰/۶۱
فولاد بر مس	۰/۳۶	۰/۵۳
مس بر چدن	۰/۲۹	۱/۰۵
مس بر شیشه	۰/۵۳	۰/۶۸
شیشه بر شیشه	۰/۴۰	۰/۹۴
لاستیک بر بتون تر	۰/۲۵	۰/۳۰
لاستیک بر بتون خشک	۰/۸	۱/۰
تفلون بر تفلون	۰/۰۴	۰/۰۴

مثال ۴۲



در شکل مقابل، $m = ۱۰\,\text{kg}$ و ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح، $\mu_k = ۰/۳$ است. اگر به ازای $F = ۴۰\,\text{N}$، جسم در آستانهٔ حرکت قرار داشته باشد، ... ($g = ۱۰\,\frac{\text{m}}{\text{s}^۲}$)

الف) ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح را تعیین کنید.

ب) اگر $F = ۵۰\,\text{N}$ باشد، نیروی اصطکاک و شتاب حرکت جسم را به دست آورید.

پ) نیروی F را (نسبت به حالت قبل) چند درصد افزایش دهیم تا شتاب حرکت جسم ۲۰ درصد زیاد شود؟

مثال ۴۳

مطابق شکل، جسمی به جرم m با تندی v_0 روی یک سطح افقی به ضریب اصطکاک جنبشی μ_k پرتاب می‌شود.

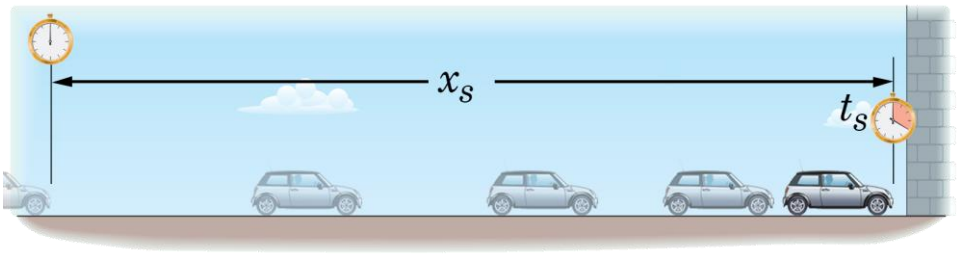
الف) نشان دهید شتاب توقف این جسم روی سطح افقی از رابطهٔ $a = -\mu_k g$ تعیین می‌شود.

ب) این رابطه را به خاطر بسپارید!

نکته: با توجه به مثال بالا معلوم می‌شود که در چنین شرایطی، با استفاده از روابطی که در مبحث حرکت‌شناسی بیان شد، مسافت و زمان توقف جسم را می‌توان به صورت زیر تعیین کرد:

$$\Delta x_s = \frac{v_0^2}{2\mu_k g} \quad , \quad \Delta t_s = \frac{v_0}{\mu_k g} \qquad (۱۲\text{-}۱۱)$$

توجّه شود که شتاب توقف، زمان توقف و مسافت توقف، ارتباطی با جرم جسم ندارد.



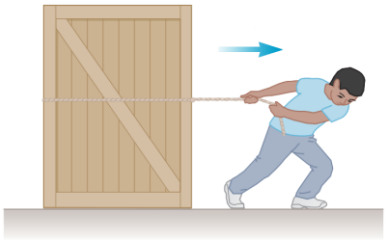
مثال ۴۴

اتومبیلی به جرم ۲ تن، در مسیر افقی با تندی ثابت در حرکت است. راننده ناگهان ترمز می‌کند، چرخ‌های اتومبیل قفل می‌شود و اتومبیل پس از طی مسافت ۴۰ متر و در مدت ۴ ثانیه متوقف می‌شود. ($g = ۱۰ \frac{m}{s^2}$)

الف) ضریب اصطکاک جنبشی سطح چه‌قدر است؟

ب) مسافت طی شده توسط این متحرک در دو ثانیهٔ آخر حرکتش چند متر است؟

مثال ۴۵



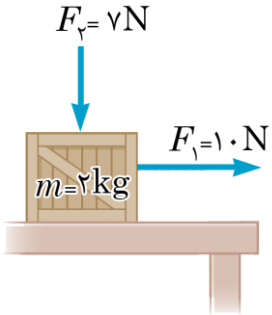
در شکل مقابل، شخصی با یک نیروی افقیِ ۳۴۴ نیوتونی، در حال کشیدن جعبه‌ای به جرم $۸۰\,\text{kg}$، روی یک سطح افقی به ضریب اصطکاک جنبشی ۰/۴ است. ($g = ۱۰\,\frac{\text{m}}{\text{s}^۲}$)

الف) نیروی اصطکاک وارد بر جعبه و شتاب حرکت آن را تعیین کنید.

ب) اگر پس از گذشت ۱۰ ثانیه از شروع حرکت، ریسمان پاره شود، جعبه پس از چه مدت و طی چه مسافتی متوقف خواهد شد؟

پ) نمودار سرعت ـ زمان را برای این متحرک رسم نمایید و کل مسافت طی شده از لحظهٔ شروع حرکت تا توقف را تعیین کنید. سرعت متوسط جسم در کل این مدت چقدر است؟

مثال ۴۶



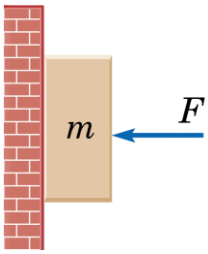
در شکل مقابل، جسم با شتاب ثابت $۰/۵\,\frac{\text{m}}{\text{s}^۲}$ حرکت می‌کند. ($g = ۱۰\,\frac{\text{m}}{\text{s}^۲}$)

الف) ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح میز چقدر است؟

ب) اگر بزرگی نیروی افقی $F_۱$ را ۱ نیوتون افزایش دهیم، شتاب حرکت جسم چقدر تغییر می کند؟

پ) نیروی عمودی $F_۲$ را حداکثر چند نیوتون افزایش دهیم تا تندی جسم کم نشود؟

مثال ۴۷



در شکل مقابل، جسم با نیروی F_1 ساکن می‌ماند، با نیروی F_2 در آستانهٔ حرکت قرار می‌گیرد و با نیروی F_3 با تندی ثابت به طرف پایین حرکت می‌کند. اگر ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین جسم و سطح، یکسان باشد، و نیروی اصطکاک در این سه حالت را به ترتیب با f_1، f_2 و f_3 نمایش دهیم، کدام گزینه درست است؟

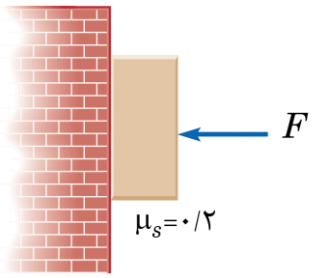
۱) $f_1 = f_2 = f_3$ و $F_1 = F_2 < F_3$

۲) $f_2 > f_1 > f_3$ و $F_1 < F_2 < F_3$

۳) $f_1 = f_3 < f_2$ و $F_1 < F_2 < F_3$

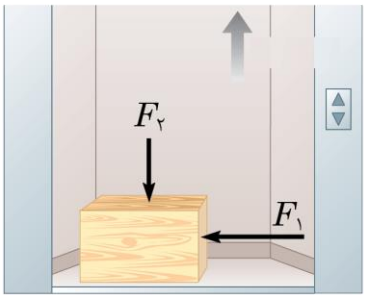
۴) $f_1 = f_2 = f_3$ و $F_1 > F_2 = F_3$

مثال ۴۸



در شکل مقابل، جسم به ازای $F = 10\,\text{N}$ در آستانهٔ لغزش به سمت پایین قرار دارد. اگر در همین وضعیت، ضربهٔ کوچکی به جسم زده شود، جسم به طرف پایین شروع به حرکت می‌کند. اگر $\mu_k = 0/15$ باشد، شتاب حرکت جسم در این حالت (حداقل شتاب جسم) را تعیین کنید. ($g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

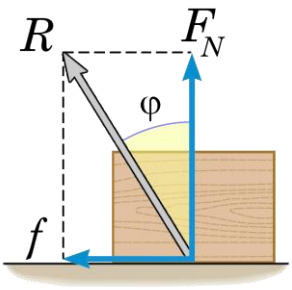
مثال ۴۹



در شکل مقابل، جسمی به جرم $m=۱۰\,\text{kg}$ درون آسانسور قرار دارد و آسانسور با شتاب $a=۱/۲\,\frac{\text{m}}{\text{s}^۲}$ به طرف بالا در حرکت است. اگر جسم تحت تاثیر دو نیروی افقی $F_۱=۶۰\,\text{N}$ و عمودی $F_۲=۳۸\,\text{N}$ در آستانهٔ حرکت باشد، ...

الف) ضریب اصطکاک ایستایی بین کف آسانسور و جسم را تعیین کنید.

ب) اگر $\mu_k=۰/۱۵$ باشد، با حذف نیروی عمودی $F_۲$، جسم با چه شتابی روی سطح آسانسور حرکت خواهد کرد؟ ($g=۱۰\,\frac{\text{m}}{\text{s}^۲}$)



نکته: نیروهای عمودی سطح و اصطکاک، نیروهایی هستند که از طرف سطح به جسم وارد می‌شوند. برآیند این دو نیرو را نیروی عکس‌العمل سطح (نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند) می‌نامیم و آن را معمولاً با R نمایش می‌دهیم. در این‌صورت:

$$\vec{R}=\vec{f}+\vec{F}_N$$

$$R=\sqrt{f^۲+{F_N}^۲} \qquad (۱۳\text{-}۱۱)$$

و بنابراین زاویهٔ میان راستای قائم و نیروی عکس‌العمل سطح (φ) از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود:

$$\tan\varphi=\frac{f}{F_N}$$

مثال ۵۰

جسمی به جرم $۲\,\text{kg}$ روی یک سطح افقی به ضریب اصطکاک $\mu_k=۰/۷۵$ قرار دارد و با سرعت ثابت $۲\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ حرکت می‌کند. نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند، چه زاویه‌ای با راستای افق می‌سازد؟ ($g=۱۰\,\frac{\text{m}}{\text{s}^۲}$ و $\sin۳۷^\circ=۰/۶$)

مثال ۵۱

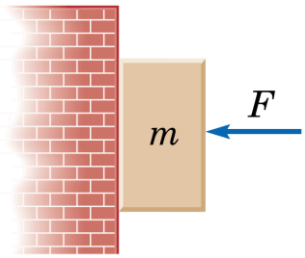
در شکل مقابل، نردبانی به جرم ۲۰kg به دیوار قائم بدون اصطکاکی تکیه داده شده است. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین زمین و پای نردبان $\mu_s = ۰/۵$ و نردبان در آستانهٔ سُر خوردن باشد، ... $(g = ۱۰\frac{\text{m}}{\text{s}^۲})$

الف) سطح زمین به نردبان چه نیرویی وارد می‌کند؟

ب) چه نیرویی از طرف نردبان به دیوار وارد می‌شود؟

پ) حداقل نیروی افقی وارد بر پای نربان باید چند نیوتون باشد تا شخصی به جرم ۶۰kg بتواند دقیقاً در وسط نردبان بایستد و نردبان سُر نخورد.

مثال ۵۲

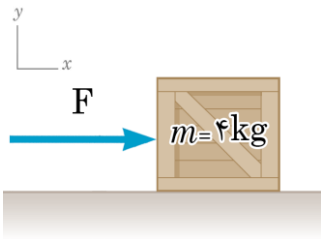


در شکل مقابل، جرم وزنه ۳kg و وزنه روی دیوار با نیروی $F = ۴۰\text{N}$ ساکن است. اگر بزرگی نیروی F، ۵۰ درصد افزایش یابد، ...

الف) نیروی اصطکاک بین جسم و دیوار چند برابر می‌شود؟

ب) اندازهٔ نیرویی که دیوار بر وزنه وارد می‌کند چند برابر خواهد شد؟ $(g = ۱۰\frac{\text{m}}{\text{s}^۲})$

مثال ۵۳



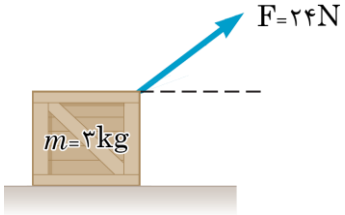
در شکل مقابل، در ابتدا جسم ساکن است. نیروی افقی F را به جسم وارد می‌کنیم و اندازهٔ آن را به تدریج افزایش می‌دهیم تا جسم شروع به حرکت کند. اگر کمترین زاویه‌ای که نیروی عکس‌العمل سطح با راستای افق می‌سازد، ۵۳° باشد،

الف) ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح را تعیین کنید.

ب) نیروی که جسم به سطح وارد می‌کند را برحسب برداهای یکّه بنویسید.

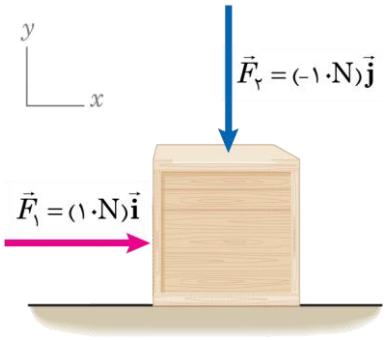
$(\sin ۵۳^\circ = ۰/۸ \text{ و } g = ۱۰ \frac{\text{m}}{\text{s}^۲})$

مثال ۵۴



مطابق شکل مقابل، نیروی ثابت $F = ۲۴\text{N}$ بر جسم ۳ کیلوگرمی وارد می شود ولی جسم حرکت نمی‌کند. اگر نیرویی که سطح افقی بر جسم وارد می‌کند، بر $\vec{F}$ عمود باشد، اندازهٔ این نیرو چند نیوتون است؟ $(g = ۱۰ \frac{\text{m}}{\text{s}^۲})$

مثال ۵۵

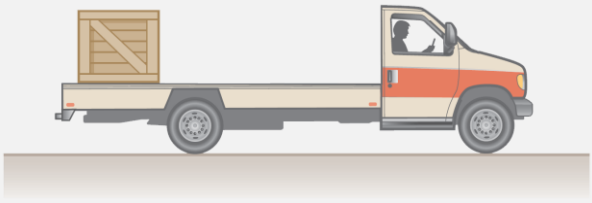


در شکل روبه‌رو، دو نیروی افقی و قائم به جسم وارد می‌شود و جسم روی سطح افقی با سرعت ثابت حرکت می‌کند و نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند، با سطح افقی زاویهٔ θ می‌سازد. اگر نیروی $F_۲$ را در خلاف جهت نشان داده شده به جسم وارد کنیم، ... ($g = ۱۰ \frac{\text{m}}{\text{s}^۲}$)

الف) شتاب حرکت جسم چند متر بر مربع ثانیه می‌شود؟

ب) زاویهٔ θ چگونه تغییر می‌کند؟

مثال



جعبه‌ای درون کامیونی قرار دارد که با تندی $v = ۲۰ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ در حرکت است. ناگهان راننده ترمز می‌کند و کامیون با شتابی به بزرگی $۳ \frac{\text{m}}{\text{s}^۲}$ متوقف می‌شود. ($g = ۱۰ \frac{\text{m}}{\text{s}^۲}$)

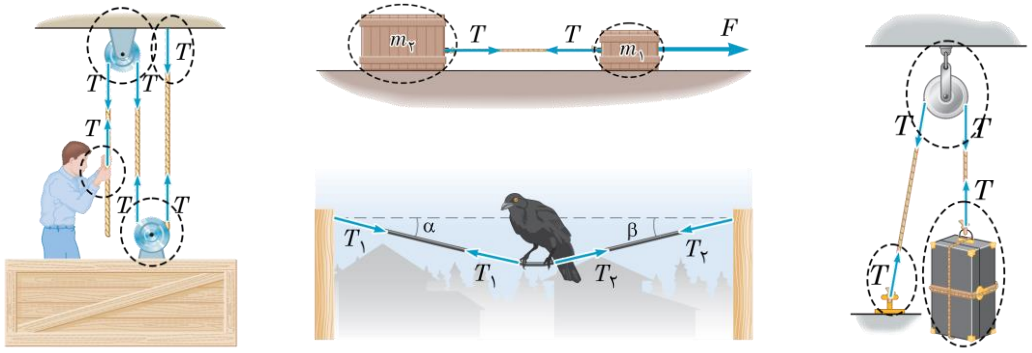
الف) حداقل ضریب اصطکاک ایستایی بین جعبه و کامیون چقدر باید باشد تا جعبه سر نخورد؟

ب) اگر $\mu_s = ۰/۲۵$ و $\mu_k = ۰/۲$ باشد، شتاب حرکت جعبه و مدت زمان رسیدن جعبه به انتهای کامیون را تعیین کنید. (جعبه در ابتدای ترمز کردن، در فاصلهٔ ۴/۵ متری از کابین راننده قرار دارد و ساکن است.)

۶. نیروی کشش ریسمان

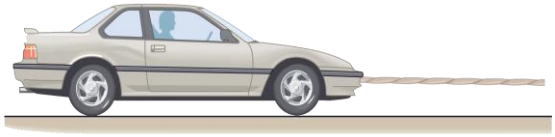
هنگامی که یک جسم به ریسمان یا طناب کشیده شده متّصل باشد، از طرف طناب یک نیروی کششی به جسم وارد می‌شود. که آن را نیروی کشش ریسمان می‌نامیم. این نیرو در راستای طناب قرار دارد. این نیرو همواره در امتداد ریسمان است و سبب کشیده شدن جسم می‌شود.

در واقع می‌توان گفت: در هر نقطه از طناب کشیده شده، نیرویی از طرف یک بخش بر بخش دیگر وارد می‌شود. نیروی کشش طناب در هر نقطه، برابر نیرویی است که در صورت پاره شدن طناب در آن نقطه، باید وارد کنیم تا وضعیّت اولیهٔ آن حفظ شود؛ یعنی اگر جسم ساکن بوده، با جایگزینی این نیرو در آن نقطه، همچنان ساکن بماند و اگر در حرکت بوده با همان حالت قبل از پاره شدن طناب، حرکت کند.



نکته: در اینجا نیز رابطهٔ خاصی برای تعیین این نیرو وجود ندارد و مقدار آن به کمک قانون‌های نیوتون تعیین می‌شود. اگر بتوان از جرم نخ (ریسمان) چشم‌پوشی کرد، می‌توان نتیجه گرفت که اندازهٔ نیروی کشش نخ در طول یک نخ، تغییر نمی‌کند و همواره ثابت است.

مثال ۵۶



یک خودروی باری با طناب افقی محکمی، یک خودروی سواری به جرم $۱۵۰۰\,\mathrm{kg}$ را می‌کشد. اگر نیروی اصطکاک و مقاومت هوا در مقابل حرکت خودروی سواری $۲۲۰\,\mathrm{N}$ و $۳۸۰\,\mathrm{N}$ باشد، در هر

کدام از حالت‌های زیر نیروی کشش طناب چقدر است؟

الف) خودور با تندی ثابت $۱۵\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ به طرف راست کشیده می‌شود.

ب) خودور با شتاب ثابت $۱/۵\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ به طرف راست کشیده می‌شود.

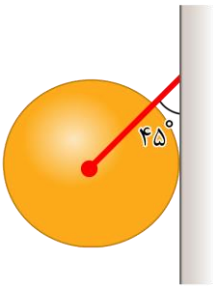
پ) اگر بیشینهٔ نیروی قابل تحمل برای این ریسمان باشد، حداکثر شتابی که اتومبیل می‌تواند پیدا کند چقدر خواهد شد؟

مثال ۵۷

در شکل‌های زیر، جسم‌ها ساکن هستند. ($g = ۱۰ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^۲}$)

الف) اگر نیروی کشش ریسمان‌های متصل به سقف، $T_۱ = ۲۱۰\,\mathrm{N}$ و $T_۲ = ۲۸۰\,\mathrm{N}$ باشد، جرم وزنه را تعیین کنید.

ب) اگر جرم گوی $m = ۱۰\,\mathrm{kg}$ و سطح عمودی بدون اصطکاک باشد، نیروی کشش ریسمان و نیروی عمودی سطح چند نیوتون است؟



پ) اگر جرم تابلو $m = ۲۰\,\mathrm{kg}$ باشد، نیروی کشش هر کدام از ریسمان‌ها چند نیوتون است؟

مثال

مطابق شکل دو جسم به جرم‌های $m_A = ۲\,\mathrm{kg}$ و $m_B = ۳\,\mathrm{kg}$ توسط نیروی F به سمت بالا کشیده می‌شوند. نیروی F را در هر یک از حالت‌های زیر تعیین کنید.

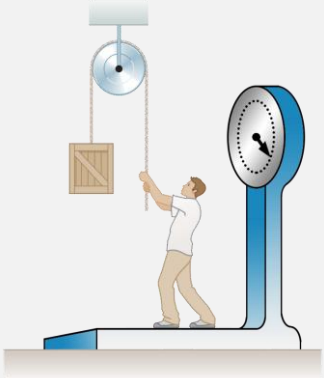
الف) نیروی کشش ریسمان بین دو جسم، $T = ۳۶\,\mathrm{N}$ است.

ب) نیروی کشش ریسمان بین دو جسم، $T = ۱۸\,\mathrm{N}$ است.

نکته: بزرگی نیروی کشش ریسمان در طول یک ریسمان با جرم اندک، همواره ثابت است.

مثال

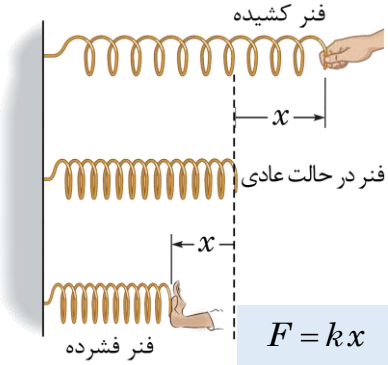
مطابق شکل، شخصی به جرم ۶۰kg بر روی یک باسکول، ساکن است و جعبه‌ای به جرم ۲۰kg را توسط طنابی که از شیار قرقره عبور کرده است، با شتاب $۱\frac{\text{m}}{\text{s}^۲}$ به سمت بالا می‌برد. عددی که باسکول نشان می‌دهد، چند نیوتون است؟ (از جرم نخ، قرقره و اصطکاک آن‌ها با یکدیگر صرف نظر می‌شود.)



مثال

شخصی برای بالا رفتن از یک درخت، از دستگاهی به شکل مقابل استفاده می‌کند. جرم شخص و اتاقک به ترتیب ۷۰kg و ۱۰kg است و شخص با شتاب ثابت $۰/۵\frac{\text{m}}{\text{s}^۲}$ بالا می‌رود. نیرویی که شخص به طناب وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ (از جرم طناب و اصطکاک آن با قرقره صرف نظر شود.)

۷. نیروی کشسانی فنر:

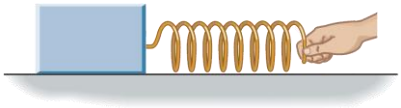


هر فنر در حالت عادی، دارای یک طول اوّلیه است که معمولاً آن را با $L_۰$ نمایش می‌دهیم. اگر طول فنر نسبت به این طول اوّلیه تغییر کند، یعنی افزایش یا کاهش یابد، فنر با نیرویی که آن را با F_e نمایش می‌دهیم، تمایل دارد به طول عادی خود باز گردد. این نیرو همواره یک نیروی بازگرداننده است و بر طبق رابطهٔ هوک برای تعیین این نیرو می‌توان نوشت:

$$F = kx \qquad (۱۴\text{-}۱۱)$$

در این رابطه k، ثابت فنر یا ضریب سختی فنر نامیده می‌شود و معیاری از سختی فنر است. هراندازه k بزرگ‌تر باشد، فنر سفت‌تر است. یعنی برای ایجاد یک جابه‌جایی خاص در آن، به کشش یا رانش بیش‌تری نیاز است. یکای k در SI، نیوتون بر متر ($\frac{\text{N}}{\text{m}}$) است. در این رابطه، x اندازهٔ تغییر طول فنر است و می‌توان آن را از رابطهٔ $x = |L - L_۰|$ به دست آورد.

مثال ۵۸

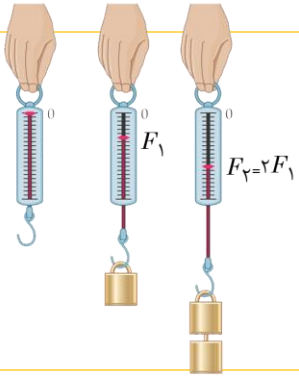


به وسیلهٔ فنری با ثابت $۸\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}}$، وزنهٔ ۴ کیلوگرمی را مطابق شکل روی یک سطح افقی به ضریب اصطکاک ایستایی $\mu_s = ۰/۵$ و ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k = ۰/۲۵$ می‌کشیم. در هر کدام از حالت‌های زیر، افزایش طول فنر چند سانتی‌متر است؟ ($g = ۱۰\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^۲}$)

الف) جسم با تندی ثابت $۲\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ حرکت کند.

ب) جسم با شتاب ثابت $۱\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^۲}$ حرکت کند.

پ) جسم با فنر کشیده شده و در آستانهٔ حرکت قرار دارد.

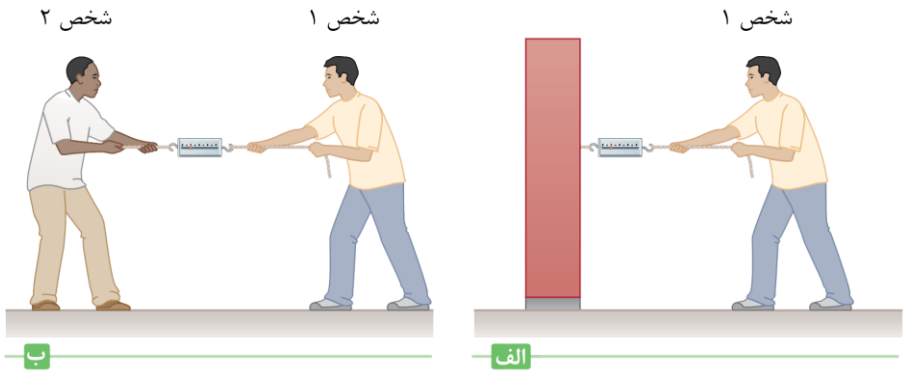


نکته: نیروسنج ابزاری است که برای اندازه‌گیری نیرو استفاده می‌شود. این وسیله معمولاً از یک فنر با ضریب سختی مشخّص ساخته شده است.

هنگامی که یک نیرو به این وسیله وارد می‌شود. فنر آن تغییر طول می‌دهد و با توجّه به مدرج بودن این وسیله می‌توان نیرو را اندازه‌گیری کرد.

مثال ۵۹

در هر یک از شکل‌های زیر، شخص (۱) ریسمان را با نیروی $۲۰\mathrm{N}$ می‌کشد. اگر ثابت فنرِ نیروسنج، $۵۰۰\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ باشد، افزایش طول فنر در هر مورد چند سانتی‌متر می‌شود؟



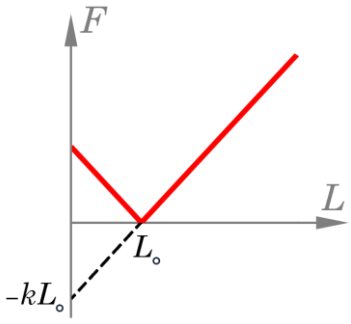
مثال ۶۰ کنکور سراسری: ریاضی داخل ۹۹

وزنه‌ای به جرم $۲\,kg$ را به انتهای فنری به طول $۳۰\,cm$ می‌بندیم و آن را یک بار با شتاب رو به بالای $۲\,\frac{m}{s^۲}$ در راستای قائم بالا می‌بریم و طول فنر به $۴۲\,cm$ می‌رسد. بار دیگر این وزنه را به همین فنر بسته و آن را روی سطح افقی در راستای افق با شتاب $۲\,\frac{m}{s^۲}$ به حرکت در می‌آوریم. اگر در این حالت طول فنر به $۳۶\,cm$ برسد، ضریب اصطکاک جنبشی جسم با سطح چقدر است؟ $(g = ۱۰\,\frac{m}{s^۲})$

مثال ۶۱

فنری را از یک نقطه آویزان کرده و به انتهای آن یک وزنه ۵۰۰ گرمی می‌آویزیم. طول فنر در این حالت $۲۹\,cm$ می‌شود. اگر ۳۷۵ گرم دیگر به وزنهٔ آویخته شده به فنر اضافه کنیم، طول فنر $۳۲\,cm$ می‌شود. طول اوّلیهٔ فنر و ثابت فنر را تعیین کنید. $(g = ۱۰\,\frac{m}{s^۲})$

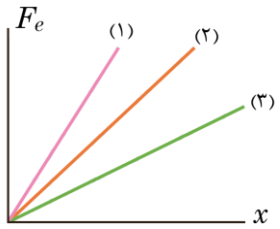
نکته: با توجه به رابطهٔ ۱۱-۱۴ می‌توان نتیجه گرفت:



- نمودار تغییرات نیروی وارد بر فنر بر حسب تغییر طول آن نسبت به حالت عادی (x)، یک خط راست است که از مبداء مختصات می‌گذرد و شیب این خط، ثابت فنر (k) است.
- نمودار تغییرات نیروی وارد بر فنر بر حسب طول فنر (L)، یک خط شکسته خواهد بود که شیب آن، ثابت فنر (k) است .در اینصورت طول از مبداء (محل برخورد نمودار با محور افقی)، بیان کنندهٔ طول حالت عادی فنر ($L_۰$) است.

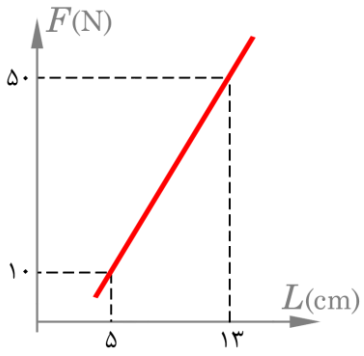
مثال ۶۲

شکل مقابل، نمودار نیروی کشسانی بر حسب تغییر طول فنر را برای سه فنر متفاوت نشان می‌دهد. ثابت این سه فنر را با یکدیگر مقایسه کنید.



مثال ۶۳

نمودار تغییرات نیروی کشسانی یک فنر بر حسب طول آن، مطابق شکل مقابل است. طول عادی فنر ($L_\circ$) و ثابت فنر را تعیین کنید.



مثال ۶۴

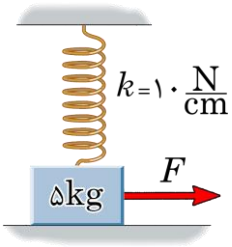
وزنه‌ای به جرم $۲\,\text{kg}$ را به انتهای فنری به طول $۱۲\,\text{cm}$ که ثابت آن $۲۵\,\frac{\text{N}}{\text{cm}}$ است، می‌بندیم و فنر را از سقف یک آسانسور آویزان می‌کنیم. طول فنر را در حالت‌های زیر محاسبه کنید: ($g = ۱۰\,\frac{\text{m}}{\text{s}^۲}$)

الف) آسانسور با تندی ثابت $۲\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ به طرف پایین در حرکت است.

ب) آسانسور با شتاب ثابت $۲\,\frac{\text{m}}{\text{s}^۲}$ از حال سکون، به طرف بالا شروع به حرکت می‌کند.

پ) آسانسور با تندی $۱\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ در حال حرکت به سمت بالا است و با شتاب $۲\,\frac{\text{m}}{\text{s}^۲}$ توقف می‌کند.

مثال ۶۵



در شکل مقابل، طول فنر نسبت به حالت عادی، $۳\,cm$ تغییر کرده است و جسم تحت تأثیر نیروی افقی $F=۱۰N$ در آستانهٔ حرکت قرار دارد. در هرکدام از حالت‌های زیر ضریب اصطکاک ایستایی سطح را بیابید. $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$

الف) فنر فشرده شده است.

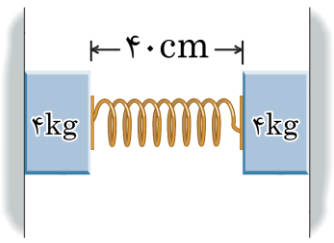
ب) فنر کشیده شده است.

مثال ۶۶

کنکور سراسری: تجربی خارج ۹۹

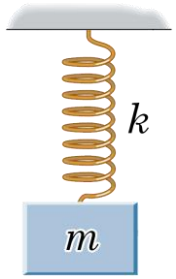
وزنه‌ای به جرم $۲kg$ را به فنر سبکی به طول $۴۰cm$ که از سقف آسانسور ساکنی آویزان است، وصل می‌کنیم. بعد از رسیدن وزنه به حالت تعادل فاصلهٔ آن از کف آسانسور $۱۴۰cm$ است. اگر آسانسور با شتاب ثابت $۲\frac{m}{s^۲}$ رو به بالا شروع به حرکت کند، فاصلهٔ وزنه از کف آسانسور به $۱۳۶cm$ می‌رسد. ثابت فنر چند نیوتون بر سانتی‌متر است؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$

مثال ۶۷



در شکل مقابل ضریب اصطکاک ایستایی بین وزنه‌ها و دیواره‌های دو طرف، $\mu_s=۰/۸$ و طول عادی فنر $۶۰cm$ است. اگر وزنه‌ها در آستانهٔ لغزیدن باشند، ثابت فنر چند نیوتون بر سانتی‌متر است؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$

مثال ۶۸



در شکل مقابل جسمی به جرم $800\,g$ توسط فنری با ثابت $4\,\frac{N}{cm}$ به سقف متصل و در حال تعادل است. جسم را $10\,cm$ سانتی‌متر پایین آورده و رها می‌کنیم.

الف) نیروی کشسانی فنر و شتاب جسم در لحظهٔ رها شدن جسم را تعیین کنید.

ب) در لحظه‌ای که جسم برای اولین بار متوقف می‌شود، برایند نیروهای وارد بر آن چند نیوتون است؟ $(g=10\,\frac{m}{s^2})$

نکته: در مسائلی که ما بررسی می‌کنیم، از جرم فنر صرف‌نظر می‌شود. در این‌صورت برای به‌دست آوردن نیروی کشش فنری که در حال کشیده شدن قرار دارد، می‌توان فنر را با یک نخ بدون جرم جایگزین کرد. نیروی کشش نخ هر چه‌قدر به‌دست آید، نیروی کشسانی فنر مورد نظر نیز همان مقدار است.

۱۱-۳. تکانه و قانون دوم نیوتون

حاصل‌ضرب جرم جسم در سرعت آن را **تکانهٔ جسم** می‌نامیم و با $\vec{p}$ نمایش می‌دهیم:

$$\vec{p}=m\vec{v} \qquad (۱۱-۱۵)$$

در این رابطه، جرم بر حسب کیلوگرم (kg)، سرعت بر حسب متر بر ثانیه $(\frac{m}{s})$ و تکانه بر حسب کیلوگرم متر بر ثانیه $(kg\,\frac{m}{s}\equiv N.s)$ است.

مثال ۶۹

بردار مکان جسمی به جرم $2\,kg$ در SI توسط رابطه $\vec{x}=(t^2-7t)\vec{i}$ داده شده است.

الف) بزرگی تکانهٔ جسم در لحظهٔ $t=2\,s$ چند نیوتون ثانیه است؟

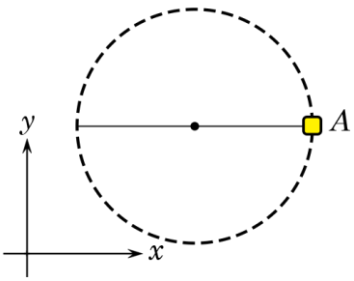
ب) نوع حرکت این جسم در بازهٔ زمانی $t_1=1\,s$ تا $t_2=5\,s$ چگونه است؟

نکته: تکانهٔ یک جسم می‌تواند در اثر تغییر جرم جسم یا تغییر بردار سرعت آن تغییر کند و از آنجا که سرعت کمیّتی برداری است، تغییر سرعت می‌تواند به واسطهٔ تغییر در اندازه یا تغییر جهت سرعت باشد. اگر جرم جسم ثابت بماند (که معمولاً این‌گونه است)، داریم:

$$\overrightarrow{\Delta p} = m\,\overrightarrow{\Delta v} \qquad (۱۱-۱۶)$$

مثال ۷۰

در شکل مقابل، جسمی به جرم $m = ۴۰۰\,\mathrm{g}$ با تندی ثابت $v = ۲۰\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت، بر مسیر دایره‌ای در حرکت است. تغییر تکانهٔ آن را در هرکدام از حالت‌های زیر تعیین کنید:



الف) در مدّتی که جسم نصف دایره می‌پیماید را تعیین کنید.

ب) در مدّتی که جسم یک چهارم دایره می‌پیماید را تعیین کنید.

نکته: قانون دوم نیوتون را می‌توان بر اساس تغییر تکانهٔ جسم مورد نظر بیان کرد. برای این منظور می‌توان نوشت:

$$(\vec{F}_{net})_{av} = m\,\vec{a}_{av} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{m\,\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

: نیروی متوسط خالص وارد بر جسم

یعنی متوسط نیروی خالص وارد بر جسم، برابر آهنگ متوسط تغییر تکانهٔ جسم در آن لحظه است و لذا:

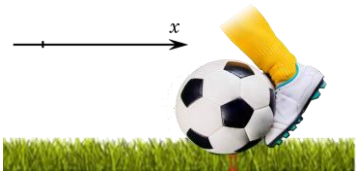
$$(\vec{F}_{net})_{av} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \qquad (۱۱-۱۷)$$

مثال ۷۱

تکانهٔ جسمی در SI به صورت $\vec{p} = \left(t^{۲} - ۷t + ۱۰\right)\vec{\mathbf{i}}$ است. متوسط برآیند نیروهای وارد بر جسم در مدت $t = ۲\,\mathrm{s}$ تا $t = ۶\,\mathrm{s}$ را حساب کنید.

مثال ۷۲

در شکل مقابل، توپ فوتبالی به جرم $۸۰۰\,\mathrm{g}$ با تندی $۱۰\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ به پای بازیکنی برخورد می‌کند و بازیکن توپ را با تندی $۸\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ در خلاف جهت اوّلیه بر می‌گرداند. اگر مدت تماس توپ با پای بازیکن $۰/۲\,\mathrm{s}$ باشد، متوسط نیروی وارد بر توپ از طرف بازیکن را تعیین کنید.



مثال ۷۳

جسمی به جرم $5\,kg$ با سرعت $8\frac{m}{s}$ به سمت شمال در حرکت است اگر به مدت $3\,s$ نیروی $10\,N$ به طرف شرق برآن اثر کند. در پایان این مدت تندی جسم چند متر بر ثانیه می‌شود؟

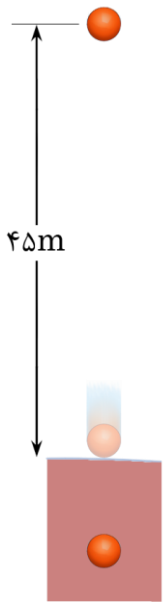
مثال ۷۴

مطابق شکل، چکشی به جرم $2\,kg$ را با تندی $5\frac{m}{s}$ به میخی می‌کوبیم. چکش پس از برخورد به میخ متوقف می‌شود.

الف) تغییر تکانه چکش در این برخورد را بیابید.

ب) اگر بازهٔ زمانی تماس چکش با میخ $20\,ms$ باشد چه نیرویی از چکش بر میخ وارد می‌شود؟

مثال ۷۵



سنگی به جرم $200\,g$ در شرایط خلاء از ارتفاع ۴۵ متری باتلاق رها می‌شود. این سنگ پس از رسیدن به سطح باتلاق، در گِل فرو می‌رود و متوقف می‌شود. اگر مدّت زمان توقف سنگ $0/5\,s$ باشد، نیروی متوسطی که در مدّت توقف، از طرف گِل به سنگ وارد می‌شود، چند نیوتون است؟ $(g = 10\frac{m}{s^2})$

مثال ۷۶

یک لوله، آب را با تندی $۵\frac{m}{s}$ در راستای عمود بر سطح دیوار، روی دیوار می‌ریزد و آب با تندی $۳\frac{m}{s}$ در همین راستا برمی‌گردد. اگر آهنگ خروج آب از لوله $۱۲۰۰\frac{kg}{min}$ باشد، اندازهٔ نیروی متوسطی که آب بر دیوار وارد می‌کند، چقدر است؟

نکته: با توجه به روابطی که برای انرژی جنبشی (K) و تکانه (p) بیان شده است، می‌توان رابطهٔ میان تکانه و انرژی جنبشی جسمی به جرم m را به صورت زیر نوشت:

$$K=\frac{p^۲}{۲m} \qquad (۱۸-۱۱)$$

مثال ۷۷

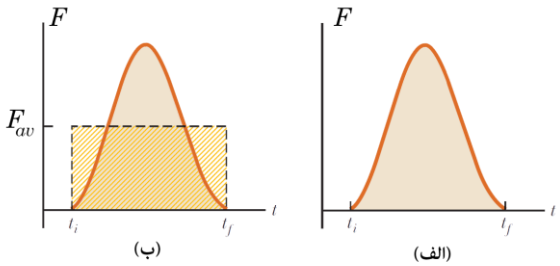
رابطهٔ ۱۱-۱۸ را ثابت کنید.

مثال ۷۸

اگر جرم جسم A، $\frac{۱۲}{۵}$ برابر جرم جسم B و انرژی جنبشی آن ۱۵ برابر انرژی جنبشی جسم B باشد، تکانهٔ جسم B چند برابر تکانه جسم A می شود؟

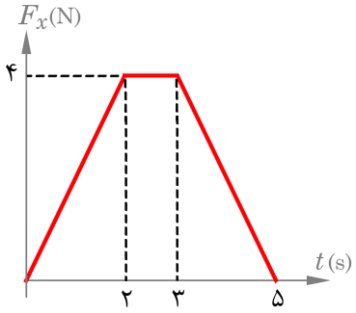
مثال ۷۹

جسمی به جرم $۴kg$ با تندی $۱۰\frac{m}{s}$ در حرکت است. اگر با تغییر تندی جسم، انرژی جنبشی آن ۹ برابر شود، بزرگی تکانهٔ جسم چند نیوتون ثانیه تغییر می‌کند؟



نکته: تغییر تکانهٔ یک جسم را می‌توان به کمک مساحت سطح زیر نمودار نیرو ـ زمان نیز به دست آورد. اگر نیروی خالص وارد بر جسم بر حسب زمان تغییر کند (شکل الف) مقدار نیروی متوسط (F_{av} : خط‌چین افقی) به گونه‌ای است که مساحت مستطیل ($F_{av}\,\Delta t$) برابر مساحت سطح زیر منحنی شکل الف باشد.

مثال ۸۰

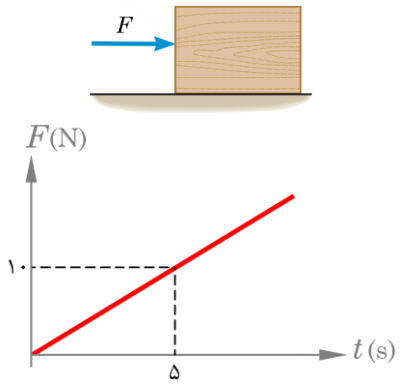


نیروی F_x در راستای محور x به جسمی به جرم $2\,\text{kg}$ اثر می‌کند و نمودار نیرو ـ زمان برای آن مطابق شکل مقابل است.

الف) متوسط نیروی وارد بر جسم در این مدت چند نیوتون است؟

ب) اگر جسم ابتدا با سرعت $(-2\frac{\text{m}}{\text{s}})\vec{\text{i}}$ در حرکت باشد، تندی نهایی جسم را تعیین کنید.

مثال ۸۱



در شکل مقابل، نمودار تغییرات بزرگی نیروی افقی F که به جسمی به جرم $m=2/5\,\text{kg}$ وارد می‌شود، برحسب زمان نشان داده شده است. اگر جسم در ابتدا ساکن و ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی به ترتیب $\mu_s=0/4$ و $\mu_s=0/2$ باشد، ... ($g=10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

الف) تغییر تکانهٔ جسم در بازهٔ زمانی $t_1=4\,\text{s}$ تا $t_2=8\,\text{s}$ چقدر است؟

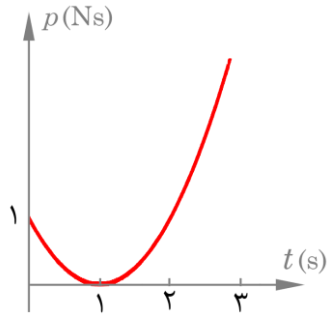
ب) نمودار تغییرات نیروی خالص وارد بر جسم بر حسب زمان را رسم کنید.

مثال ۸۲

نمودار تکانه ـ زمان متحرکی به جرم $0/5\,kg$ به صورت سهمی شکل مقابل است.

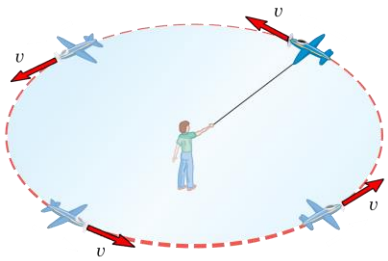
الف) چه مدت حرکت جسم کندشونده است؟

ب) تغییرات سرعت متحرک در ثانیهٔ سوم حرکت چند متر بر ثانیه است؟



۱۱-۴. حرکت دایره‌ای یکنواخت

نوعی از حرکت در صفحه، حرکت روی مسیر دایره‌ای، با تندی ثابت است. از آنجا که در این حرکت، تندی ذره ثابت است، این حرکت را حرکت دایره‌ای یکنواخت می‌نامیم.



نکته: در حرکت دایره‌ای یکنواخت، علیرغم ثابت بودن تندی ذره، جهت بردار سرعت متحرک (که برداری مماس بر مسیر حرکت ذره است)، دائماً تغییر می‌کند. بنابراین حرکت دایره‌ای یکنواخت، یک حرکت شتاب‌دار است.

مثال ۸۳

گلولهٔ کوچکی به انتهای ریسمانی به طول $80\,cm$ بسته شده و روی سطح افقی بدون اصطکاکی به طور یکنواخت با تندی ثابت $30\ \frac{cm}{s}$ می‌چرخد. اگر ناگهان ریسمان پاره شود، ...

الف) مسیر حرکت ذره را رسم کنید.

ب) فاصلهٔ جسم از مرکز دایره پس از ۲ ثانیه چند متر است؟

دوره: در حرکت دایره‌ای یکنواخت، مدّت زمان لازم برای پیمودن یک دور محیط دایره را دورهٔ تناوب یا دوره می‌نامیم و آن را معمولاً با T نمایش می‌دهیم. یکای دوره در SI، ثانیه (s) است.

نکته: ذرّه‌ای که روی دایره‌ای به شعاع r حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد، در مدّت یک دوره، یک بار محیط دایره را به طور کامل با تندی ثابت v طی می‌کند. بنابراین برای آن داریم:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \qquad (۱۹-۱۱)$$

نکته: برای ذرّه‌ای که روی مسیر دایره‌ای، حرکت یکنواخت انجام می‌دهد و در مدّت Δt ثانیه، N دور کامل می‌زند، می‌توان نوشت:

$$T = \frac{\Delta t}{N} \qquad (۲۰-۱۱)$$

مثال ۱۴

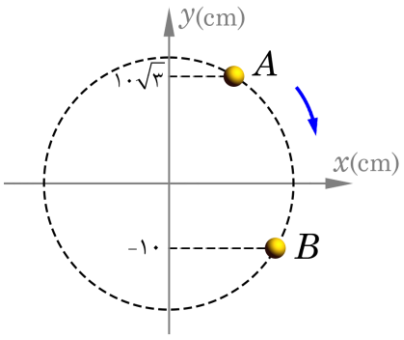
طول عقربهٔ دقیقه‌شمار یک ساعت دیواری، ۱/۵ برابر طول عقربهٔ ساعت شمار آن است. تندی نوک عقربهٔ دقیقه‌شمار چند برابر تندی نوک عقربهٔ ساعت‌شمار است؟ (حرکت عقربه‌ها را یکنواخت فرض کنید.)

مثال ۱۵

در شکل مقابل ذرّه‌ای به طور یکنواخت روی مسیر دایره‌ای به شعاع $20\,\text{cm}$ حرکت می‌کند و در لحظهٔ $t_1 = 1\,\text{s}$ از نقطهٔ A و در لحظهٔ $t_2 = 3\,\text{s}$ برای اولین بار از نقطهٔ B می‌گذرد.

الف) تندی این متحرک چند متر بر ثانیه است؟

ب) دورهٔ تناوب آن را تعیین کنید.



نکته: یکی از یکاهای فرعی که برای بیان تعداد دورهای یک حرکت تکرار شونده در یک مدت معین مورد استفاده قرار می‌گیرد، یکای دور بر دقیقه (rpm:revolutions per minute) است. به کمک رابطهٔ ۱۱-۲۰ یا استفاده از یک تناسب ساده می‌توان نتیجه گرفت که اگر حرکت جسمی که با n دور بر دقیقه در حال حرکت دایره‌ای یکنواخت باشد، دورهٔ حرکتش از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود:

$$T = \frac{۶۰}{n_{(\text{rpm})}} \qquad (۲۱-۱۱)$$

مثال ۱۶

محور موتوری در هر دقیقه ۱۸۰۰ دور (۱۸۰۰rpm) می‌چرخد.

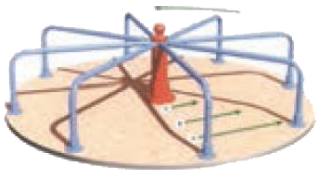
الف) دورهٔ تناوب این موتور را بیابید.

ب) اگر شعاع چرخ متصل به این محور، ۴۰ سانتی‌متر باشد، تندی حرکت نقطه‌ای روی خارجی‌ترین قسمت این چرخ چند متر بر ثانیه است؟

مثال ۱۷

زمین در مداری تقریباً دایره‌ای شکل به شعاع ۱۵۰ میلیون کیلومتر، به دور خورشید در حرکت است. تندی حرکت زمین به دور خورشید، چند کیلومتر بر ثانیه است؟

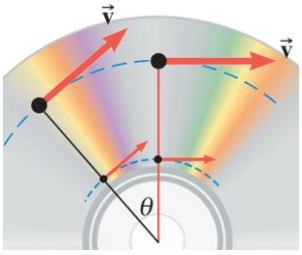
مثال ۱۸



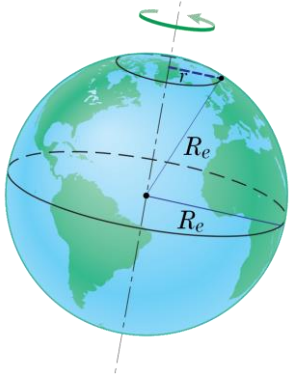
یک دیسک‌گردان در شهربازی را در نظر بگیرید که توسط یک موتور الکتریکی با ۵rpm می‌گردد.

الف) دورهٔ حرکت را برای افراد درون این دیسک‌گردان محاسبه کنید.

ب) تندی افرادی که در فاصله‌های ۱m، ۲m و ۳m از مرکز دیسک قرار دارند را تعیین کنید و آنها را با هم مقایسه نمایید.



نکته: هنگامی که یک جسم صُلب (جسمی که اجزای آن نسبت به هم حرکت نمی‌کنند) حول یک محور حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد، دورهٔ تناوب تمام ذرّات آن یکسان است. اما باید توجه داشت که تندی آن‌ها یکسان نیست و هر چه از مرکز دیسک دور شویم، تندی حرکت بیشتر می‌شود.



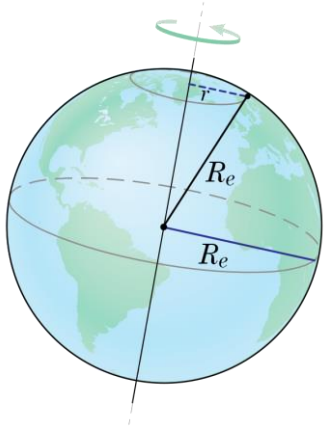
نکته: دورهٔ تناوب زمین در حرکت به دور خودش، ۲۴ ساعت (۸۶۴۰۰ ثانیه) و برای تمامی افرد ساکن روی آن، یکسان است! اما از آنجا که شعاع گردش افراد مختلف به دور محور زمین، به عرض جغرافیایی محل سکونت آنها وابسته است، تندی حرکت افرادی که در مکان‌های مختلف زندگی می‌کنند، با یکدیگر متفاوت است.

اگر شخصی در عرض جغرافیایی φ سکونت داشته باشد، روی دایره‌ای به شعاع $r = R_e \cos\varphi$ به دور محور زمین در حال گردش خواهد بود (چرا؟) و تندی آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$v = \frac{2\pi R_e}{T}\cos\varphi \qquad (۲۲-۱۱)$$

مثال ۸۹

الف) نکتهٔ بالا را ثابت کنید.



ب) نشان دهید برای تعیین تندی شخصی که در عرض جغرافیایی φ قرار دارد، می‌توان از رابطهٔ تقریبی $v \simeq 465\cos\varphi$ استفاده کرد، که در آن، تندی بر حسب متر بر ثانیه به دست می‌آید.

مثال ۹۰

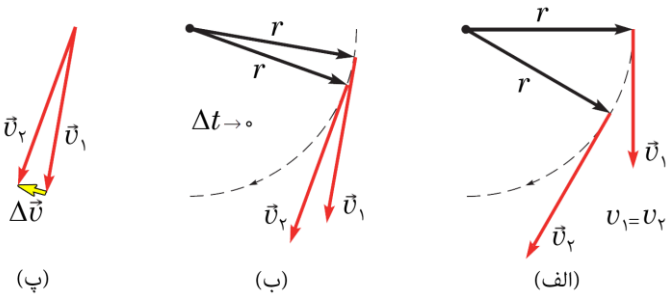
دورهٔ تناوب زمین در حرکت به دور خودش، ۲۴ ساعت و برای تمامی افرد ساکن روی آن، یکسان است!

الف) تندی شخصی که در استوا قرار دارد، چند متر بر ثانیه است؟ (شعاع زمین تقریباً $6400\,km$ است.)

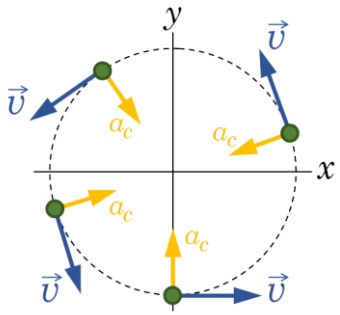
پ) تندی شخصی که در مدار 53° شمالی قرار دارد، چند برابر تندی شخصی است که در مدار 37° زندگی می‌کند؟ ($\cos 37^\circ = 0/8$)

نکته: دیدیم که حرکت دایره‌ای یکنواخت، حرکتی شتابدار است.

در شکل مقابل، اگر بازهٔ زمانی محاسبهٔ تغییرات سرعت ($\Delta\vec{v}$) را به تدریج کوچک و کوچک‌تر در نظر بگیریم ($\Delta v \to 0$)، مشاهده می‌شود که بردار $\Delta\vec{v}$ و در نتیجه بردار شتاب لحظه‌ای، در راستای مرکز دایره قرار می‌گیرد. به عبارت دیگر می‌توان نتیجه گرفت:



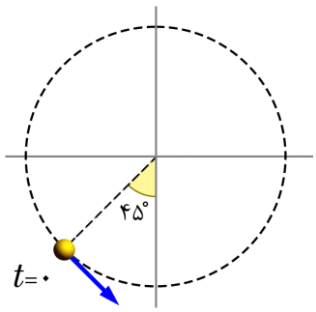
در حرکت دایره‌ای یکنواخت، بردار شتاب همواره در راستای شعاع دایره و به طرف مرکز آن است. به این دلیل، شتاب را در این حالت مرکزگرا می‌نامند. می‌توان نشان داد اندازهٔ این شتاب مرکزگرا از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:



$$a_c = \frac{v^2}{r} \qquad (۲۳\text{-}۱۱)$$

مثال ۹۱

در شکل روبه‌رو، جسمی روی دایره‌ای به شعاع $2\,\mathrm{m}$ با تندی ثابت $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ در جهت نشان داده شده در حال حرکت است و در لحظهٔ $t=0$ در محل نشان داده شده قرار دارد. بردارهای سرعت و شتاب این ذره را در لحظهٔ $t=\frac{3\pi}{2}\,\mathrm{s}$ به دست آورید.



مثال ۹۲

ذره‌ای در صفحهٔ xoy و در جهت پادساعتگرد، حرکت دایره‌ای یکنواخت با دورهٔ $4\,\mathrm{s}$ انجام می‌دهد. اگر در لحظهٔ t بردار شتاب ذره $\vec{a}=-2\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}$ باشد، ۱/۵ ثانیه بعد، بردارهای شتاب و سرعت ذره را تعیین کنید.

مثال ۹۳

فاصلهٔ لبهٔ پره‌های یک بالگرد تا محور آن $۸\,\mathrm{m}$ است و پره‌ها با آهنگ ۶۰۰۰ دور در دقیقه می‌چرخد. تندی و شتاب لبهٔ پره‌ها را بیابید.

نکته: در حرکت دایره‌ای یکنواخت، مقدار شتاب مرکزگرا را می‌توان از رابطه‌های زیر نیز تعیین کرد:

$$a_c = \frac{۴\pi^۲ r}{T^۲} \qquad (۲۴\text{-}۱۱)$$

و

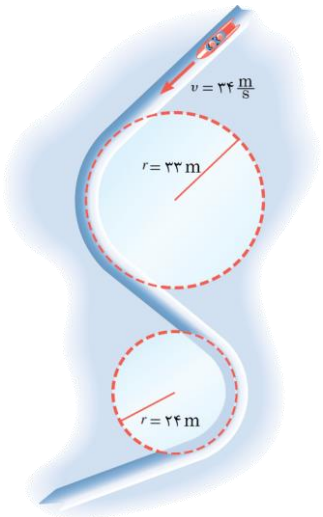
$$a_c = \frac{۲\pi v}{T} \qquad (۲۵\text{-}۱۱)$$

مثال ۹۴

الف) رابطه‌های بالا را ثابت کنید.

ب) اگر فرض کنیم $\omega = \frac{۲\pi}{T}$ است، رابطه‌های بالا را برحسب ω بازنویسی کنید و به خاطر بسپارید.

مثال ۹۵



شکل مقابل، مسیر حرکت سورتمه‌ای را در مسابقات المپیک زمستانی نشان می‌دهد. سورتمه روی یک سطح افقی در حال حرکت است. اگر تندی حرکت سورتمه در کل مسیر $۳۴\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ باشد، ...

الف) شتاب مرکزگرای آن را در هریک از پیچ‌ها تعیین کنید.

ب) هرکدام از پیچ‌ها (که یک چهارم یک دایری کامل است)، طی چه مدت توسط سورتمه پیموده می‌شود؟

دینامیک حرکت دایره‌ای یکنواخت:

دیدیم در حرکت دایره‌ای، به دلیل تغییر جهتِ بردار سرعت، یک شتاب مرکزگرا وجود دارد. این شتاب مرکزگرا باید از طرف نیرویی که در راستای مرکز دوران است، تأمین شود. این نیرو را نیروی مرکزگرا می‌نامیم و با F_r نمایش می‌دهیم.

با توجّه به آن‌چه گفته شد، می‌توان نتیجه گرفت اگر ذرّه‌ای بخواهد روی یک مسیر دایره‌ای حرکت با تندی ثابت داشته باشد و حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام دهد، باید...

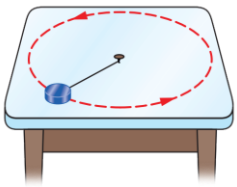
- برآیند نیروهای وارد بر جسم، در راستای غیر شعاع گردش، صفر باشد:

$$(F_{net})_{\neq r} = 0 \qquad (۲۶-۱۱)$$

- برآیند نیروهای وارد بر جسم، در راستای شعاع گردش، نیروی مرکز گرا را تأمین کند:

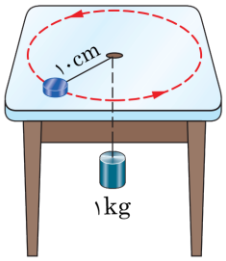
$$(F_{net})_r = m\frac{v^2}{r} = m\frac{4\pi^2 r}{T^2} = m\frac{2\pi v}{T} \qquad (۲۷-۱۱)$$

مثال ۹۶



مطابق شکل وزنه‌ای به جرم $500\,g$ به ریسمانی به طول $20\,cm$ متّصل است و در حالتی که ریسمان کاملاً صاف است، ضربه‌ای در راستای عمود بر نخ به وزنه می‌زنیم و وزنه با دورهٔ $0/5\,s$ می‌چرخد. اگر اصطکاک وجود نداشته باشد، نیروی کشش ریسمان را بیابید.

مثال ۹۷



در شکل مقابل وزنهٔ ۵۰۰ گرمی با چه تندی‌ای روی دایره‌ای به طول $10\,cm$ بچرخد تا وزنهٔ ۱ کیلوگرمی که توسط ریسمانی به وزنهٔ بالایی آویزان است، در تعادل بماند؟ (سطح میز افقی، بدون اصطکاک است و $g = 10\frac{m}{s^2}$)

مثال ۹۸

جسمی به جرم ۲ کیلوگرم به فنری با ثابت $۱۰\frac{N}{cm}$ بسته شده و روی دایره‌ای افقی به شعاع $۲۰cm$ با تندی ثابت $۲\frac{m}{s}$ در حال گردش است.

الف) دورهٔ حرکت این جسم چند ثانیه است؟

ب) طول اولیهٔ فنر چند سانتی‌متر بوده است؟

پ) اگر سرعت حرکت جسم را دو برابر کنیم، طول فنر چند درصد افزایش می‌یابد؟

مثال ۹۹

وزنه‌ای را از فنری با طول اولیهٔ $۱۰cm$ آویزان می‌کنیم و طول فنر در حالت تعادل به $۲۰cm$ می‌رسد. این وزنه را به همین فنر بسته و روی سطح افقی بدون اصطکاکی حول ابتدای فنر به دوران در می‌آوریم و تندی دوران را به تدریج افزایش می‌دهیم تا طول فنر به $۱۸cm$ برسد. در این حالت تندی جسم چنر متر بر ثانیه است؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$

مثال ۱۰۰

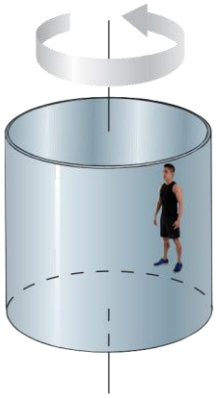
قرصی در یک صفحهٔ افقی با دورهٔ $۲s$ می‌چرخد و مکعب کوچکی به جرم $۲۰۰g$ در فاصلهٔ $۳۰cm$ از مرکز قرص بر روی آن قرار دارد و بدون لغزش، با آن می‌چرخد.

الف) نیروی اصطکاک وارد بر مکعب را بیابید. $(\pi^۲=۱۰)$

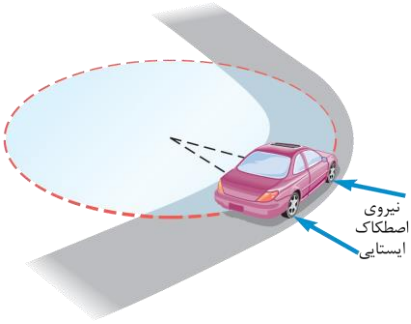
ب) اگر هنگامی که قرص با دورهٔ $۱/۵s$ می‌چرخد، مکعب در آستانهٔ لغزش قرار گیرد، ضریب اصطکاک ایستایی بین سطح و قرص را تعیین کنید.

مثال ۱۰۱

در شکل مقابل شعاع قاعدهٔ استوانه، R و ضریب اصطکاک بین بدنهٔ استوانه و لباس شخص μ_s است. بیشینهٔ دورهٔ گردش استوانه حول محورش چه‌قدر باشد تا شخص سقوط نکند؟



نکته: اگر اتومبیل هنگام دور زدن بر سر پیچ، سرعتش از مقدار معینی بیشتر باشد، سر می‌خورد و از مسیر منحرف می‌شود. در این حرکت، نیروی اصطکاک ایستایی (f_s) مانع سُر خوردن اتومبیل می‌شود. بیشترین مقدار اصطکاک ایستایی ($f_{s,\max}$) در اصطکاک آستانه است و داریم:



$$(F_{net})_r \le f_{s,\max} \quad \Rightarrow \frac{mv^2}{r} \le \mu_s mg \quad \Rightarrow \quad v \le \sqrt{\mu_s rg}$$

بر این اساس، بیشینهٔ تندی مجاز در پیچ جاده‌ای به شعاع r، برابر است با:

$$v_{\max} = \sqrt{\mu_s rg} \qquad (۲۸-۱۱)$$

مثال ۱۰۲

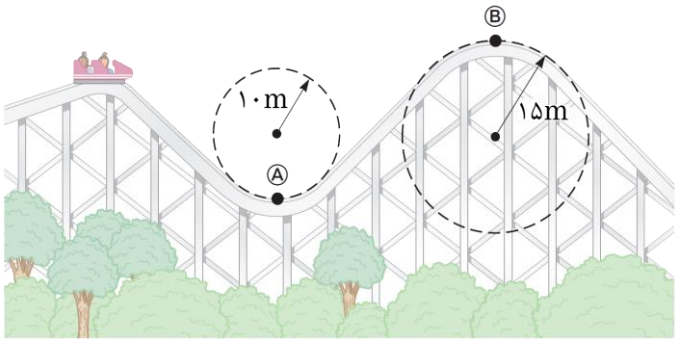
در میدان یک شهر که نیروی مرکزگرا را اصطکاک ایستایی بین لاستیک و جاده با سطح آسفالت تأمین می‌کند.

الف) اتومبیلی حداکثر با چه سرعتی می‌تواند از پیچ با شعاع ۱۰۰m و $\mu_s = ۰/۴$ عبور نماید؟

ب) اگر جرم اتومبیل ۲ تن باشد نیروی مرکزگرا در تندی حداکثر چقدر است؟ در این حالت نیروی وارد بر سطح از طرف اتومبیل چند نیوتون است؟

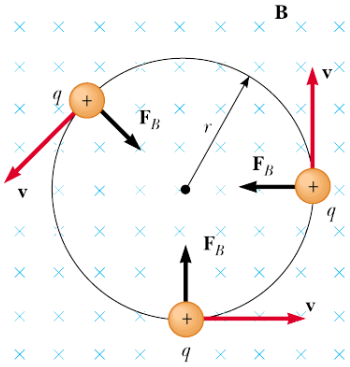
مثال ۱۰۳

مطابق شکل، یک ترن‌هوایی به جرم ۵۰۰ کیلوگرم، مسیر نشان داده شده را با تندی ثابت $۲۰\frac{m}{s}$ می‌پیماید.



الف) بزرگی نیروی عمودی سطح وارد بر خودرو از طرف سطح را در هر کدام از نقاط A و B تعیین کنید.

ب) در چه نقطه‌ای احتمال دارد خودرو از سطح جدا شود؟ تندی خودرو در این نقطه، حداقل چقدر باید باشد؟



نکته: هنگامی‌که یک ذرهٔ باردار درون یک میدان مغناطیسی یکنواخت پرتاب می‌شود، حتماً یک مسیر دایره‌ای یا بخشی از آن را طی خواهد کرد و در این حرکت، کار میدان مغناطیسی وارد بر ذرهٔ باردار صفر است (چرا؟). بنابراین تندی ذرهٔ باردار در این میدان تغییر نخواهد کرد و حرکت دایره‌ای یکنواخت خواهد داشت. در اینصورت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره، نقش نیروی مرکزگرا را بازی خواهد کرد و می‌توان از روابط مربوط به دینامیک حرکت دایره‌ای برای تعیین شعاع مسیر، سرعت حرکت یا زمان گردش و ... استفاده کرد!

مثال ۱۰۴

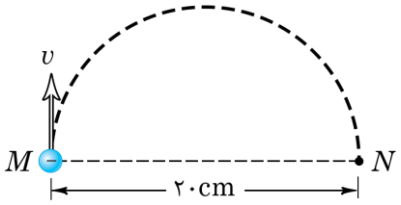
ذره‌ای به جرم $۱۰\mu g$ و بار $۲۰nC$ با تندی ثابت $۸۰\frac{m}{s}$ یک بار درون میدان مغناطیسی به بزرگی $۱/۶T$ و بار دیگر درون میدان مغناطیسی به بزرگی $۴T$ پرتاب می‌شود. اختلاف اندازهٔ شعاع دایره‌ای که این ذره در این دو حالت طی می‌کند، چند متر است؟ از اثر نیروی وزن وارد بر ذره چشم پوشی نمایید.

مثال ۱۰۵

کنکور سراسری: تجربی داخل ۸۹

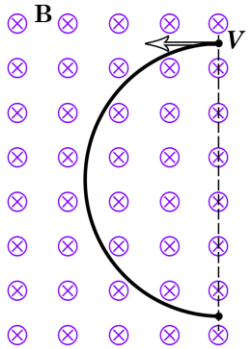
الکترونی که در نقطهٔ M دارای تندی $۱/۶\times۱۰^{۶}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ است، تحت تأثیر میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$، مسیر نیم دایرهٔ M تا N را مطابق شکل طی می‌کند. B چند تسلا و در چه جهتی است؟

$(m_e = ۹\times۱۰^{-۲۸}\mathrm{g}$ و $e = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\mathrm{C})$

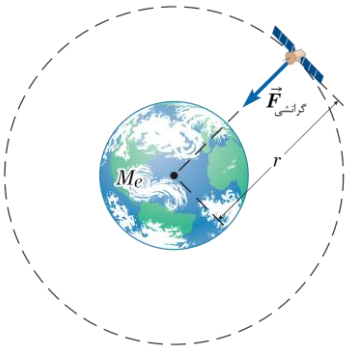


مثال ۱۰۶

مطابق شکل، ذره‌ای با بار الکتریکی $۳۱۴\mathrm{nC}$ با تندی v وارد یک میدان مغناطیسی یکنواخت به بزرگی $۰/۴\mathrm{T}$ می‌شود و پس از پیمودن یک مسیر نیم‌دایره، از آن خارج می‌شود. اگر جرم این ذره $۲۰\mu\mathrm{g}$ باشد، ذره چه مدت درون میدان مغناطیسی بوده است؟



بررسی حرکت ماهواره: ماهواره‌ای به جرم m را در نظر می‌گیریم که در اطراف سیّاره‌ای به جرم M در حرکت روی مسیر دایره‌ای باشد. در این‌صورت برای آن‌که این حرکت دایره‌ای یکنواخت بتواند ادامه داشته باشد، نیاز به یک نیروی مرکزگرا است. این نیرو همان نیروی گرانش نیوتون یا به عبارت دیگر، همان وزن ماهواره در محل گردش خود است.



بنابراین اگر تندی ذرّهٔ m را با v و فاصلهٔ آن تا مرکز سیّاره را با r نمایش دهیم می‌توان نوشت:

$$(F_{net})_r = \frac{mv^{۲}}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{GMm}{r^{۲}} = \frac{mv^{۲}}{r} \quad \Rightarrow \quad v^{۲} = \frac{GM}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \qquad (۲۹\text{-}۱۱)$$

نکته: تندی حرکت ماهواره‌ای که دور سیّاره‌ای در حرکت است، با جذر فاصلهٔ آن تا مرکز سیّاره رابطهٔ عکس دارد. بنابراین برای دو ماهوارهٔ مختلف که در فاصله‌های r_A و r_B از مرکز سیّاره (یا در فاصله‌های h_A و h_B از سطح سیاره) قرار دارند، می‌توان نوشت:

$$\frac{v_B}{v_A}=\sqrt{\frac{r_A}{r_B}}=\sqrt{\frac{R+h_A}{R+h_B}} \qquad (۳۰-۱۱)$$

مثال ۱۰۷

ماهواره‌ای به جرم m در فاصلهٔ $\frac{۲}{۵}R_e$ از سطح زمین قرار دارد (R_e شعاع زمین است). ماهواره دیگری به جرم $\frac{۳}{۴}m$ در چه فاصله‌ای از سطح زمین قرار داشته باشد تا تکانهٔ هر دو ماهواره با هم برابر باشد؟

مثال ۱۰۸

ماهواره‌ای در فاصلهٔ R_e از سطح زمین قرار دارد (R_e شعاع زمین است). اگر بخواهد فاصلهٔ این ماهواره تا سطح زمین سه برابر شود، انرژی جنبشی آن را باید چند برابر کنیم؟

نکته: قبلاً دیده‌ایم که شتاب جاذبهٔ هر سیّاره (مثلاً زمین) در سطح سیّاره بیش‌ترین مقدار را دارد و با افزایش فاصله از سطح آن به تدریج کاهش می‌یابد. بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{شتاب جاذبه درسطح سیاره } g_{\circ}=\dfrac{GM}{R^{۲}} \\ \text{شتاب جاذبه درفاصله‌ی } r \text{ از مرکز سیاره } g_h=\dfrac{GM}{r^{۲}}=\dfrac{GM}{(R+h)^{۲}} \end{array}\right\} \Rightarrow GM=g_{\circ}R^{۲}=g_h r^{۲}$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$v=R\sqrt{\frac{g_{\circ}}{r}}=\sqrt{g_h\cdot r} \qquad (۳۱-۱۱)$$

مثال ۱۰۹

فاصلهٔ ماهواره‌ای از سطح زمین، دو برابر شعاع کرهٔ زمین است. نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره، چه کسری از وزن آن در سطح زمین است؟

مثال ۱۱۰

کنکور سراسری: ریاضی خارج ۹۰

یک ماهواره در فاصلهٔ ۸۰۰ کیلومتری از سطح زمین دور می‌زند. اگر شتاب جاذبه در روی زمین $۹/۸\frac{m}{s^۲}$ و شعاع زمین $۶۴۰۰km$ باشد، تندی حرکت ماهواره چند کیلومتر بر ساعت است؟

مثال ۱۱۱

کنکور سراسری: ریاضی خارج ۹۶

ماهواره‌ای به جرم $۲۵۰kg$ در یک مدار دایره‌ای به دور زمین می‌چرخد. اگر فاصلهٔ ماهوار از سطح زمین $۱۶۰۰km$ باشد، انرژی جنبشی ماهواره چند گیگا ژول است؟ ($R_e = ۶۴۰۰km$ و $g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$)

نکته: اگر دورهٔ گردش ماهواره دورِ سیارهٔ مورد نظر را T در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

$$(F_{net})_r = mr\frac{۴\pi^۲}{T^۲} \Rightarrow G\frac{Mm}{r^۲} = mr\frac{۴\pi^۲}{T^۲} \Rightarrow GM = r^۳ \times \frac{۴\pi^۲}{T^۲}$$

$$\frac{T^۲}{r^۳} = \frac{۴\pi^۲}{GM} = \text{مقدار ثابت} \qquad (۳۲-۱۱)$$

مثال ۱۱۲

شعاع متوسط گردش سیارهٔ نپتون به دور خوشید، ۳۰ برابر شعاع متوسط گردش زمین به دور آن است. زمان گردش کامل نپتون به دور خورشید چند سال است؟

مثال ۱۱۳

از دیدگاه مخابراتی، باقی ماندن ماهواره در یک محل نسبت به مکانی در روی زمین (مثلاً بالای ایران) امتیاز محسوب می شود. این در صورتی رخ می دهد که دورهٔ گردش ماهواره به دور زمین با مدت زمان یک دور چرخش زمین به دور خودش، یعنی ۲۴ ساعت یکسان باشد.

الف) در چه فاصله‌ای از زمین می‌توان این مدار همگام با زمین را یافت؟

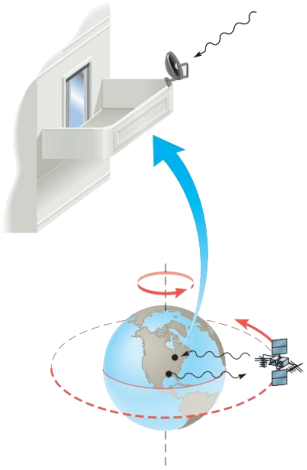
ب) تندی مداری این ماهواره چقدر است؟

مثال ۱۱۴

کنکور سراسری: تجربی خارج ۹۵

ماهوارهٔ A در جهت حرکت وضعی زمین طوری به دور زمین می‌چرخد که در هر شبانه روز فقط یک بار در یک مکان معین به وسیلهٔ ناظری ساکن در سطح زمین رؤیت می‌شود. اگر شعاع گردش ماهوارهٔ B، ۹ برابر شعاع مدار ماهوارهٔ A باشد، دوره گردش ماهواره‌های A و B به دور زمین چند ساعت است؟

مثال ۱۱۵



از دیدگاه مخابراتی، باقی ماندن ماهواره در یک محل نسبت به مکانی در روی زمین امتیاز محسوب می‌شود. این در صورتی رخ می‌دهد که دورهٔ گردش ماهواره به دور زمین با مدت زمان یک دور چرخش زمین به دور خودش، یکسان باشد.

الف) در چه فاصله‌ای از زمین می‌توان این مدار همگام با زمین را یافت؟

ب) تندی مداری این ماهواره چقدر است؟

مثال ۱۱۶

یک ماهواره در خلاف جهت حرکت وضعی زمین طوری به دور زمین می‌چرخد که در هر شبانه روز دو بار در یک مکان معین به وسیلهٔ ناظری ساکن در سطح زمین رؤیت می‌شود. دورهٔ گردش این ماهواره به دور زمین چند ساعت است؟