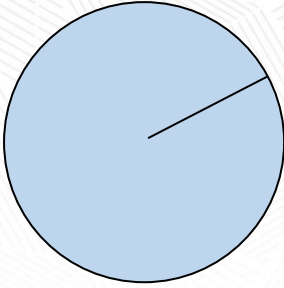




دایره: مکان هندسی نقاطی است که از یک نقطه‌ی ثابت، فاصله‌ی معینی دارند.

هر دایره به مرکز O و شعاع r را به صورت $C(O, r)$ نمایش می‌دهند

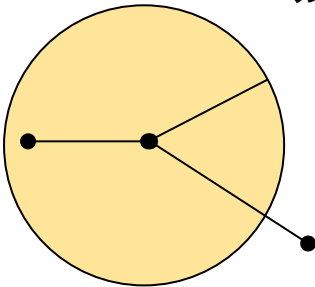


وضعیت نقطه و دایره: برای نقطه A و دایره $C(O, r)$ سه حالت قابل تصور است:

(۱) اگر $OA > r$ آنگاه نقطه A بیرون از دایره است.

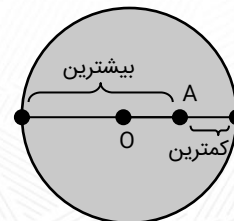
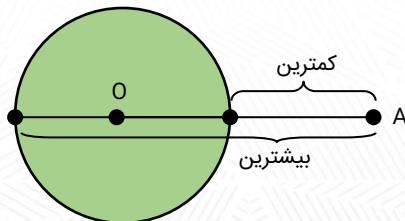
(۲) اگر $OA < r$ آنگاه نقطه A داخل دایره است.

(۳) اگر $OA = r$ آنگاه نقطه A روی دایره است.



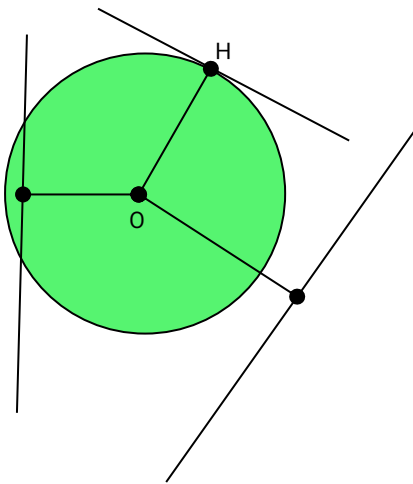
۱- فاصله نقطه A تا مرکز دایره $C(O, x+2)$ برابر $2x-1$ است، اگر نقطه داخل دایره باشد حدود x را بیابید.

نکته: دورترین و نزدیکترین نقاط دایره نسبت به نقطه‌ی مفروض A دو انتهای قطری از دایره هستند که از A می‌گذرد.



۲- کمترین و بیشترین فاصله نقطه A تا دایره C برابر ۳ و ۱۱ است، شعاع دایره را بیابید.

وضعیت خط و دایره: برای خط d و دایره $C(O, r)$ سه حالت قابل تصور است، از مرکز دایره عمودی بر خط رسم می‌کنیم:



(۱) اگر $OH > r$ آنگاه خط d بیرون از دایره است.

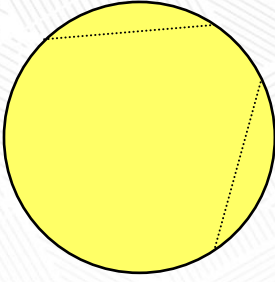
(۲) اگر $OH < r$ آنگاه خط d متقاطع با دایره است.

(۳) اگر $OH = r$ آنگاه خط d مماس بر دایره است.

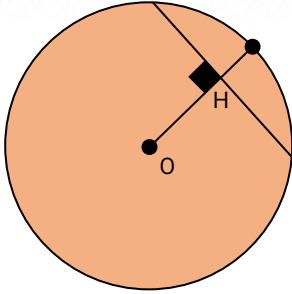
۳- فاصله خط d تا مرکز دایره $C(O, 7-2x)$ برابر $2x-1$ است، اگر خط و دایره دو نقطه مشترک داشته باشند، حدود x را بیابید.

۴- فاصله مرکز دایره $C(O, 2)$ تا خط d برابر ۷ است، کمترین و بیشترین فاصله نقاط دایره C تا خط d را بیابید.

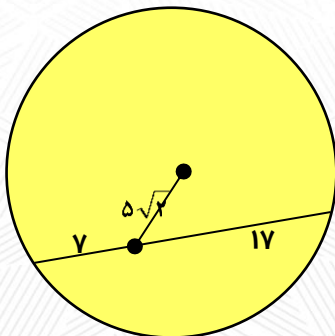
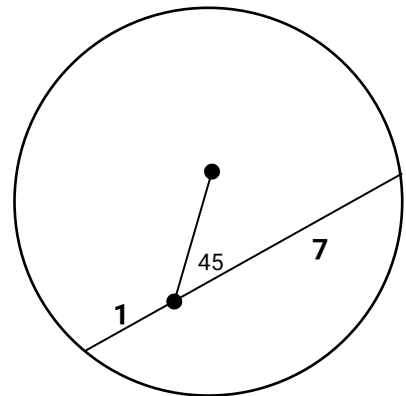
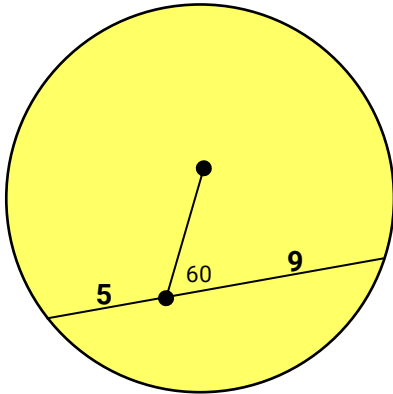
وتر و کمان در دایره:



نکته ۲: عمود منصف هر وتر در دایره از مرکز می‌گذرد به عبارت دیگر اگر از مرکز دایره به وسط وتر وصل کنیم بر آن عمود می‌شود.



5- در شکل‌های زیر شعاع دایره را بیابید.





۶- فاصله مرکز دایره $C(0, 5)$ تا وسط وترى به طول ۶ در این دایره چقدر است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۱

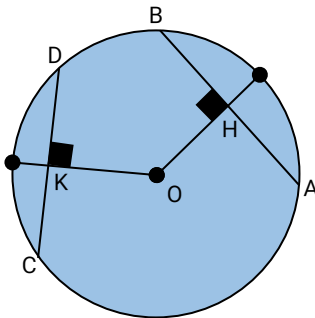
۷- در دایره ای به شعاع ۶ طول وترى که عمودمنصف یک شعاع باشد چقدر است؟

- (۱) ۶
(۲) $۶\sqrt{۳}$
(۳) $6\sqrt{3}$
(۴) $۳\sqrt{۳}$

۸- در دایره‌ی $C(O, R)$ ، طول وتر AB برابر نصف شعاع است. از نقطه‌ی M وسط AB عمود MD را بر OA رسم می‌کنیم.

طول AD برابر با کدام است؟

- (۱) $\frac{R}{۲}$
(۲) $\frac{R}{۴}$
(۳) $\frac{R}{۸}$
(۴) $\frac{R}{۱۶}$



نکته ۳: وترهای مساوی در دایره، کمانهای برابر دارند و از مرکز دایره به یک فاصله‌اند.

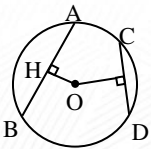
$$AB = CD \Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD} \Leftrightarrow OH = OH'$$

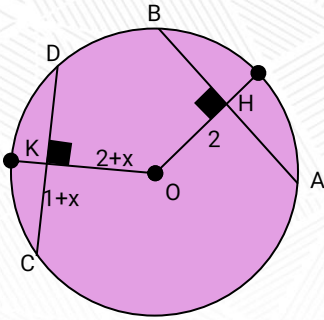
نکته ۴: وتر بزرگ کمان بزرگتر دارد و به مرکز دایره نزدیکتر است.

$$AB > CD \Leftrightarrow \widehat{AB} > \widehat{CD} \Leftrightarrow OH < OK$$

۹- در شکل زیر اگر $\widehat{CD} < \widehat{AB}$ باشد، آن‌گاه کدام رابطه برقرار است؟ $OH = 4x + 2$ ، $OH' = x + 8$

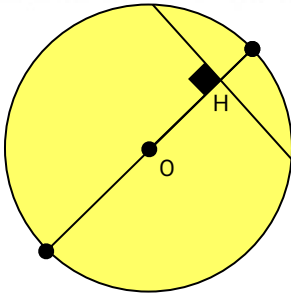
- (۱) $-\frac{1}{2} < x < 2$
(۲) $-\frac{1}{2} \leq x < 2$
(۳) $x < 3$
(۴) $0 \leq x < 3$





۱۰- در شکل مقابل اگر $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ شعاع دایره چقدر است؟

- (۱) ۶
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵



نکته ۵: کوتاهترین وتری که از نقطه‌ی ثابت H درون یک دایره رسم می‌شود بر قطر گذرنده از آن نقطه عمود است.

۱۱- فاصله مرکز دایره $C(0, 5)$ تا نقطه A برابر ۳ است، طول کوتاهترین وتر گذرنده از A در این دایره چقدر است؟

- (۱) ۸
(۲) ۶
(۳) ۴
(۴) ۵

۱۲- کمترین و بیشترین فاصله نقطه A تا دایره C برابر ۸ و ۱۸ است، طول کوتاهترین وتر گذرنده از A در این دایره چقدر است؟

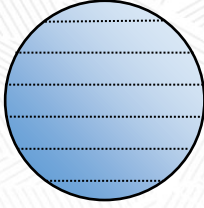
- (۱) ۱۲
(۲) ۱۶
(۳) ۲۰
(۴) ۲۴

۱۳- دایره‌ای به شعاع ۴ و نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۱ از مرکز دایره مفروض است. چند وتر داخل دایره می‌توان رسم کرد که طول آن‌ها ۲ باشد و از M بگذرد؟

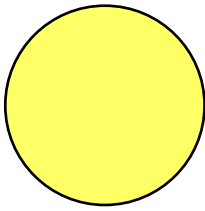
- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) صفر
(۴) بی‌شمار



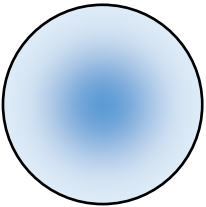
۱۴- مکان هندسی وسط وترهای موازی در یک دایره را بیابید.



۱۵- مکان هندسی وسط وترهای مساوی در یک دایره را بیابید.



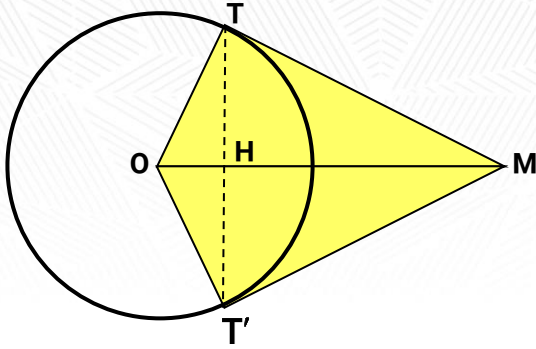
۱۶- مکان هندسی وسط وترهایی که از نقطه‌ی A درون دایره‌ای $C(O,R)$ می‌گذرند را بیابید.



۱۷- مکان هندسی وسط وترهایی به طول ۶ درون دایره‌ی $C(O,5)$ کدام است؟

- (۱) قطری از دایره
(۲) دو خط موازی
(۳) یک دایره به شعاع ۴
(۴) یک دایره به شعاع ۳

خط مماس بر دایره: از هر نقطه خارج از دایره می‌توان دو مماس بر دایره رسم کرد:



(۱) مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره مساویند.

(۲) OM نیمساز است و عمود منصف TT' می‌باشد.

(۳) TH ارتفاع وارد بر وتر در مثل OTM است یعنی:

۱۸- فاصله M تا مرکز دایره‌ای $C(0,2)$ برابر ۴ واحد است اگر MT و MT' بر دایره مماس باشند مساحت چهارضلعی $MTOT'$ کدام است؟

- (۱) $۴\sqrt{۳}$ (۲) ۴
(۳) $۲\sqrt{۶}$ (۴) $۳\sqrt{۲}$



۱۹- در دایره‌ی $C(0,3)$ پاره خط‌های AT و AT' بر دایره مماس هستند. اگر $OA=5$ آنگاه اندازه‌ی TT' کدام است؟

- (۱) $1/8$
(۲) $3/6$
(۳) $4/8$
(۴) $2/4$

۲۰- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) در هر دایره، وترهای مساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند.
(۲) در هر دایره، از دو وتر، آن که بزرگ‌تر است به مرکز نزدیک‌تر است.
(۳) از هر نقطه می‌توان دو مماس با طول مساوی بر دایره رسم کرد.
(۴) در هر دایره، قطری که به وسط وتر وصل شود، عمودمنصف آن است.

۲۱- نقطه A به فاصله ۸ از نزدیکترین نقاط دایره‌ای به شعاع ۵ واحد قرار دارد. اندازه مماسی که از نقطه A بر دایره رسم شود چقدر است؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۱۳
(۳) ۱۰
(۴) ۱۵

۲۲- دایره‌ی C به شعاع ۲ از نقطه‌ی A به زاویه‌ی 60° رویت می‌شود اگر O مرکز دایره و T نقطه‌ی تماس خطی که از A می‌گذرد با دایره باشد، مساحت مثلث AOT کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{3}$
(۲) $2\sqrt{3}$
(۳) $\sqrt{3}$
(۴) $8\sqrt{3}$



۲۳- مکان هندسی نقاطی که از آنها دو مماس عمود بر هم دایره‌ی $C(O,R)$ رسم می‌شود را بیابید.

۲۴- دایره‌ی $C(O,3)$ مفروض است. مکان هندسی نقاطی که مماس‌های رسم شده از آن‌ها بر دایره برهم عمود باشند، شکلی با کدام مساحت را ایجاد می‌کند؟

36π (۴)

18π (۳)

12π (۲)

4π (۱)

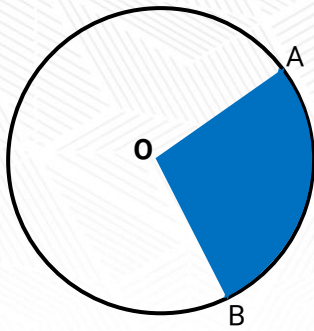
۲۵- مکان هندسی نقاطی که مماس‌هایی به طول $2R$ از آنها بر دایره‌ی $C(O,R)$ رسم می‌شود کدام است؟

(۱) دو خط موازی

(۲) دایره‌ای به شعاع $2R$

(۳) دایره‌ای به شعاع $5R$

(۴) دایره‌ای به شعاع $\sqrt{3}R$



زاویه مرکزی: زاویه بین دو شعاع از دایره است.

اندازه کمان دایره با زاویه مرکزی روبرویش برابر است.

$$\widehat{AB} = \angle AOB$$

۲۶- در دایره‌ی $C(O, 3)$ طول وتر AB برابر $3\sqrt{3}$ است. کمان AB چند درجه است؟

۱۲۰ (۴)

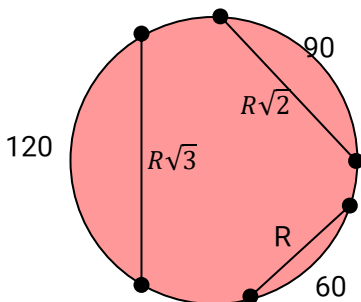
۹۰ (۳)

۶۰ (۲)

۳۰ (۱)

نکته: طول وتری که کمان نظیر آن در دایره $C(O, R)$ برابر 60° و 90° و 120° باشد

به ترتیب $R, R\sqrt{2}, R\sqrt{3}$ برابر است و بالعکس.



۲۷- دایره‌ی $C(O, 3)$ از همه راس‌های $ABCD$ می‌گذرد. اگر $AD = CD = 3, BC = 3\sqrt{2}$ باشد، کمان AB چند

درجه است؟

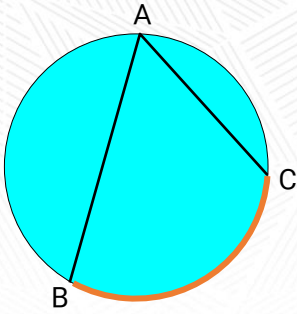
۱۲۰ (۴)

۹۰ (۳)

۱۸۰ (۲)

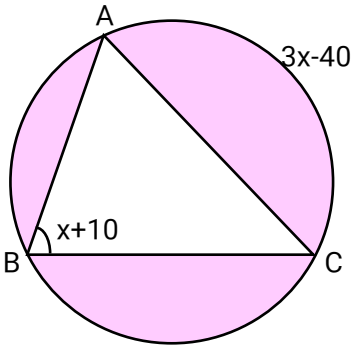
۱۵۰ (۱)





زاویه‌ی محاطی: راس آن روی دایره و دو ضلع آن دو وتر از دایره است.
اندازه زاویه محاطی نصف کمان درونش است:

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$



۲۸- در شکل مقابل اگر $AC=BC$ زاویه C کدام است؟

- 60 (۱)
- 70 (۲)
- 50 (۳)
- 40 (۴)



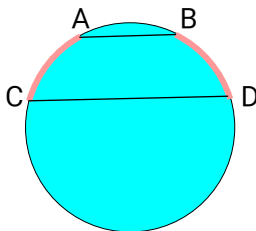
۲۹- در مثلث ABC اندازه زاویه A برابر ۴۵ درجه است اگر $BC=6$ آنگاه شعاع دایره محیطی مثلث ABC کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳۰- در مثلثی اندازه‌ی یک ضلع $4\sqrt{3}$ و اندازه‌ی زاویه‌ی مقابل آن 60° درجه است. مساحت دایره محیطی آن چند برابر π است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

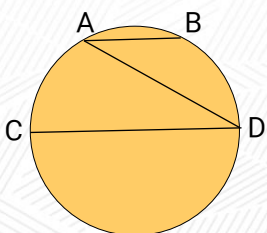
نکته: کمان‌های محصور بین وترهای موازی در دایره برابرند.



$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

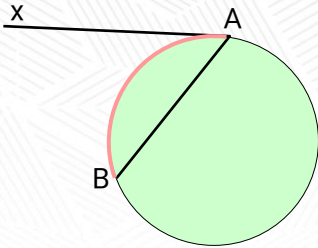
۳۱- در شکل مقابل اگر AB موازی با قطر CD و $\widehat{AB} = 52$ باشد، زاویه A کدام است؟

- (۱) 28 (۲) ۳۲ (۳) ۳۴ (۴) ۳۶

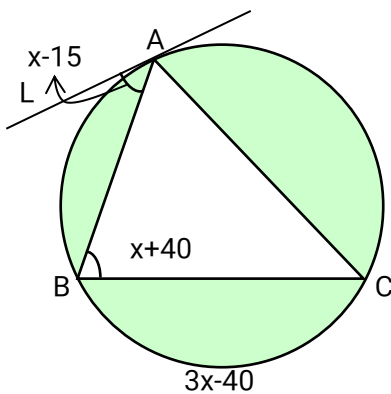




زاویه ی ظلّی: راس آن روی دایره، یک ضلع آن مماس بر دایره و ضلع دیگرش وتری از دایره است.
اندازه زاویه ظلّی نصف کمان درونش است:



$$\widehat{XAB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$



۳۲- در شکل مقابل اگر خط L مماس بر دایره باشد، زاویه x کدام است؟

۷۰ (۱)

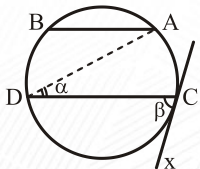
۶۰ (۲)

۵۰ (۳)

۴۰ (۴)

۳۳- در شکل زیر، وتر AB برابر شعاع دایره و $AB \parallel CD$ و $\beta = 2\alpha$ و CX مماس بر دایره است. کمان \widehat{BD} چند

درجه است؟



۶۰ (۲)

۵۰ (۱)

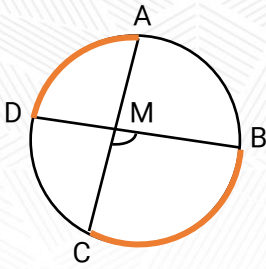
۷۵ (۴)

۷۰ (۳)



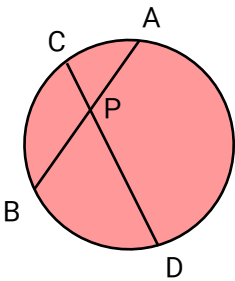


زاویه بین دو وتر:



$$\widehat{M} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{AD}}{2}$$

۳۴- در شکل زیر $\widehat{AC} = 2x^\circ$ ، $\widehat{BD} = 3x^\circ$ ، $\widehat{CPB} = 5x^\circ$ مقدار x چند درجه است؟



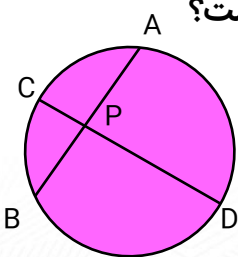
۲۰ (۱)

۲۴ (۲)

۳۲ (۳)

۳۶ (۴)

۳۵- در دایره $C(O, r)$ مطابق شکل زیر $AC = r\sqrt{2}$ ، $BD = r\sqrt{3}$ ، زاویه APD چند درجه است؟



۸۵ (۴)

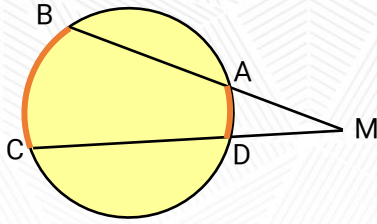
۸۰ (۳)

۷۵ (۲)

۶۵ (۱)

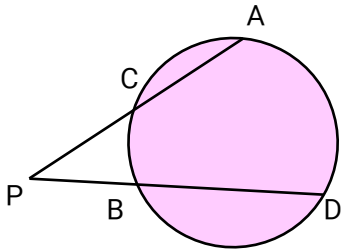


زاویه بین امتداد دو وتر:



$$\widehat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AD}}{2}$$

۳۶- در دایره $C(O, r)$ مطابق شکل زیر $BD = r\sqrt{2}$ ، $AC = BC = r$ زاویه P چند درجه است؟



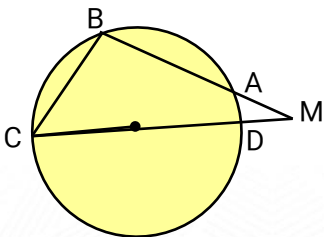
۵۰ (۴)

۵۵ (۳)

۴۰ (۲)

۴۵ (۱)

۳۷- در شکل مقابل CD قطر دایره است، اگر $AB = BC$ و $\widehat{M} = 30$ باشد، زاویه \widehat{ABC} چند درجه است؟



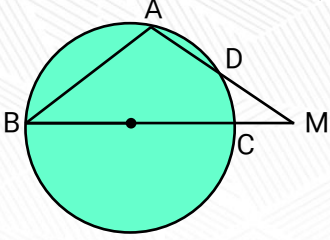
۹۵ (۱)

۱۰۰ (۲)

۱۱۰ (۳)

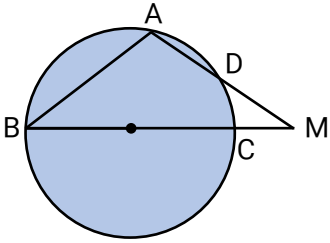
۱۱۵ (۴)

۳۸- در شکل مقابل BC قطر دایره است، اگر $AB = AM$ و $\widehat{AD} = 60$ باشد، زاویه \widehat{ABC} چند درجه است؟



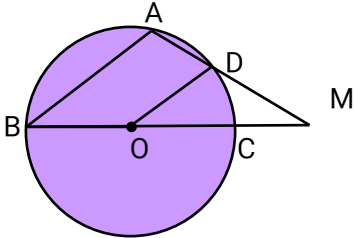
- (۱) ۳۵
(۲) ۴۰
(۳) ۴۵
(۴) ۵۵

۳۹- در شکل مقابل BC قطر دایره است، اگر DM برابر با شعاع دایره و $\widehat{AD} = 40$ باشد، زاویه \widehat{M} چند درجه است؟



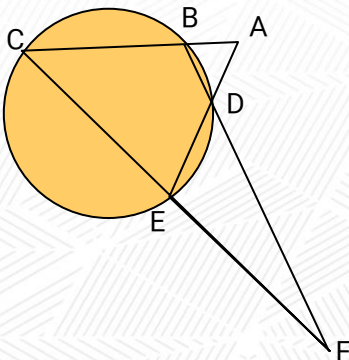
- (۱) ۳۵
(۲) ۴۰
(۳) ۲۵
(۴) ۳۰

۴۰- در شکل مقابل AB با شعاع OD موازی است، اگر $\widehat{AD} = 40$ باشد، زاویه \widehat{M} چند درجه است؟



- (۱) ۲۵
(۲) ۴۰
(۳) ۳۵
(۴) ۳۰

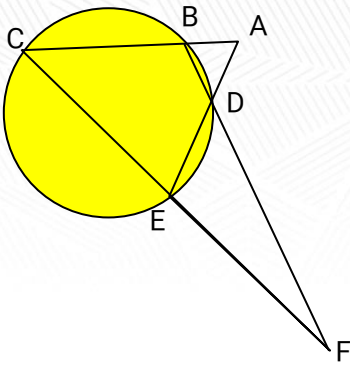
۴۱- در شکل مقابل $AB = BD$ و $\widehat{A} = 50$ می باشد. زاویه F چند درجه است؟



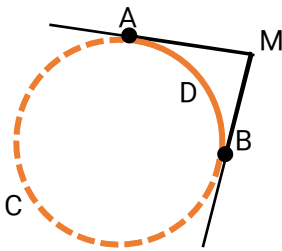
- (۱) ۲۵
(۲) ۳۵
(۳) ۴۰
(۴) ۳۰



۴۲- در شکل مقابل $\hat{C} = 2\hat{A} = 3\hat{F} = 6\hat{F}$ می باشد. زاویه ی C چند درجه است؟

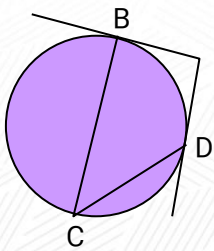


- ۴۵ (۱)
- ۵۵ (۲)
- ۶۰ (۳)
- ۷۵ (۴)



زاویه بین دو مماس:

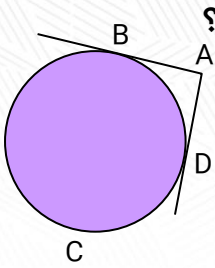
$$\hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2}$$



۴۳- در شکل مقابل AB و AD بر دایره ی O مماسند و $\hat{C} = 40^\circ$ است. زاویه ی \hat{A} کدام است؟

- ۱۴۰ (۴)
- ۱۲۰ (۳)
- ۱۱۰ (۲)
- ۱۰۰ (۱)





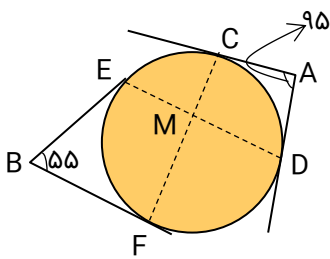
۴۴- در شکل مقابل AB و AD بر دایره O مماسند و با شعاع دایره برابرند، زاویه \widehat{A} کدام است؟

۸۰ (۴)

۱۲۰ (۳)

۹۰ (۲)

۱۰۰ (۱)



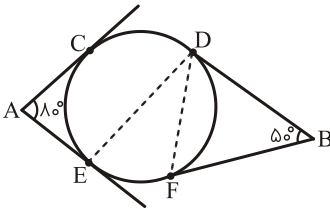
۴۵- در شکل مقابل، اضلاع زاویه‌های A و B بر دایره مماس‌اند. زاویه \widehat{EMC} چند درجه است؟

۸۵ (۴)

۷۵ (۳)

۶۵ (۲)

۶۰ (۱)



۴۶- در شکل مقابل، اضلاع زاویه‌های A و B بر دایره مماس‌اند. اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد، زاویه \widehat{EDF} چند درجه است؟

۴۰ (۴)

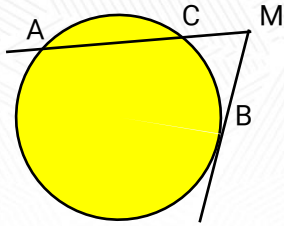
۳۵ (۳)

۳۰ (۲)

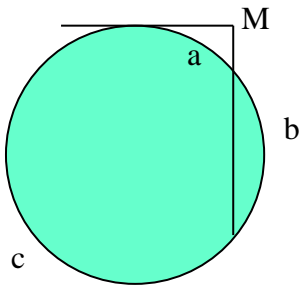
۲۵ (۱)



زاویه بین امتداد وتر و مماس:



$$\widehat{M} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{BC}}{2}$$



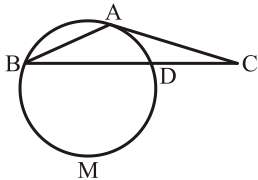
۴۷- در شکل مقابل اگر $\frac{a}{1} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7}$ باشد، \widehat{M} کدام است؟

۷۰ (۴)

۷۵ (۳)

۸۰ (۲)

۹۰ (۱)



۴۸- در شکل مقابل، مماس AC بر دایره با وتر AB از دایره بربزند. اگر کمان

DMB برابر ۲۲۲ درجه باشد، زاویه C چند درجه است؟

۲۴ (۴)

۲۳ (۳)

۲۲ (۲)

۲۱ (۱)

۴۹- در شکل مقابل، نقطه H محل تلاقی ارتفاعات مثلث ABC است. زاویه

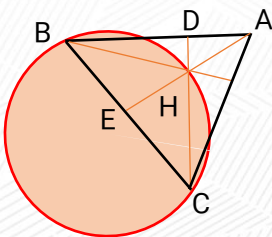
AHD با کدام زاویه برابر است؟

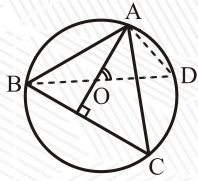
\widehat{ABC} (۲)

\widehat{CAE} (۱)

\widehat{AHC} (۴)

\widehat{ADH} (۳)





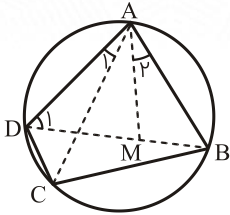
۵۰- در شکل مقابل، O محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC است. زاویه \widehat{AOD} برابر کدام است؟

\widehat{ADO} (۴)

\widehat{OAC} (۳)

\widehat{CAD} (۲)

\widehat{OBC} (۱)



۵۱- در شکل مقابل $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ حاصل $AD \cdot BC$ برابر کدام است؟

$BM \cdot AC$ (۲)

$DM \cdot AC$ (۱)

$BD \cdot BM$ (۴)

$AB \cdot CD$ (۳)

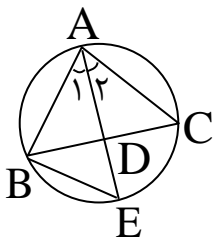
۵۲- در مثلث متساوی‌الساقین ABC، خط گذرا بر رأس A قاعده‌ی BC و دایره‌ی محیطی مثلث را در D و E قطع می‌کند. اندازه‌ی $AD \cdot AE$ برابر با کدام است؟

BC^2 (۴)

AC^2 (۳)

$CD \cdot CB$ (۲)

$BD \cdot BC$ (۱)



۵۳- در شکل مقابل $DE = 4$ و $BE = 6$ اندازه‌ی نیمساز AD کدام است؟

۸ (۱)

۷ (۲)

۶ (۳)

۵ (۴)

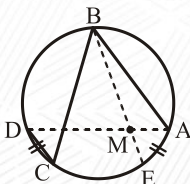
۵۴- در شکل مقابل، $\widehat{AE} = \widehat{CD}$ و $AB = 6$ و $BC = 8$ و $CD = 3$ اندازه‌ی AM کدام است؟

$2/25$ (۲)

۲ (۱)

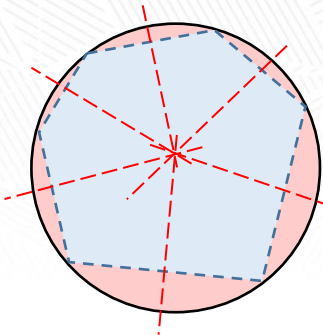
$2/75$ (۴)

$2/5$ (۳)

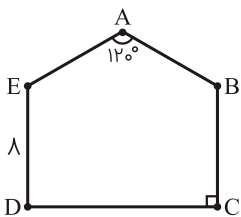


چند ضلعی های محاطی:

چند ضلعی را محاطی می گوئیم اگر و فقط اگر دایره ای باشد که از همه رئوس آن بگذرد، در این صورت دایره را دایره محیطی آن چند ضلعی می نامیم.



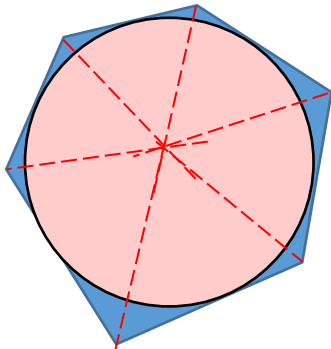
می دانیم برای اینکه دایره ای از دو نقطه بگذرد، باید مرکز دایره روی عمود منصف پاره خطی باشد که آن دو نقطه دو سر آن قرار دارند، بنابراین یک چند ضلعی، محاطی است اگر و فقط اگر عمود منصف های همه ضلع های آن در یک نقطه هم رس باشند. این نقطه مرکز دایره محیطی چند ضلعی است.



۱) در پنج ضلعی محاطی ABCDE، اگر اندازه ی ضلع DE برابر با ۸ باشد، اندازه ی قطر BD کدام است؟

- ۱) ۱۰
- ۲) ۱۲
- ۳) ۱۴
- ۴) ۱۶

چند ضلعی های محیطی:



چند ضلعی را محیطی می گوئیم اگر و فقط اگر دایره ای باشد که بر همه ضلع های آن مماس باشد، در این صورت دایره را دایره محاطی این چند ضلعی می نامیم. یک چند ضلعی، محیطی است اگر و فقط اگر همه نیمسازهای زاویه های آن در یک نقطه هم رس باشند. این نقطه مرکز دایره محاطی چند ضلعی است.

مثال : اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S شعاع دایره محاطی برابر r باشد ثابت کنید $S=r.p$

۲) در یک چند ضلعی محیطی به مساحت ۸۴، اگر طول شعاع دایره ی محاطی برابر با ۳ باشد، آن گاه مجموع طول اضلاع کدام است؟

- ۱) ۲۸
- ۲) ۵۶
- ۳) ۳۰
- ۴) ۶۰

۳) در یک پنج ضلعی محیطی، مجموع طول دو ضلع غیر مجاور چه کسری از محیط است؟

- ۱) کمتر از $\frac{1}{2}$
- ۲) $\frac{1}{2}$
- ۳) بیش تر از $\frac{1}{2}$
- ۴) مشخص نیست.

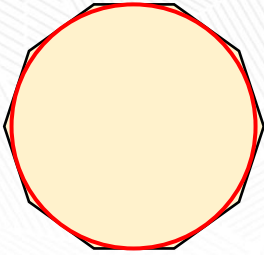
نکته: تمام n ضلعی های منتظم، محیطی هستند.

برای n ضلعی منتظم محیطی به ضلع a شعاع دایره مماس بر اضلاع برابر است با:

$$a = 2R \tan\left(\frac{180}{n}\right)$$

همچنین مساحت آنرا می توان برحسب شعاع دایره و اندازه ضلع بدست آورد:

$$s = \frac{1}{2} n R a = n R^2 \tan\left(\frac{180}{n}\right)$$



۴) یک n ضلعی منتظم بر دایره‌ای به شعاع ۱ واحد محیط شده است. محیط این n ضلعی منتظم کدام است؟
 ۲۴ $\tan 15^\circ$ (۴) ۱۲ $\tan 15^\circ$ (۳) ۱۲ $\sin 15^\circ$ (۲) ۲۴ $\sin 15^\circ$ (۱)

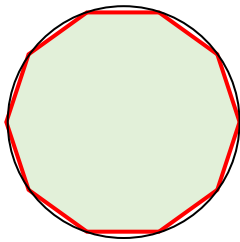
نکته: تمام n ضلعی های منتظم، محاطی هستند.

برای n ضلعی منتظم محاطی به ضلع a شعاع دایره گذرنده از راس ها برابر است با:

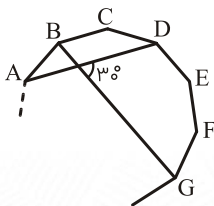
$$a = 2R \sin\left(\frac{180}{n}\right)$$

همچنین مساحت آنرا می توان برحسب شعاع دایره بدست آورد:

$$s = \frac{1}{2} n R^2 \sin\left(\frac{360}{n}\right)$$



۵) در شکل مقابل، بخشی از یک n ضلعی منتظم رسم گردیده است. n کدام است؟
 ۲۴ (۲) ۱۸ (۱)
 ۳۶ (۴) ۳۰ (۳)



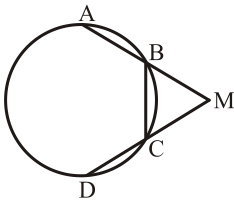
۶) اگر مساحت شش ضلعی منتظم محاط در یک دایره $6\sqrt{3}$ باشد، آن گاه مساحت شش ضلعی منتظم محیط بر این دایره چند برابر $\sqrt{3}$ است؟
 ۷/۲ (۱) ۷/۵ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

۷) نسبت شعاع دایره‌ی محاطی یک شش ضلعی منتظم به شعاع دایره‌ی محیط آن، کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\cos 15^\circ$ (۴) $\sin 15^\circ$

۸) محیط‌های چندضلعی‌های منتظم محیطی و محاطی دایره‌ای به ترتیب ۱۸ و ۹ واحد می‌باشند. شعاع دایره کدام است؟

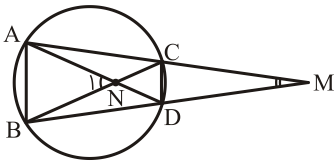
- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۳ (۴) $\sqrt{3}$



۹) در شکل مقابل، سه ضلع متوالی از یک n ضلعی منتظم رسم شده است. اگر $\widehat{M} = 100^\circ$ باشد، n کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۹

۱۰) در شکل زیر، AB ضلع یک هشت ضلعی منتظم و CD ضلع یک دوازده ضلعی منتظم محاط در دایره هستند. حاصل $|\widehat{M} - \widehat{N}_1|$ کدام است؟



- (۱) 45° (۲) 40° (۳) 35° (۴) 30°

۱۱) مساحت هشت ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع ۲ واحد کدام است؟

- (۱) $8\sqrt{2}$ (۲) $8(\sqrt{2} - 1)$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) $4(2 + \sqrt{2})$

۱۲) در دایره‌ای به مساحت 2π ، دوازده ضلعی منتظمی محاط شده است، مساحت این دوازده ضلعی چقدر است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۳

۱۳) مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی منتظم برابر با 720° است. اگر محل‌های تماس n ضلعی و دایره‌ی محاطی آن را متوالیاً به هم وصل کنیم، مساحت شکل جدید چقدر با مساحت شکل اولیه تفاوت دارد؟ (طول هر ضلع n ضلعی برابر با ۴ است.)

- (۱) ۶ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳) $6\sqrt{3}$ (۴) ۹

۱۴) مربعی به طول ضلع ۲ درون دایره‌ای محاط است. عمود منصف‌های اضلاع این مربع را رسم می‌کنیم تا دایره‌ی چهار نقطه قطع کند. این چهار نقطه را رئوس مربع تشکیل یک هشت ضلعی می‌دهند. طول ضلع این هشت ضلعی کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2} \sin 22/5^\circ$ (۲) $2\sqrt{2} \tan 22/5^\circ$ (۳) $4 \sin 22/5^\circ$ (۴) $4 \tan 22/5^\circ$

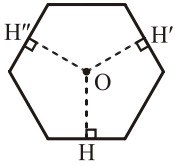
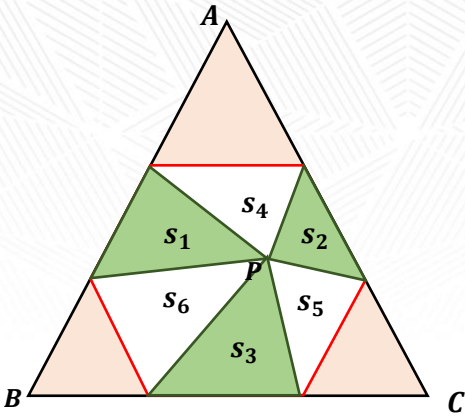
نکته: اگر شش ضلعی منتظمی را مطابق شکل درون مثلث متساوی الاضلاع محاط کنیم، روابط زیر برقرار است:

(۱) محیط ۶ ضلعی برابر با $\frac{2}{3}$ محیط مثلث است

(۲) مساحت ۶ ضلعی برابر با $\frac{2}{3}$ مساحت مثلث است

(۳) برای هر نقطه دلخواه P درون ۶ ضلعی منتظم داریم:

$$S_1 + S_2 + S_3 = S_4 + S_5 + S_6$$



(۱۵) در شش ضلعی منتظم زیر اگر $OH + OH' + OH'' = 3\sqrt{3}$ باشد، طول

شعاع دایره‌ی محیطی این شش ضلعی کدام است؟

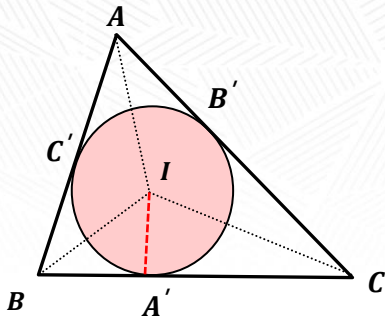
۳ (۴)

۲ (۳)

$\sqrt{3}$ (۲)

۱ (۱)

نکته: سه نیمساز داخلی در هر مثلث هم‌رسند نقطه‌ی هم‌رسی از سه ضلع مثلث به یک فاصله است و مرکز دایره‌ی محاطی داخلی (مماس بر اضلاع) است.



$$IA' = IB' = IC' = r$$

اگر P نصف محیط مثلث باشد آنگاه داریم

$$r = \frac{S_{ABC}}{P}$$

$$CA' = CB' = P - AB \quad BA' = BC' = P - AC \quad AB' = AC' = P - BC$$

مثال: اگر اندازه سه ارتفاع مثلثی را با h_a, h_b, h_c نشان دهیم ثابت کنید

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

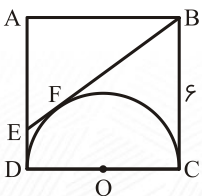
۱۶) در مثلث ABC فاصله‌ی نقطه‌ی هم‌رسی نیمسازها تا دو ضلع برابر $x - 4$ و $2x - 10$ است. فاصله‌ی آن از ضلع سوم چقدر است؟

- ۱) ۶ (۲) ۲) ۵ (۳) ۳) ۳ (۴) ۴) ۲ (۴)

۱۷) شعاع دایره‌ی محاطی داخلی یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ کدام است؟

- ۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۲) $2\sqrt{3}$ (۳) ۳) $3\sqrt{3}$ (۴)

۱۸) در شکل زیر، O مرکز نیم‌دایره و طول هر ضلع مربع $ABCD$ برابر با ۶ سانتی‌متر است. محیط مثلث ABE چند سانتی‌متر است؟



- ۱) ۱۲ (۲) ۲) ۱۶ (۳) ۳) ۱۸ (۴) ۴) ۲۰

۱۹) در مثلث ABC با طول اضلاع $3\sqrt{2}$ ، $4\sqrt{2}$ و $5\sqrt{2}$ ، فاصله‌ی محل برخورد نیمسازهای داخلی از اضلاع مثلث کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲) ۱ (۳) ۳) $\sqrt{2}$ (۴) ۴) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

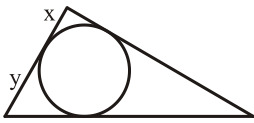
۲۰) در مثلثی با اضلاع ۵ و ۵ و ۸ شعاع دایره‌ی محاطی داخلی چقدر است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۲۱) در مثلث متساوی‌الساقین اندازه‌ی ارتفاع وارد بر قاعده ۸ و شعاع دایره‌ی محاطی داخلی آن ۳ واحد است. طول قاعده‌ی این مثلث کدام است؟

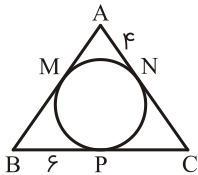
- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

۲۲) دایره‌ی محاطی داخلی یک مثلث به طول اضلاع ۱۳، ۹ و ۸، در نقطه‌ی تماس، کوچک‌ترین ضلع را به دو قطعه تقسیم می‌کند. نسبت آن دو قطعه کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۲۳) مطابق شکل مقابل، دایره‌ی محاطی مثلث ABC ($AB = AC$) رسم شده است. با توجه به اندازه‌های مشخص‌شده، شعاع این دایره کدام است؟



- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۴) در مثلثی با اضلاع ۵ و ۵ و ۸ فاصله مرکز دایره‌ی محاطی تا مرکز ثقل چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{4}$

۲۵) در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول وتر ۱۰، اگر نسبت اضلاع قائمه برابر با $\frac{3}{4}$ باشد، آن‌گاه مجموع فاصله‌ی نقطه‌ی هم‌مرسی نیم‌سازها از این دو ضلع کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۲۶) مساحت محصور بین مثلثی به اضلاع ۲۵، ۲۴ و ۷ و دایره‌ی محاطی داخلی آن کدام است؟ ($\pi = 3$)

- (۱) ۵۴ (۲) ۵۷ (۳) ۶۰ (۴) ۶۳

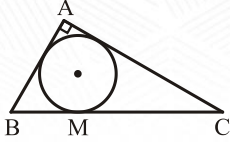
۲۷) در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، طول یک ضلع قائم ۸ و شعاع دایره‌ی محاطی داخلی آن ۳ واحد است، اندازه‌ی وتر این مثلث کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴) ۱۸



۲۸ شعاع دایره‌ی محاطی درونی مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول وتر آن برابر با ۷ و محیط آن برابر با ۱۵ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$



۲۹ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) می‌دانیم $BC = 10$ است. اگر دایره‌ی محاطی داخلی این مثلث در نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۴ واحد از رأس B بر ضلع BC مماس باشد، طول ضلع قائمه AC کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۹

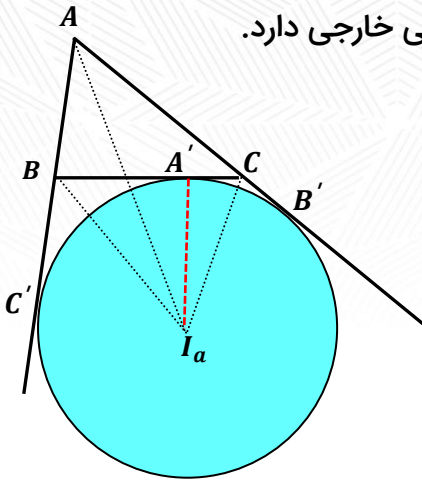
۳۰ در یک مثلث بین طول اضلاع، رابطه‌ی $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6}$ برقراری است. اگر شعاع دایره‌ی محاطی داخلی این مثلث ۶ واحد باشد، طول ارتفاع نظیر ضلع c کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۳۱ طول دو ارتفاع از مثلثی به ترتیب ۲ و ۳ برابر شعاع دایره‌ی محاطی داخلی آن هستند. اگر طول بزرگ‌ترین ارتفاع مثلث ۶ واحد باشد، نسبت اندازه‌ی محیط به اندازه‌ی مساحت مثلث کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{1}{4}$

نکته: هر دو نیمساز خارجی و یک نیمساز داخلی هم‌رسند. نقطه‌ی هم‌رسی از سه ضلع یا امتداد آنها به یک فاصله است و مرکز دایره‌ی محاطی خارجی می‌باشد یعنی هر مثلث سه دایره‌ی محاطی خارجی دارد.



در شکل نقاط A' و B' و C' محل تماس دایره‌ی (I_a) با اضلاع یا امتداد آنها است و داریم:

$$\begin{aligned} AB' &= AC' = P \\ BA' &= BC' = P - AB \\ CA' &= CB' = P - AC \end{aligned}$$

مثال: ثابت کنید

$$r_a = \frac{S_{ABC}}{p - a}$$

مثال: ثابت کنید

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

(۳۲) در صفحه‌ی مثلث چند نقطه وجود دارد که از سه ضلع یا امتداد آنها به یک فاصله باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

(۳۳) در مثلث ABC به طول اضلاع $AB = ۲۰$ ، $AC = ۱۹$ و $BC = ۷$ ، اگر دایره‌ی محاطی خارجی نظیر ضلع BC در نقطه‌ی D بر این ضلع مماس باشد، آن‌گاه طول BD کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

(۳۴) در مثلث ABC با اضلاع ۳ و ۵ و ۶ دایره‌ی محاطی خارجی روبروی رأس A با ضلع $BC = ۶$ در نقطه‌ی A'

مماس است. نسبت $\frac{BA'}{A'C}$ چقدر است؟

- ۱ (۱) $\frac{۲}{۵}$ $\frac{۱}{۲}$ (۲) $\frac{۳}{۴}$ (۳) $\frac{۴}{۷}$ (۴)

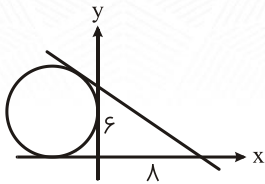
(۳۵) در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول ضلع‌های قائمه ۳ و ۴، دایره‌ی محاطی خارجی مماس بر وتر، در نقاط A و B بر امتداد دو ضلع دیگر مماس است. طول AB کدام است؟

- ۶ (۱) $۶\sqrt{۲}$ (۲) ۱۰ (۳) $۱۰\sqrt{۲}$ (۴)



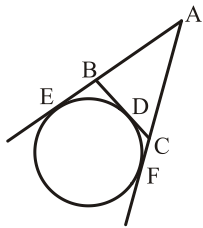
۳۶) در یک مثلث قائم‌الزاویه، دایره‌ی محاطی داخلی در نقطه‌ی تماس با وتر، آن را به دو قطعه به طول‌های ۳ و ۱۰ واحد تقسیم می‌کند. اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محاطی خارجی نظیر رأس قائمه کدام است؟

۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴) ۳۰ (۴)



۳۷) در شکل مقابل، شعاع دایره کدام است؟

- ۱) $3\sqrt{2}$ (۲) ۳
۳) $4\sqrt{2}$ (۴) ۴



۳۸) در شکل مقابل، شعاع دایره کدام است؟ ($AB = 12$ و $AC = 13$ ، $BD = 3$)

- ۱) ۳ (۲) ۴
۳) ۵ (۴) ۶

۳۹) در مثلثی به اضلاع ۴، ۵ و ۷، نسبت مساحت کوچک‌ترین دایره‌ی محاطی خارجی به مساحت دایره‌ی محاطی داخلی کدام است؟

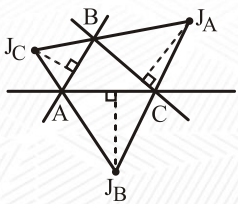
- ۱) ۴ (۲) ۱۶ (۳) $\frac{64}{9}$ (۴) ۶۴

۴۰) مثلثی به طول اضلاع ۵، ۶ و ۷ مفروض است. اندازه‌ی مماس مشترک خارجی بین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین دایره‌ی محاطی این مثلث کدام است؟

- ۱) ۲ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹

۴۱) اگر شعاع دایره‌ی محاطی داخلی ABC برابر با ۱ و شعاع دایره‌های محاطی خارجی برابر a ، $\frac{3}{4}$ و ۴ باشد، مقدار a کدام است؟

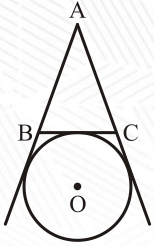
- ۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴) ۸



۴۲) مطابق شکل، نیم‌سازهای خارجی مثلث ABC را رسم می‌کنیم. اگر طول عمودهای مشخص‌شده ۲، ۳ و ۶ باشند. اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{75}{5}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{5}$

۴۳) در شکل مقابل دایره‌ی $C(O, r)$ ، دایره‌ی محاطی خارجی مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$)



است. اگر $h_a = 12$ باشد، حاصل $\frac{r_c h_b}{r_c - h_b}$ کدام است؟ ($AB = c$ و $AC = b$ ، $BC = a$)

۴۰ (۱)

۲۰ (۳)

۳۰ (۲)

۱۵ (۴)

۴۴) اگر I مرکز دایره محاطی داخلی مثلث ABC و نقاط I_a و I_b و I_c محل هم‌مرسی نیم‌سازهای خارجی باشند

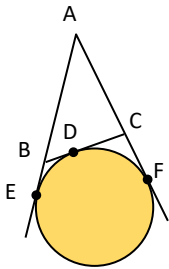
نقطه‌ی I برای مثلث $I_a I_b I_c$ چه نقطه‌ای محسوب می‌شود؟

(۱) مرکز دایره‌ی محاطی

(۲) مرکز ثقل

(۳) محل هم‌مرسی ارتفاع‌ها

(۴) محل هم‌مرسی عمود منصف‌ها



۴۵) در شکل مقابل شعاع دایره $5\sqrt{3}$ است. AE ، AF و BC بر دایره مماس‌اند.

اگر محیط مثلث ABC برابر 30 باشد، زاویه‌ی A چند درجه است؟

۳۰ (۱)

۴۵ (۲)

۶۰ (۳)

۹۰ (۴)

۴۶) در مثلث متساوی الاضلاع به مساحت $\sqrt{3}$ فاصله نقطه تلاقی نیم‌سازهای داخلی B و خارجی C تا ضلع BC کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$

۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳) ۳

۴) $\frac{3}{2}$

۴۷) مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع 6 واحد را در نظر بگیرید. طول مماس مشترک خارجی دو دایره‌ی محاطی داخلی و خارجی این مثلث کدام است؟

۱) ۳

۲) $\frac{4}{5}$

۳) ۶

۴) $\frac{7}{5}$

۴۸) در مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع $\sqrt{3}$ واحد، طول خط‌المركزین دو دایره‌ی محیطی و محاطی خارجی کدام است؟

۱) ۲

۲) $\frac{3}{2}$

۳) ۳

۴) $\frac{5}{2}$

۴۹) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) دایره‌ی محاطی خارجی نظیر رأس A بر امتداد اضلاع AB و AC به ترتیب در T و T' مماس شده است. اندازه‌ی BT' کدام است؟ ($AB = 3$ و $AC = 4$)

۱) $6\sqrt{2}$

۲) $\sqrt{3}$

۳) $3\sqrt{5}$

۴) $6\sqrt{3}$



۵۰ شعاع دایره‌های محاطی داخلی و خارجی نظیر رأس A از ABC به ترتیب برابر با $\frac{2}{5}$ و $\frac{7}{5}$ است. اگر طول مماس مرسوم از نقطه‌ی A بر دایره‌ی محاطی داخلی برابر با 5 باشد، طول مماس مشترک داخلی دو دایره‌ی مفروض کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) 5 (۳) 3 (۴) 6

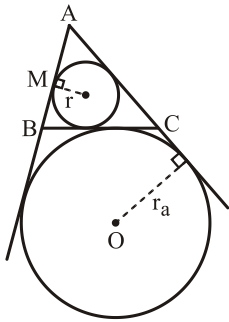
۵۱ در مثلث ABC با اضلاع $AB=5$ ، $AC=7$ و $BC=8$ واحد، نیمساز داخلی زاویه‌ی A ، نیمسازهای زاویه‌ی داخلی و خارجی B را در O و O' قطع می‌کند. اندازه‌ی تصویر قائم OO' ، بر روی BC ، کدام است؟

- (۱) 1 (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) 2 (۴) $\frac{2}{5}$

۵۲ در مثلثی با اضلاع a ، b و 6 ، اگر شعاع دایره‌های محاطی خارجی نظیر اضلاع a و b را با r_a و r_b نشان دهیم و داشته باشیم $r_b = 2r_a$ ، آن‌گاه $b-a$ کدام است؟

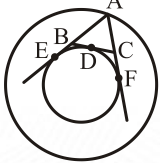
- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 5

۵۳ در شکل زیر، مثلث ABC و دایره‌های محاطی داخلی و محاطی خارجی آن رسم شده‌اند. اگر $AM = 2$ ، $BC = 7$ و $S_{ABC} = 6\sqrt{6}$ باشد، حاصل rr_a کدام است؟



- (۱) 6
(۲) 8
(۳) 10
(۴) 12

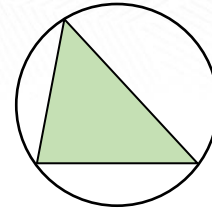
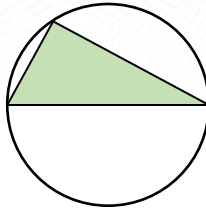
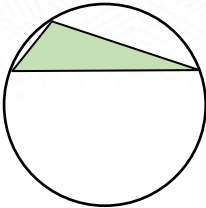
۵۴ در دو دایره‌ی هم‌مرکز، از نقطه‌ی A روی دایره‌ی بزرگ دو مماس AE و AF و از نقطه‌ی D روی کمان کوچک‌تر EF ، مماس دیگری بر دایره‌ی داخلی رسم شده است. با تغییر مکان A و D کدام بیان در مثلث ABC درست است؟



- (۱) محیط ثابت - مساحت متغیر
(۲) محیط متغیر - مساحت ثابت
(۳) محیط ثابت - مساحت ثابت
(۴) محیط متغیر - مساحت متغیر

دایره محیطی مثلث:

هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن به یک فاصله است. سه عمود منصف در یک مثلث هم‌رسند و نقطه‌ی هم‌رسی آنها مرکز دایره‌ی محیطی است که از سه رأس به یک فاصله است. مرکز دایره‌ی محیطی می‌تواند داخل مثلث، وسط یک ضلع (در مثلث قائم‌الزاویه) یا خارج مثلث باشد.



در مثلثی با سه زاویه‌ی محاطی حاده مرکز دایره‌ی محیطی درون مثلث است و در مثلثی که زاویه‌ی منفرجه دارد مرکز دایره‌ی محیطی خارج از مثلث قرار دارد.

$$R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{AC}{2 \sin B} = \frac{AB}{2 \sin C}$$

شعاع دایره‌ی محیطی

۵۵) در مثلثی با اضلاع ۵ و ۵ و ۶ شعاع دایره‌ی محیطی چقدر است؟

- ۱) $\frac{25}{6}$ ۲) $\frac{25}{8}$
۳) ۲ ۴) ۳

۵۶) مرکز دایره‌ی محیطی مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، درون مثلث بوده و به فاصله‌ی ۳ از قاعده‌ی $BC = 8$ قرار دارد. فاصله‌ی این مرکز از هر یک از ساق‌ها چقدر است؟

- ۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2/5$ ۳) $\sqrt{6}$ ۴) ۲

۵۷) در مثلثی به اضلاع $2\sqrt{3}$ و $\sqrt{3}$ و ۳ شعاع دایره محیطی آن کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $1 + \sqrt{3}$

۵۸) در مثلث ABC اگر $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ و $a^2 + b^2 + c^2 = 40$ باشد، شعاع دایره‌ی محیطی مثلث کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۴ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $\sqrt{3}$



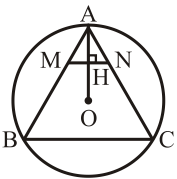
۵۹) در مثلث ABC اندازه زاویه A برابر 45° درجه است اگر $BC=6$ آنگاه شعاع دایره محیطی مثلث ABC کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۶۰) در مثلثی اندازه‌ی یک ضلع $4\sqrt{3}$ و اندازه‌ی زاویه‌ی مقابل آن 60° درجه است. مساحت دایره محیطی آن چند برابر π است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

۶۱) در شکل مقابل، دایره‌ی محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و $AH = \frac{R}{p}$ است. نسبت $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}$ کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{16}$

۶۲) در مثلث ABC به اضلاع $a=2\sqrt{3}$ و $b=3$ ، فاصله‌ی مرکز دایره‌ی محیطی مثلث تا ضلع a برابر با یک واحد است. مجموع فاصله‌های این نقطه تا سه رأس مثلث کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{13}$ (۲) ۶ (۳) $6\sqrt{2}$ (۴) $5+2\sqrt{3}$

۶۳) در مثلثی با اضلاع ۶ و ۸ و ۱۰ فاصله‌ی نقطه‌ی هم‌مرسی ارتفاع‌ها تا مرکز دایره‌ی محیطی چقدر است؟

- (۱) ۵ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{10}{3}$

۶۴) از هر رأس مثلث ABC خطی موازی ضلع مقابلش رسم می‌کنیم تا مثلث $A'B'C'$ به دست آید. مرکز دایره‌ی محیطی $A'B'C'$ برای مثلث ABC چه نقطه‌ای است؟

- (۱) مرکز دایره‌ی محیطی
(۲) مرکز دایره‌ی محاطی
(۳) محل هم‌مرسی ارتفاع‌ها
(۴) مرکز ثقل



۶۵) در مثلث متساوی الساقین ABC طول ارتفاع وارد بر قاعده BC نصف فاصله BC تا محل تقاطع نیمسازهای خارجی دوراس دیگر است. نسبت شعاع دایره محاطی داخلی به شعاع دایره محیطی در این مثلث کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

۶۶) مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) در دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر محاط شده است. اگر شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث برابر ۲ سانتی‌متر باشد، مجموع دو ضلع AC و AB از مثلث کدام است؟

(۱) ۷ (۲) ۲۵ (۳) ۸ (۴) ۱۴

۶۷) اندازه‌ی شعاع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین دایره‌ی محاطی یک مثلث قائم‌الزاویه به ترتیب برابر با ۱ و ۶ است. اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محیطی این مثلث کدام است؟

(۱) ۲ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{3}{5}$

۶۸) اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه، فاصله‌ی مرکز کوچک‌ترین دایره‌ی محاطی تا مرکز بزرگ‌ترین دایره‌ی محاطی برابر ۴ واحد باشد، شعاع دایره‌ی محیطی این مثلث کدام است؟

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۴

۶۹) در مثلثی با اضلاع ۵ و ۵ و ۸ فاصله مرکز دایره‌ی محیطی تا مرکز ثقل چقدر است؟

(۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{7}{3}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{13}{6}$

۷۰) در مثلثی با اضلاع ۳ و ۴ و ۵ فاصله‌ی نقطه‌ی تقاطع عمود منصف‌ها از ضلع کوچکتر چقدر است؟

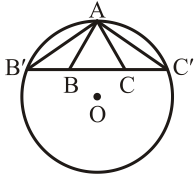
(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) $\frac{3}{2}$



(۷۱) در مثلث ABC ضلع BC را از هر دو طرف، به اندازه‌های $BD = BA$ و $CE = CA$ امتداد می‌دهیم. مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ADE ، بر روی کدام جزء مثلث ABC واقع است؟

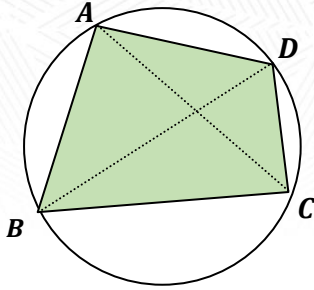
- (۱) عمود منصف BC
 (۲) میانه‌ی BC
 (۳) ارتفاع وارد بر ضلع BC
 (۴) نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی A

(۷۲) در مثلث ABC ضلع BC را از طرف B به اندازه‌ی AB تا نقطه‌ی B' و از طرف C به اندازه‌ی AC تا نقطه‌ی C' امتداد می‌دهیم. اگر O مرکز دایره‌ی محیطی مثلث $AB'C'$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه لزوماً صحیح نیست؟



- (۱) AO نیم‌ساز زاویه‌ی BAC است.
 (۲) $\angle OAB = \angle OB'B$
 (۳) $\angle OAC = \angle OC'C$
 (۴) AO عمود منصف $B'C'$ است.

چهارضلعی محاطی: چهار رأس آن روی یک دایره است به عبارت دیگر دایره بر چهار ضلعی محیط است.



(۱) عمود منصفهای اضلاع آن در مرکز دایره هم‌رسند.

(۲) زاویه‌های روبرو مکمل هستند.

$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

(۳) زاویه‌هایی که دو قطر با اضلاع روبرو می‌سازند، برابرند یعنی

$$\hat{D}AC = \hat{D}BC, \hat{B}AC = \hat{B}DC$$

$$\hat{A}DB = \hat{A}CB, \hat{A}BD = \hat{A}CD$$

(۴) از بین چهارضلعی‌ها: مستطیل و مربع و ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین محاطی هستند ولی لوزی و متوازی‌الاضلاع محاطی نیستند.

(۶۵) چهارضلعی حاصل از رسم نیمسازهای داخلی ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین کدام است؟

(۱) لوزی (۲) چهارضلعی محاطی

(۳) چهارضلعی محاطی و محیطی (۴) مربع

(۶۶) ارتفاعهای AA' و BB' و CC' از مثلث ABC (با زاویه‌های حاده) در H متقاطع شده‌اند کدام چهارضلعی محاطی نیست؟

(۱) $ABA'B'$ (۲) $A'HB'C$

(۳) $BC'B'C$ (۴) $AB'A'C'$

(۶۷) در چهارضلعی محاطی $ABCD$ اگر $A+B=150^\circ$ و $A+D=250^\circ$ آنگاه زاویه‌ی C چقدر است؟

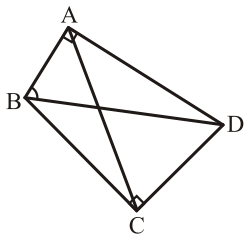
(۱) 110° (۲) 90° (۳) 70° (۴) 140°

۶۸) چهار ضلعی ABCD محاط در یک دایره است. اگر AB دورترین وتر و BC نزدیکترین وتر نسبت به مرکز این دایره باشند، کدام رابطه بین زاویه‌ها ممکن است برقرار نیاشد؟

- (۱) $D > C$ (۲) $B > C$ (۳) $\hat{A} > \hat{B}$ (۴) $B > D$

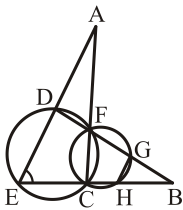
۶۹) در چهار ضلعی محدب ABCD، $\hat{ADC} = 60^\circ$ ، $\hat{ABD} = 55^\circ$ و $\hat{DBC} = 65^\circ$ اندازه‌ی \hat{CAD} کدام است؟

- (۱) 50° (۲) 55° (۳) 60° (۴) 65°



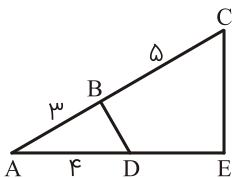
۷۰) در شکل مقابل، $\hat{ABD} = 66^\circ$ و $\hat{BAD} = \hat{BCD} = 90^\circ$ است. زاویه‌ی \hat{ACB} چند درجه است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۳۳ (۳) ۴۵ (۴) ۶۶



۷۱) اگر در شکل مقابل $\hat{B} = 40^\circ$ و $\hat{A} = 50^\circ$ باشد، \hat{FGH} چند درجه است؟ (نقاط A، F و C در یک امتداد، نقاط D، F، G و B در امتداد هم و نقاط C، E، H و B در امتداد یکدیگر هستند.)

- (۱) ۸۵ (۲) ۹۰ (۳) ۹۵ (۴) ۱۰۰



۷۲) در شکل مقابل، عمود منصف‌های اضلاع چهار ضلعی BCED در نقطه هم‌مرس‌اند. اندازه‌ی پاره خط DE کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۷۳) دوزنقه‌ای متساوی الساقین محاط در دایره مفروض است. اگر کمان‌های نظیر قاعده‌ی کوچک و ساق آن به ترتیب ۶۰ و ۷۰ درجه باشد. زاویه‌ی بین اقطار و زاویه‌ی بین امتداد ساق‌های دوزنقه به ترتیب کدام است؟

- (۱) ۷۰ و ۵۰ (۲) ۶۰ و ۵۰ (۳) ۶۰ و ۴۰ (۴) ۷۰ و ۴۰

۷۴) در یک چهار ضلعی محاطی دو زاویه داخلی آن 102° و 75° می‌باشند، بزرگترین زاویه این چند ضلعی چند درجه است؟

- (۱) ۱۰۲ (۲) ۱۰۵ (۳) ۱۰۸ (۴) ۱۱۰



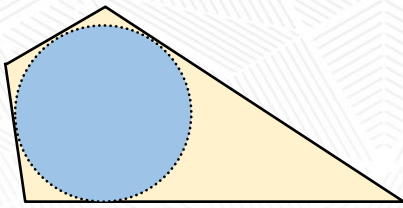
۷۵) چهارضلعی $ABCD$ محاطی و $AB = AD$ و $\hat{C} = 80^\circ$ و O محل برخورد قطرهای و زاویه‌ی COD ، 130° است. اگر شعاع دایره‌ی محیطی آن ۸ باشد، فاصله‌ی رأس A تا وسط ضلع CD کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)



چهارضلعی محیطی:

(۱) اضلاع آن بر یک دایره مماس هستند.

(۲) نیمسازهای زاویه‌های آن هم‌رسند و نقطه‌ی هم‌رسی مرکز دایره است.

(۳) مجموع طول اضلاع روبرو برابر است یعنی

$$AB + CD = AD + BC$$

(۴) مساحت چهارضلعی محیطی:

$$S_{ABCD} = r \cdot (AD + BC) = r \cdot (AB + CD)$$

(۵) از بین چهارضلعی‌ها لوزی و مربع محیطی هستند، دوزنقه می‌تواند محیطی باشد ولی مستطیل و متوازی‌الاضلاع محیطی نیستند.

(۷۶) طول اضلاع متوالی چهارضلعی محیطی به کدام صورت صحیح است؟

- (۱) ۵ و ۱۱ و ۹ و ۷ (۲) ۷ و ۱۱ و ۹ و ۵ (۳) ۱۱ و ۷ و ۹ و ۵ (۴) ۱۱ و ۹ و ۷ و ۵

(۷۷) سه نیم‌ساز داخلی یک چهارضلعی هم‌رس‌اند. اگر اندازه‌های اضلاع آن $AB = 3a - 4$ ، $BC = 5a - 6$ ، $CD = 6a$ و $AD = a^2 + 2$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

(۷۸) لوزی به ضلع ۲ که زاویه‌ی ۶۰ درجه نیز دارد بر یک دایره محیط است شعاع دایره چقدر است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) ۱

(۷۹) دایره‌ای را در یک لوزی محاط می‌کنیم. نقاط تماس، اضلاع لوزی را به نسبت ۳ به ۴ تقسیم می‌کنند. اگر مساحت لوزی $28\sqrt{3}$ باشد، شعاع دایره کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) ۳ (۴) $3\sqrt{2}$



۸۰) در مورد ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین کدام گزینه درست است؟

- (۱) نه محاطی و نه محیطی است
(۲) محیطی است و ممکن است محاطی باشد
(۳) هم محاطی و هم محیطی است
(۴) محاطی است و ممکن است محیطی باشد

۸۱) ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقینی به طول قاعده‌های ۸ و ۱۸ بر یک دایره محیط است شعاع دایره کدام است؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۱۰
(۳) ۶
(۴) ۵

۸۲) در یک مثلث اوساط اضلاع و پای یک ارتفاع رئوس یک چهارضلعی هستند که این چهار ضلعی همواره است.

- (۱) محاطی
(۲) محیطی
(۳) هم محاطی و هم محیطی
(۴) نه محاطی و نه محیطی

۸۳) طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاعی ۶ است. دایره‌ای را در این مثلث و مربعی را در آن دایره محاط می‌کنیم. مساحت مربع کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{3}$
(۲) ۴
(۳) ۶
(۴) ۱۰

۸۴) در یک ذوزنقه‌ی محیط بر دایره، طول خط واصل بین وسط‌های دو ساق آن ۱۲ واحد است. محیط ذوزنقه، کدام است؟

- (۱) ۳۶
(۲) ۴۴
(۳) ۴۶
(۴) ۴۸

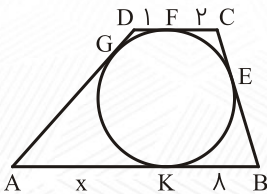
۸۵) یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، با کدام شرط قابل محیط بر دایره است؟

- (۱) دو قطر عمود بر هم
(۲) یکی از قاعده‌های ذوزنقه، برابر یکی از ساق‌ها
(۳) خط واصل وسط دو ساق، گذرا از محل تلاقی قطرها
(۴) طول پاره خط واصل وسط دو ساق، برابر اندازه‌ی یکی از ساق‌ها

۸۶) ذوزنقه‌ی ABCD محیطی است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، طول AK

کدام است؟

- (۱) ۱۰
(۲) ۱۲
(۳) ۱۴
(۴) ۱۶

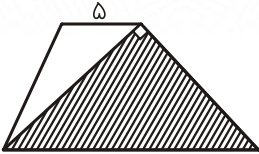




۸۷) دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین به مساحت $6\sqrt{2}$ بر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{2}$ محیط است. محیط دوزنقه کدام است؟

- ۱۲ (۱) ۱۶ (۲) ۲۰ (۳) ۲۴ (۴)

۸۸) دوزنقه‌ی زیر محیطی است. اگر مساحت قسمت هاشورخورده $\frac{2}{3}$ مساحت کل دوزنقه باشد، محیط دوزنقه کدام است؟



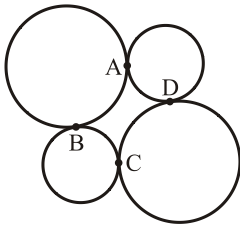
- ۴۵ (۱) ۱۵ (۲)
۳۰ (۳) ۲۰ (۴)

۸۹) اگر قاعده‌های یک دوزنقه‌ی محاطی و محیطی برابر با ۲ و ۸ واحد باشند، مساحت آن کدام است؟

- ۱۶ (۱) ۲۰ (۲) ۳۲ (۳) ۴۰ (۴)

۹۰) کدام یک از چهار ضلعی‌های زیر، محاطی است ولی لزوماً محیطی نیست؟

- ۱) لوزی ۲) دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه
۳) مربع ۴) مستطیل



۹۱) مطابق شکل، چهار دایره در چهار نقطه بر هم مماس‌اند. چهار ضلعی‌ای که رؤس آن نقاط تماس دایره‌ها هستند، الزاماً چگونه است؟

- ۱) محیطی ۲) محاطی
۳) دوزنقه ۴) متوازی‌الاضلاع

۹۲) یک دوزنقه متساوی‌الساقین بر دایره‌ای به شعاع $R = 3$ محیط است، اگر مساحت دوزنقه ۴۵ واحد مربع باشد طول بزرگترین قاعده‌ی آن کدام است؟

- ۱۰ (۱) $\frac{15}{2}$ (۲) ۱۲ (۳) $\frac{25}{2}$ (۴)

۹۳) چهار ضلعی ABCD محیط بر یک دایره است. اگر AB کوچک‌ترین ضلع آن باشد، کدام نابرابری همواره درست است؟

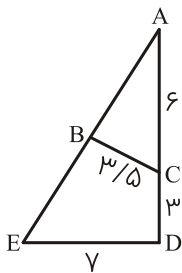
- ۱) $C > A$ ۲) $B < A$ ۳) $D < C$ ۴) $D < B$

۹۴) یک ذوزنقهی متساوی الساقین بر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{3}$ محیط است. اگر نسبت قاعده‌های این ذوزنقه $\frac{1}{3}$ باشد، مساحت آن کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{3}$ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) $8\sqrt{3}$

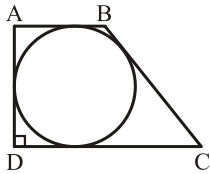
۹۵) اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محاطی یک ذوزنقهی قائم‌الزاویه‌ی محیطی به طول قاعده‌های ۳ و ۶ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵



۹۶) در شکل مقابل، چهار ضلعی BCDE هم محاطی و هم محیطی است. اندازه‌ی AB کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) ۵

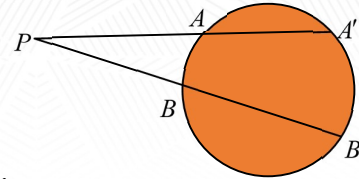
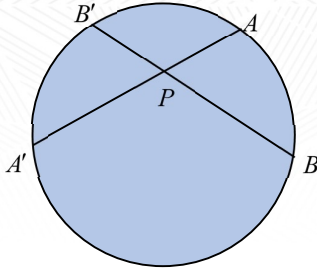


۹۷) مطابق شکل، ذوزنقهی قائم‌الزاویه‌ی ABCD بر دایره‌ای محیط شده است. اگر دایره، ساق بزرگ‌تر را به دو پاره خط به اندازه‌های ۲ و ۸ تقسیم کند، طول بزرگ‌ترین قاعده‌ی ذوزنقه کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

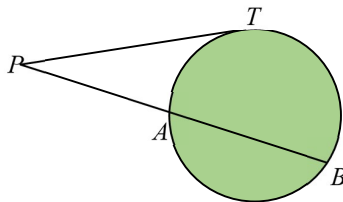
روابط طولی در دایره:

۱) اگر دو وتر AA' و BB' یا امتداد آنها در P متقاطع باشند داریم:



$$PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$$

۲) از نقطه P یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کرده‌ایم در این صورت:



$$PT^2 = PA \cdot PB$$

تست ۱: در دایره‌ای به قطر ۱۲ واحد، فاصله‌ی مرکز دایره از وتر AB برابر ۲ واحد است. نقطه‌ی C در امتداد AB به فاصله‌ی $CB = 2\sqrt{2}$ انتخاب شده است. طول قطعه مماسی که از C بر دایره رسم می‌شود، کدام است؟

- ۱) $2\sqrt{10}$ ۲) $3\sqrt{5}$ ۳) ۷ ۴) $5\sqrt{2}$

تست ۲: نقطه‌ی P داخل دایره‌ای به شعاع ۸ واحد قرار دارد اگر فاصله‌ی P تا نزدیکترین نقاط دایره ۲ واحد باشد، اندازه‌ی کوچکترین وتر از دایره‌ی گذرا بر P چقدر است؟

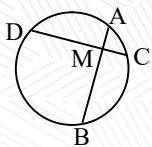
- ۱) $2\sqrt{7}$ ۲) $4\sqrt{6}$ ۳) $4\sqrt{7}$ ۴) $6\sqrt{2}$

تست ۳: دایره‌ی $C(O, 4)$ مفروض است. نقطه‌ی M داخل دایره و به فاصله‌ی ۲ از مرکز دایره قرار دارد. اگر طول قطعه‌ی کوچک از وتر گذرنده از نقطه‌ی M در دایره، ۳ باشد، طول قطعه‌ی بزرگ آن چقدر است؟

- ۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴



تست ۴: در شکل زیر، $AB = m$ ، $DC = 2m - 4$ و $\frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MD}$ است. مقدار m چقدر است؟



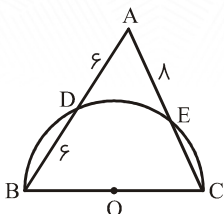
۲ (۱)

۴ (۲)

۶ (۳)

۸ (۴)

تست ۵: با توجه به اندازه‌های روی شکل، قطر نیم‌دایره به مرکز O کدام است؟



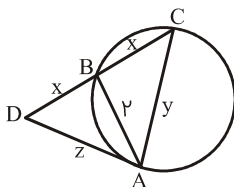
۹ (۲)

۸ (۱)

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

تست ۶: در شکل مقابل، DA مماس بر دایره و B وسط DC است. اگر $AB = 2$ باشد، طول AC چقدر است؟



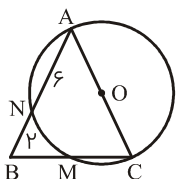
۳ (۴)

$2\sqrt{2}$ (۳)

۴ (۲)

$3\sqrt{2}$ (۱)

تست ۷: در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی‌الساقین است ($AB = AC$)،



مركز دایره است. اندازه‌ی قاعده BC کدام است؟

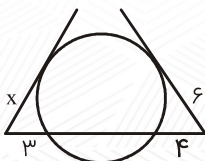
$4/8$ (۲)

۴ (۱)

$7/2$ (۴)

۶ (۳)

تست ۸: در شکل مقابل، اندازه x چند واحد است؟

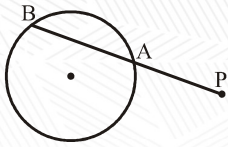


$2\sqrt{5}$ (۲)

$3\sqrt{2}$ (۱)

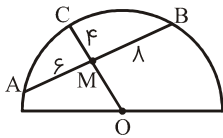
۵ (۴)

$2\sqrt{6}$ (۳)



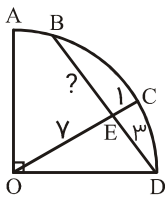
تست ۹: نزدیکترین نقطه از دایره‌ای به شعاع ۵ واحد تا نقطه‌ی مفروض P ، برابر ۸ واحد است. قاطع PAB نسبت به دایره طوری رسم شده است که $PA - AB = ۲$ ، اندازه‌ی AB کدام است؟

- (۱) ۵
(۲) ۶
(۳) ۷
(۴) ۸



تست ۱۰: مساحت نیم‌دایره‌ی شکل مقابل، کدام است؟ (O مرکز نیم‌دایره است.)

- (۱) ۳۲π
(۲) ۱۸π
(۳) ۶۴π
(۴) ۳۶π



تست ۱۱: در شکل مقابل، ربع دایره‌ای به مرکز O مفروض است. با توجه به اندازه‌های روی شکل طول BE چند واحد است؟

- (۱) $\frac{۷}{۳}$
(۲) ۴
(۳) $\frac{۱۴}{۳}$
(۴) ۵



دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را با فرض $R > R'$ و $OO' = d$ در نظر می‌گیریم. حالت‌های مختلفی که این دو دایره می‌توانند نسبت به هم داشته باشند به صورت زیر است:

| | | |
|--|-----------------------|-----------------------------|
| | $d > R + R'$ | دو دایرهٔ بیرون هم (متخارج) |
| | $d = R + R'$ | دو دایره مماس بیرون |
| | $R - R' < d < R + R'$ | دو دایره متقاطع |
| | $d = R - R'$ | دو دایره مماس درون |
| | $d < R - R'$ | دو دایره متداخل |
| | $d = 0$ | دایره‌های هم مرکز |



تست ۱۲: دو دایره به شعاع‌های ۴ و $\frac{10}{5}$ واحد مماس برون‌اند. از مرکز دایره کوچک‌تر، مماس بر دایره بزرگ‌تر رسم می‌کنیم. طول این قطعه مماس چقدر است؟

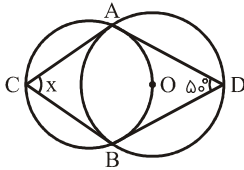
- (۱) $4\sqrt{5}$ (۲) ۸ (۳) $4\sqrt{6}$ (۴) ۱۰

تست ۱۳: دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۵ واحد مماس داخلی هستند. چند وتر به طول $4\sqrt{6}$ در دایره بزرگ‌تر می‌توان رسم کرد که بر دایره کوچک‌تر مماس باشند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

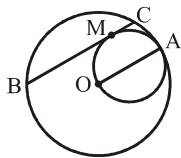
تست ۱۴: دایره $C(O, R)$ محیط دایره $C'(O', 5)$ را نصف کرده است. اگر $OO' = 12$ باشد، مساحت دایره C کدام است؟

- (۱) 119π (۲) 169π (۳) 25π (۴) 144π



تست ۱۵: در شکل مقابل، دایره‌ای به مرکز O ، دایره دیگری را در نقاط A و B قطع کرده است. زاویه x چند درجه است؟

- (۱) 50° (۲) 60° (۳) 70° (۴) 80°

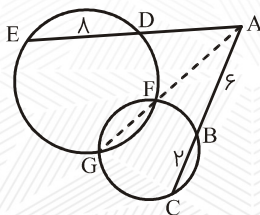


تست ۱۶: در دایره‌ای به شعاع OA وتر BC مماس بر دایره‌ای به قطر OA رسم شده است. مقدار $MB \times MC$ برابر کدام است؟

- (۱) MO^2 (۲) MA^2 (۳) OA^2 (۴) $MA \cdot MO$

تست ۱۷: دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۸ واحد، در نقطه A مماس درونی هستند. وتر BC از دایره بزرگ، موازی خط‌المركزین و بر دایره کوچک در نقطه P مماس است. اندازه $PB \times PC$ کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۳۲ (۳) ۳۶ (۴) ۴۸

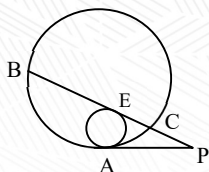


تست ۱۸: در شکل زیر، اندازه AE کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶



تست ۱۹: در شکل مقابل $PC = ۳$ و $BC = ۹$ و PA در نقطه‌ی A بر هر دو دایره مماس و PE بر دایره‌ی کوچک مماس است. BE کدام است؟



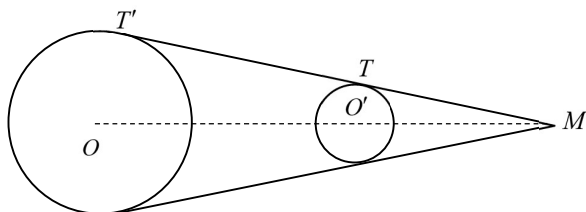
- (۱) ۵
(۲) ۴
(۳) ۱۲
(۴) ۶

تست ۲۰: دو دایره‌ی $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ در نقاط Q, P متقاطع‌اند. از نقطه‌ی دل خواه M واقع بر امتداد PQ مماس‌های MT و MT' را به ترتیب بر دایره‌های C و C' رسم می‌کنیم. اگر $R' = ۲R$ باشد، حاصل $\frac{MT'}{MT}$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) $\frac{1}{۲}$
(۴) به محل بستگی دارد

مماس مشترک دو دایره: خطی است که بر دو دایره مماس شود.

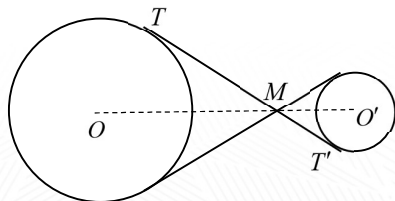
(۱) مماس مشترک خارجی: دو دایره در یک طرف آن هستند



$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2}$$

$$\sin \frac{\theta}{۲} = \frac{R - R'}{OO'}$$

(۲) مماس مشترک داخلی: دو دایره در دو طرف آن هستند



$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2}$$

$$\sin \frac{\theta}{۲} = \frac{R + R'}{OO'}$$



تست ۲۱: به ازای چه مقادیری از m دو دایره به شعاع‌های $m+2$ و $m-2$ و با خط‌المركزین $3m-12$ دارای دقیقاً سه مماس مشترک هستند؟

۱۲ (۴)

$\frac{8}{3}, 4$ (۳)

۴ (۲)

$\frac{8}{3}$ (۱)

تست ۲۲: اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۴ و ۶ واحد برابر ۱۵ واحد است. خط‌المركزین این دو دایره چند واحد است؟

۱۸ (۴)

۱۷ (۳)

$7\sqrt{6}$ (۲)

$12\sqrt{2}$ (۱)

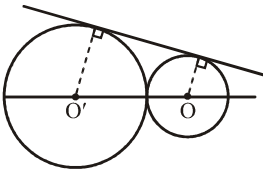
تست ۲۳: دو دایره نامساوی به مرکزهای O و O' مماس خارج‌اند. دایره‌ای به قطر OO' با مماس مشترک خارجی این دو دایره، کدام وضعیت را دارد؟

نامشخص (۴)

متخارج (۳)

مماس (۲)

مقاطع (۱)



تست ۲۴: دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۴ واحد مماس بر هم‌اند. دایره به قطر OO' با مماس مشترک خارجی در نقطه‌ی M مشترک‌اند. فاصله‌ی M از نقطه‌ی تماس دو دایره، کدام است؟

$7/5$ (۴)

۷ (۳)

$6/5$ (۲)

۶ (۱)

تست ۲۵: دو دایره به شعاع‌های $r_1=4$, $r_2=6$ و طول خط‌المركزین ۱۲ مفروض‌اند. طول مماس مشترک داخل آنها چقدر است؟

$2\sqrt{11}$ (۴)

$\sqrt{61}$ (۳)

$\sqrt{11}$ (۲)

$2\sqrt{31}$ (۱)

تست ۲۶: زاویه‌ی بین مماس مشترک‌های خارجی دو دایره‌ی مماس خارج برابر 60° است نسبت شعاع دو دایره چقدر است؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{3}{5}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۱)



تست ۲۷: زاویه بین خط مرکزین و مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های $7/5$ و 30 سانتی‌متر، 30 درجه است. طول خط مرکزین دو دایره چند سانتی‌متر است؟

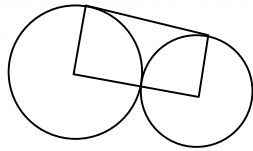
۵۰ (۴)

$47/5$ (۳)

۴۵ (۲)

$42/5$ (۱)

تست ۲۸: در شکل روبرو دو دایره به شعاع‌های ۶ و ۸ مماس خارج و TT' مماس مشترک خارجی آنها است. محیط ذوزنقه $OTT'O'$ کدام می‌شود؟



$28 + 60\sqrt{3}$ (۴)

$28 + 8\sqrt{3}$ (۳)

$28 + 54\sqrt{3}$ (۲)

$28 + 52\sqrt{3}$ (۱)

تست ۲۹: اگر تنها ۲ مماس مشترک بین دایره‌های $C_1(O_1, 6)$ و $C_2(O_2, 4)$ بتوان رسم کرد، طول مماس مشترک خارجی آن‌ها کدام گزینه می‌تواند باشد؟

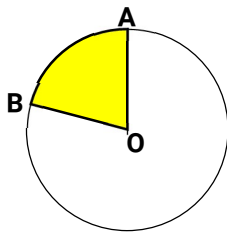
$3\sqrt{11}$ (۴)

$7\sqrt{2}$ (۳)

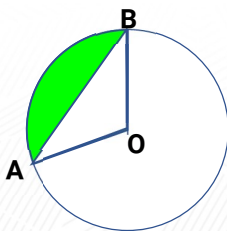
$4\sqrt{6}$ (۲)

$2\sqrt{23}$ (۱)

قطاع و قطعه: قسمتی از دایره که به دو شعاع محدود شده قطاع نام دارد



همچنین اگر مثلثی که سه راس آن مرکز و دو انتهای شعاع‌ها باشد را حذف کنیم، قطعه بدست می‌آید

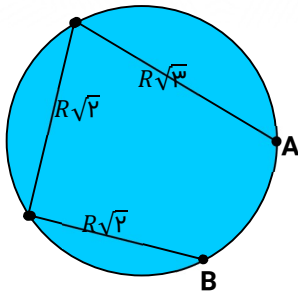


برای محاسبه مساحت قطاع، نسبت زاویه قطاع به زاویه کل دایره را در مساحت دایره ضرب می‌کنیم و برای مساحت قطعه، باید مساحت مثلث OAB را از مساحت قطاع کم کنیم.



مثال ۳۰: در دایره $C(O, ۳)$ وتر $AB = ۳\sqrt{۳}$ رسم شده است. مساحت قطاع بین شعاع های OA و OB را بدست آورید.

مثال ۳۱: در دایره $C(O, R)$ مطابق شکل، مساحت قطاع بین شعاع های OA و OB را بر حسب R بدست آورید.

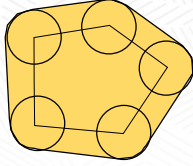


مثال ۳۲: در شکل زیر اگر ضلع مربع برابر ۴ باشد، مساحت ناحیه رنگی چقدر است؟



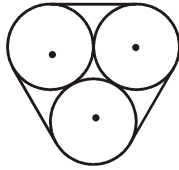


نکته: اگر مرکزهای چند دایره با شعاع های برابر منطبق بر راس های یک n ضلعی باشند و به وسیله ی نخ بسته شوند، داریم:



$$\text{طول نخ} = (\text{محیط } n \text{ ضلعی}) + (\text{محیط یک دایره})$$

$$\text{مساحت ناحیه درون نخ} = (\text{مساحت } n \text{ ضلعی}) + (\text{مساحت } n \times \text{شعاع دایره}) + (\text{مساحت یک دایره})$$



تست ۳۳: سه دایره به شعاع های برابر r دوبه دو بر هم مماس اند. مطابق شکل، این سه دایره به وسیله ی نخ بسته شده اند. طول این نخ کدام است؟

$$2\pi r + 3r \quad (2)$$

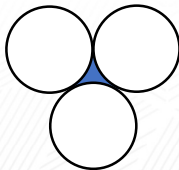
$$\pi r + 3r \quad (1)$$

$$2\pi r + 6r \quad (4)$$

$$\pi r + 6r \quad (3)$$

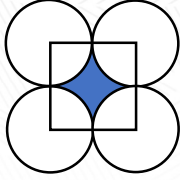
مثال ۳۴: مرکزهای ۴ دایره با شعاع ۲ منطبق بر راس های یک مربع به مساحت ۶۴ هستند و به وسیله ی نخ بسته شده اند، مساحت ناحیه درون این نخ را بدست آورید.

مثال ۳۵: سه دایره به شعاع ۳ دوبه دو بر هم مماس اند. مساحت ناحیه رنگ شده چقدر است؟

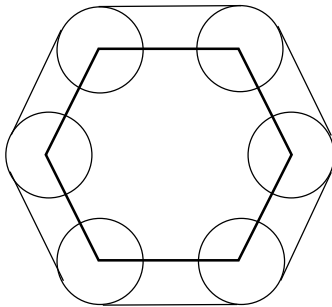




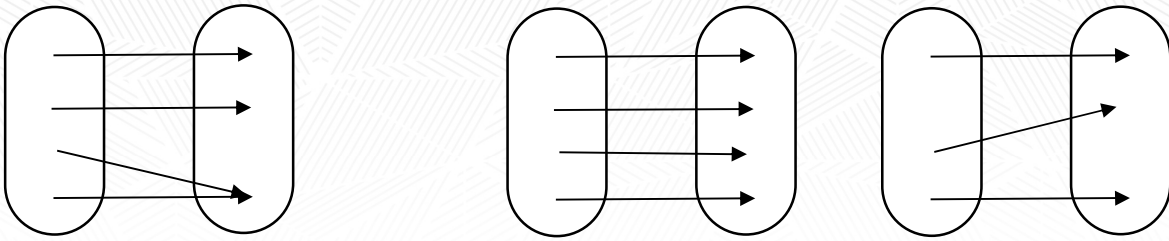
مثال ۳۶: مطابق شکل مرکزهای ۴ دایره با شعاع ۲ منطبق بر راس های یک مربع هستند، مساحت ناحیه رنگی را بدست آورید.



مثال ۳۷: مطابق شکل مرکزهای ۶ دایره با شعاع ۱ منطبق بر راس های یک شش ضلعی منتظم به ضلع ۳ هستند و به وسیله نخ بسته شده اند، طول نخ و مساحت ناحیه درون این نخ را بدست آورید.



تبدیل: تابعی یک به یک که دامنه و برد آن زوج مرتب (مختصات نقطه) باشد، تبدیل نام دارد.



اگر یک تبدیل را در نظر بگیریم، با توجه به تبدیل روی تمام نقاط صفحه، ویژگی‌های زیر قابل بررسی است:

الف. تبدیل شیب خط را ثابت نگه می‌دارد یانه.

ب. **ایزومتری:** تبدیلی است که طول پاره خط را حفظ می‌کند.

ج. جهت شکل حفظ می‌شود یا خیر

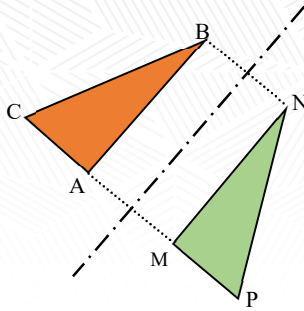
۱) کدام گزینه، نمودار یک تبدیل را به درستی نشان می‌دهد؟



۲) کدام یک از توابع زیر، تبدیل است؟

- ۱) تابعی که هر نقطه از صفحه را با رسم خط عمود بر d ، روی خط d تصویر می‌کند.
- ۲) تابعی که هر نقطه از صفحه را روی یک نقطه درون دایره‌ی $C(O, R)$ تصویر می‌کند.
- ۳) تابعی که هر نقطه از خط d را به کمک یک بردار روی نقطه‌ای از خط d' تصویر می‌کند.
- ۴) تابعی که فاصله‌ی هر نقطه از صفحه را تا مبدأ مختصات به خودش تصویر می‌کند.

بازتاب محوری (قرینه نسبت به خط): تبدیلی است که هر نقطه از صفحه را نسبت به یک خط مفروض قرینه می‌کند.



بنابراین خط مورد نظر (محور بازتاب) عمود منصف پاره خطی است که نقطه و قرینه‌اش را بهم وصل می‌کند. در شکل مقابل محور بازتاب عمود منصف AM و BN و CP است.

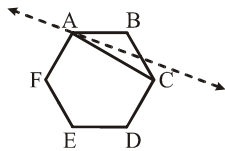
نکته ۱: بازتاب محوری ایزومتري است و شیب خط را حفظ نمی‌کند، بجز حالتی که خط موازی با محور بازتاب یا عمود بر آن باشد.

نکته ۲: بازتاب محوری جهت شکل را عوض می‌کند.

(۱) رأس A از شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ را، نسبت به قطر CE بازتاب می‌دهیم تا به نقطه‌ی A' برسیم. مساحت چهار ضلعی $ACA'E$ ، چند درصد از مساحت شش ضلعی منتظم است؟

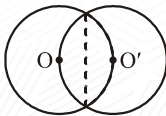
- (۱) ۵۰
(۲) ۱۰۰
(۳) ۶۰
(۴) ۷۵

(۲) شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ را نسبت به کدامیک از خط‌های زیر بازتاب دهیم تا شیب تمام اضلاع، تحت بازتاب تغییر کند؟



- (۱) امتداد قطر AC (۲) امتداد قطر AD
(۳) نیم‌ساز زاویه‌ی $\hat{D}A\hat{F}$ (۴) نیم‌ساز زاویه‌ی $\hat{B}A\hat{C}$

(۳) دایره‌ی $C(O, R)$ را نسبت به عمود منصف یکی از شعاع‌هایش بازتاب دهیم، تا دایره‌ی $C'(O', R)$ به دست آید. اندازه‌ی کمان نظیر وتر مشترک دو دایره چند درجه است؟

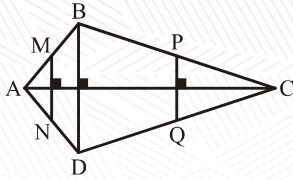


- (۱) 90°
(۲) 60°
(۳) 120°
(۴) 180°

(۴) دایره‌ی $C(O, R)$ را نسبت به خط d که بر این دایره مماس است بازتاب می‌دهیم. بیش‌ترین فاصله‌ی بین نقاط دو دایره چقدر است؟

- (۱) $2R$
(۲) $4R$
(۳) $6R$
(۴) $8R$

۵) در چهار ضلعی محدب ABCD، بازتاب یافته‌ی وسط‌های اضلاع AB و BC نسبت به قطر AC به ترتیب بر وسط‌های اضلاع AD و CD منطبق است. کدام گزینه الزاماً درست است؟



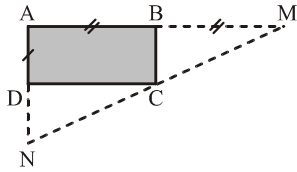
(۱) قطرهای چهار ضلعی ABCD عمود منصف یکدیگرند.

(۲) قطرهای چهار ضلعی ABCD با هم برابرند.

(۳) قطر AC از چهار ضلعی ABCD، عمود منصف قطر BD است.

(۴) قطر BD از چهار ضلعی ABCD، عمود منصف قطر AC است.

۶) در مستطیل ABCD، رأس A را نسبت به اضلاع BC و CD بازتاب می‌دهیم تا نقاط M و N به دست آید.



نسبت مساحت مثلث AMN به مساحت مستطیل ABCD چقدر است؟

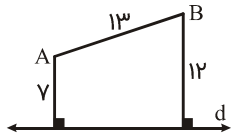
$\frac{5}{2}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۷) مطابق شکل، دو نقطه‌ی A و B را نسبت به خط d بازتاب می‌دهیم تا نقاط A' و B' به دست آید. مساحت



چهار ضلعی ABB'A' چقدر است؟

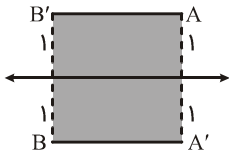
۲۹۵ (۲)

۱۱۴ (۱)

۱۹۰ (۴)

۲۲۸ (۳)

۸) نقاط A و B که به فاصله‌ی ۱ از خط d قرار دارند را نسبت به این خط بازتاب می‌دهیم تا نقاط A' و B' به دست آید. اگر چهار ضلعی ABB'A' مربع باشد، محیط این مربع چقدر است؟



۱۶ (۲)

۸ (۱)

۳۲ (۴)

۴ (۳)

۹) در شکل زیر، نقطه‌ی A را نسبت به خط d بازتاب می‌دهیم تا نقطه‌ی A' به دست آید. محیط مثلث ABA' چقدر است؟



۵ (۲)

۴ (۱)

۸ (۴)

۶ (۳)

۱۰) در مثلث ABC با $\hat{A} = 45^\circ$ و $\hat{B} = 65^\circ$ ، تحت یک بازتاب، ضلع AC روی BC تصویر شده است. زاویه‌ی ضلع AC، با خط بازتاب چقدر است؟

35° (۲)

30° (۱)

45° (۴)

65° (۳)

۱۱) دو پاره خط هم‌اندازه‌ی AB و CD مفروض‌اند. در کدام حالت، حتماً خط بازتابی برای تبدیل این دو پاره خط به یکدیگر وجود دارد؟

(۲) دو پاره خط با هم موازی باشند.

(۱) نقطه‌ی C وسط پاره خط AB باشد.

(۴) امتداد دو پاره خط هم‌دیگر را قطع کنند.

(۳) دو پاره خط در یک امتداد باشند.



۱۲) در کدام گزینه، فقط یک خط بازتاب، برای تبدیل مورد نظر وجود دارد؟

(۱) دایره‌ی $C(O, R)$ روی خودش تصویر شده است.

(۲) دو خط متقاطع به یکدیگر تبدیل شده باشند.

(۳) ضلع AB از مستطیل $ABCD$ ، روی ضلع CD تصویر شده باشد.

(۴) پاره خط MN ، روی خودش تصویر شده باشد.

۱۳) طول مماس مشترک خارجی دو دایره‌ی $C(O, ۳)$ و $C'(O', ۲)$ برابر ۱۲ است. دایره‌ی بزرگ‌تر را نسبت به مماس مشترک خارجی بازتاب می‌دهیم تا دایره‌ی C'' به دست آید. طول خط‌المرکزین دو دایره‌ی C' و C'' چقدر است؟

(۱) ۱۰

(۲) ۱۲

(۳) ۱۵

(۴) ۱۳

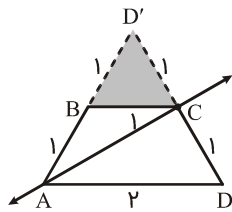
۱۴) در چهار ضلعی $ABCD$ با $AB = BC = ۵$ و $AD = ۲CD = ۴$. اگر قطر AC ، نیمساز زاویه‌ی C باشد. طول قطر AC چقدر است؟

(۱) ۸

(۲) $۳\sqrt{۶}$

(۳) ۱۰

(۴) $۲\sqrt{۵}$



۱۵) در چهار ضلعی $ABCD$ با $AB = BC = CD = \frac{AD}{۲} = ۱$. اگر قطر AC ، نیمساز زاویه‌ی

A باشد. طول قطر BD چقدر است؟

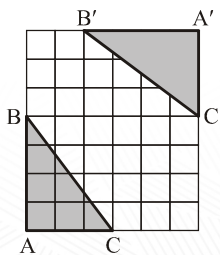
(۱) ۲

(۲) $\sqrt{۲}$

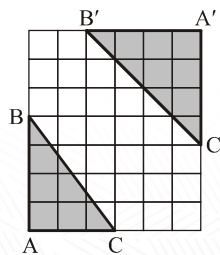
(۳) $\sqrt{۳}$

(۴) ۱

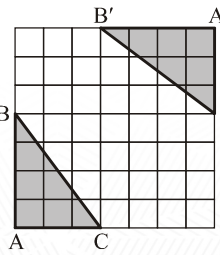
۱۶) در کدام گزینه مثلث ABC فقط با یک تبدیل بازتاب روی مثلث $A'B'C'$ تصویر می‌شود؟



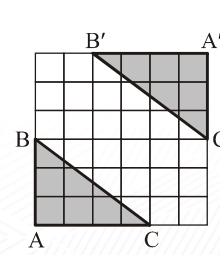
(۴)



(۳)

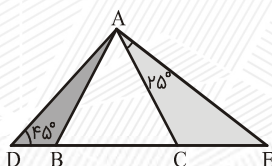


(۲)



(۱)

۱۷) اگر در شکل زیر دو مثلث رنگ‌شده با بازتاب نسبت به عمود منصف BC به یکدیگر قابل تبدیل باشند.



اندازه‌ی زاویه‌ی BAC چقدر است؟

(۱) ۶۰°

(۲) ۴۰°

(۳) ۵۰°

(۴) ۳۰°



۱۸) مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC با اضلاع قائم $AB = 3$ و $AC = 4$ را نسبت به خطی که وسط‌های این دو ضلع را به هم وصل می‌کند، بازتاب می‌دهیم. مساحت ناحیه‌ی مشترک بین مثلث و تصویرش چقدر است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۹) مستطیل ABCD با $AB = 2$ و $AD = 1$ را نسبت به قطر AC بازتاب می‌دهیم. مساحت ناحیه‌ی مشترک بین مستطیل و تصویرش چقدر است؟

- (۱) $\frac{5}{4}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۲۰) در مثلث ABC زوایای A، B و C، به ترتیب با ۲، ۳ و ۷ متناسب‌اند. رأس C را نسبت به ضلع AB بازتاب می‌دهیم تا به نقطه‌ی C' برسیم. اندازه‌ی زاویه‌ی ACC' چقدر است؟

- (۱) 40° (۲) 36° (۳) 60° (۴) 75°

۲۱) در مستطیل ABCD با $AB = 1$ و $AC = 2$ ، رأس A را نسبت به قطر BD بازتاب می‌دهیم تا به نقطه‌ی A' برسیم. اندازه‌ی زاویه‌ی ABA' چقدر است؟

- (۱) 180° (۲) 120° (۳) 150° (۴) 90°

۲۲) دو دایره مطابق شکل، در نقطه‌ی A بر هم مماس‌اند. خط بازتابی که هر کدام از این دو دایره را روی خودشان تصویر می‌کند



- (۱) مماس مشترک دو دایره است.
(۲) هر خطی است که از A می‌گذرد.
(۳) بلندترین وتر از دایره‌ی بزرگ‌تر است که بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس باشد.
(۴) امتداد خط‌المركزین دو دایره است.

۲۳) در مربع ABCD به مساحت ۴، رأس A را نسبت به ضلع BC بازتاب می‌دهیم تا به A' برسیم. اگر A'' بازتاب یافته‌ی رأس A' نسبت به ضلع AD باشد. طول پاره خط AA'' چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸



۲۴) دایره‌ی $C(O, R)$ را نسبت به خط d بازتاب می‌دهیم تا دایره‌ی $C'(O', R)$ به دست آید. اگر کم‌ترین فاصله‌ی بین نقاط دو دایره‌ی C و C' ، برابر $3R$ باشد. فاصله‌ی نقطه‌ی D از خط d چقدر است؟

- (۱) $2R$ (۲) $3R$ (۳) $\frac{5}{2}R$ (۴) $\frac{3}{2}R$

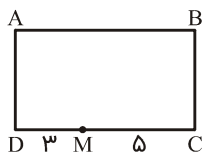
۲۵) در مثلث ABC که $AC=10$ و $AB=17$ ، رأس C را نسبت به امتداد ارتفاع AH بازتاب می‌دهیم تا نقطه‌ی D به دست آید. اگر $DC=12$ طول پاره خط BH کدام است؟

- (۱) 12 (۲) 16 (۳) 20 (۴) 15

۲۶) دو دایره به شعاع‌های 4 و 9 مماس داخل‌اند، دایره‌ی کوچک‌تر را نسبت به مماس مشترک دو دایره بازتاب می‌دهیم تا دایره‌ی جدید به دست آید. طول مماس مشترک خارجی دایره‌ی بزرگ‌تر و دایره‌ی جدید، چقدر است؟

- (۱) 12 (۲) 13 (۳) 10 (۴) 15

۲۷) در مستطیل شکل مقابل، نقطه‌ی M را نسبت به امتداد اضلاع AB و AD ، بازتاب



می‌دهیم تا به نقاط E و F برسیم. نسبت $\frac{S_{MEF}}{S_{ABCD}}$ چقدر است؟

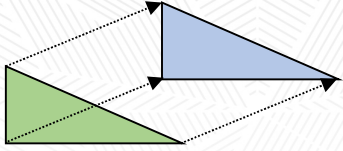
- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{3}{10}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{5}{8}$

۲۸) در چهار ضلعی $ABCD$ ، ضلع AB پس از بازتاب نسبت به قطر AC روی ضلع AD تصویر شده است. کدام گزینه در مورد چهار ضلعی $ABCD$ الزاماً درست است؟

- (۱) $ABCD$ لوزی است. (۲) قطر AC ، نیم‌ساز زوایای A و C است.
(۳) قطر BD ، عمود منصف قطر AC است. (۴) $ABCD$ ، مستطیل است.



انتقال: تبدیلی است که هر نقطه از صفحه را با یک بردار مشخص، جابجا می کند.



انتقال ایزومتری است و شیب خط را تغییر نمی دهد.

ترکیب چند انتقال متوالی، یک انتقال با بردار برآیند است.

ترکیب دو انتقال خاصیت جابجایی دارد.

۱) مربع ABCD مفروض است. اگر تبدیل T، انتقال با بردار \overline{AB} و تبدیل T'، انتقال با بردار \overline{AD} باشد. حاصل

TOT'(A) کدام است؟

- (۱) A
(۲) B
(۳) C
(۴) D

۲) دایره‌ی C(O, R) را با برداری به طول ۳R، انتقال داده‌ایم تا دایره‌ی C' به دست آید. طول نخ‌ی که به کمک

آن، می توان دو دایره را به هم بست، چقدر است؟

- (۱) $2(3 + 2\pi)R$
(۲) $(6 + \pi)R$
(۳) $2(3 + \pi)R$
(۴) $3(2 + \pi)R$

۳) دایره‌های به شعاع ۲ را با برداری به طول ۵ انتقال داده‌ایم. طول مماس مشترک داخلی دایره و تصویرش

چقدر است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

۴) رأس‌های A، B، C و D از مربع ABCD را به ترتیب با بردارهای \overline{DA} ، \overline{AB} ، \overline{BC} و \overline{CD} انتقال می دهیم تا

نقاط A'، B'، C' و D' به دست آید. نسبت قطر مربع A'B'C'D'، به ضلع مربع ABCD چقدر است؟

- (۱) $\sqrt{10}$
(۲) $\sqrt{5}$
(۳) $\sqrt{2}$
(۴) ۳

۵) رأس‌های A، B و C از مثلث ABC را به ترتیب با بردارهای \overline{CA} ، \overline{AB} و \overline{BC} انتقال می دهیم تا نقاط A'،

B' و C' برسیم. نسبت $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}$ چقدر است؟

- (۱) ۵
(۲) ۷
(۳) ۸
(۴) ۱۰



۶) رأس‌های A، B، C و D از مستطیل ABCD را به ترتیب با بردارهای \vec{CD} ، \vec{CB} ، \vec{BC} و \vec{CD} انتقال می‌دهیم

تا نقاط A'، B'، C' و D' به دست آید. نسبت $\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}}$ چقدر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۸

۷) خط d، تحت انتقال با هر یک دو بردار عمود بر هم با اندازه‌های ۳ و ۴ روی خط d' تصویر می‌شود. فاصله‌ی بین دو خط d_۱ و d_۲ چقدر است؟

- (۱) ۳ (۲) $\frac{۷}{۲}$ (۳) $\frac{۵}{۳}$ (۴) $\frac{۱۲}{۵}$

۸) هر کدام از دو بردار هم‌اندازه‌ی \vec{V}_1 و \vec{V}_2 که بر هم عموداند، خط d را به خط d' تبدیل می‌کنند. اگر \vec{V}_1 و \vec{V}_2 بر هم عمود باشند. اندازه‌ی کوتاه‌ترین برداری که d را به d' تبدیل می‌کند، چقدر است؟

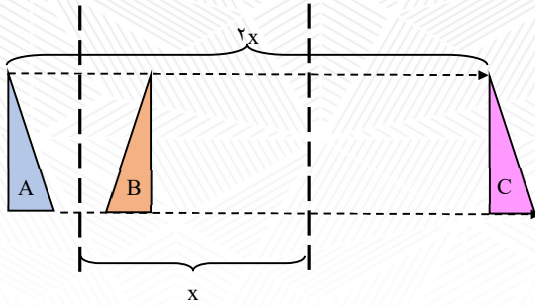
- (۱) $\frac{|\vec{V}_1|}{۲}$ (۲) $|\vec{V}_1|$ (۳) $\frac{|\vec{V}_1|}{\sqrt{۳}}$ (۴) $\frac{|\vec{V}_1|}{\sqrt{۳}}$

۹) خط d با برداری به طول $\sqrt{۶}$ ، که با خط زاویه‌ی ۳۰° می‌سازد، روی خط d' منتقل می‌شود. طول بردار انتقالی که با d و d' زاویه‌ی ۴۵° می‌سازد و d' را به d تبدیل می‌کند، چقدر است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ (۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ (۳) $\sqrt{۲}$ (۴) $\sqrt{۳}$

۱۰) دایره‌ی C(O, ۲R - ۵) با انتقالی که بردار آن R - ۱۰ است، به دایره‌ی C'(O', R + ۲) تبدیل شده است. بیش‌ترین فاصله‌ی بین نقاط دو دایره چقدر است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۱۷ (۴) ۲۴



نکته: ترکیب دو بازتاب محوری با محورهای موازی یک انتقال است.

در شکل مقابل مثلث A با بازتاب محوری به مثلث B و سپس به مثلث C تبدیل شده است. می توان نشان داد که اگر محورهای دو بازتاب موازی باشند، مثلث A با انتقالی که بردار آن دو برابر فاصله ی بین دو خط موازی است، به مثلث B تبدیل می شود.

۱۱) نقطه ی M که در فاصله ی بین دو خط موازی d و d' قرار دارد را یک بار نسبت به d و یک بار نسبت به d' بازتاب می دهیم تا به A و B برسیم. اگر $AB = 6$ ، کدام گزینه درست است؟

- ۱) فاصله ی بین d و d' برابر ۶ است. ۲) فاصله ی بین d و d' بیش تر از ۶ است.
۳) فاصله ی بین d و d' برابر ۳ است. ۴) فاصله ی بین d و d' کم تر از ۳ است.

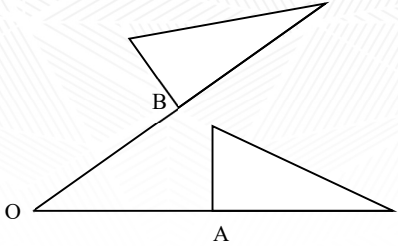
۱۲) در مربع ABCD به مساحت ۴، رأس A را نسبت به ضلع BC بازتاب می دهیم تا به A' برسیم. اگر A'' بازتاب یافته ی رأس A' نسبت به ضلع AD باشد. طول پاره خط AA'' چقدر است؟

- ۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۶ ۴) ۸

دوران: تبدیلی است که هر نقطه از صفحه را نسبت به مرکز، به اندازه‌ی زاویه‌ی مشخصی می‌چرخاند.

اگر در دوران به مرکز O و زاویه‌ی θ نقطه‌ی A به B تبدیل شود داریم:

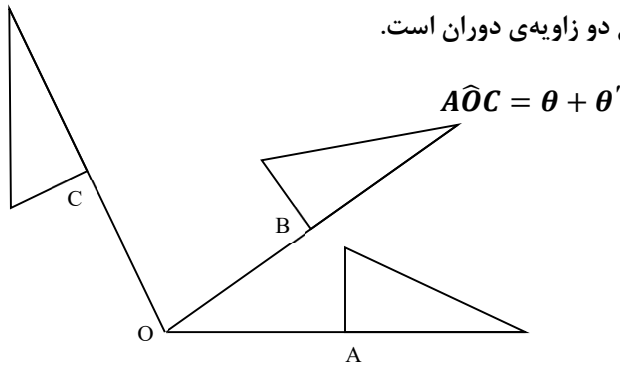
$$OA = OB, \widehat{AOB} = \theta$$



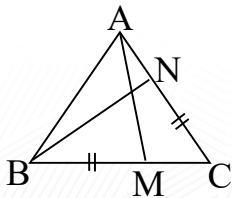
نکته (۱) دوران 360° درجه دوران کامل نامیده می‌شود که تبدیل همانی است.

نکته (۲) دوران ایزومتری است و شیب خط را ثابت نگه نمی‌دارد.

نکته (۳) ترکیب دو دوران، یک دوران است که زاویه‌ی آن مجموع دو زاویه‌ی دوران است.



(۱) مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و $NC = BM$. اگر تحت یک دوران پاره‌خط AM به روی پاره‌خط BN تصویر شود، زاویه‌ی دوران چند درجه است؟



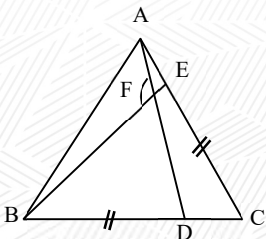
۶۰ (۱)

۳۰ (۲)

۴۵ (۳)

۱۲۰ (۴)

(۲) در شکل زیر، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع و $EC = BD$ است. زاویه‌ی F چند درجه است؟



۴۵ (۱)

۹۰ (۲)

۱۲۰ (۳)

۳۰ (۴)



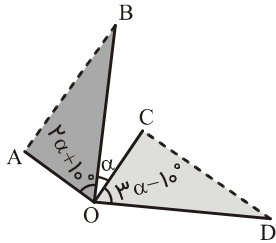
۳) اگر خط $x=2$ همزمان با دوران های $۳۰^\circ, ۲۴۰^\circ, ۱۸۰^\circ, ۱۲۰^\circ, ۶۰^\circ$ حول مبدا تبدیل شود، مساحت شکل محدود به همه ی خط ها چقدر است؟

- (۱) $۱۲\sqrt{3}$ (۲) $۶\sqrt{3}$
(۳) $۹\sqrt{3}$ (۴) $۸\sqrt{3}$

۴) نقطه ی O به فاصله ی h از خط d قرار دارد. اگر خط d را با دوران های ۱۲° و -۱۲° تبدیل کنیم. محیط شکل، حاصل از برخورد این سه خط، چقدر است؟

- (۱) $۶h$ (۲) $۴h$ (۳) $۲\sqrt{3}h$ (۴) $۴\sqrt{3}h$

۵) مثلث OAB مطابق شکل زیر با دوران ساعتگرد به مرکز O روی مثلث OCD تصویر شده است. زاویه ی این دوران چقدر است؟



- (۱) ۲۰° (۲) ۴۵°
(۳) ۶۰° (۴) ۷۰°

۶) ترکیب سه دوران با زاویه های $۲۵^\circ, ۳۵^\circ$ و ۵۰° دورانی با کدام زاویه می تواند باشد؟

- (۱) ۱۰۰° (۲) ۶۰° (۳) ۷۰° (۴) ۲۰°

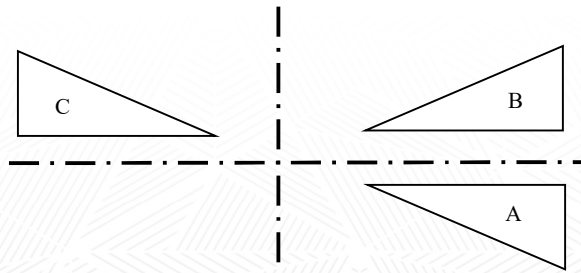
نکته: ترکیب دو بازتاب محوری با محورهای متقاطع یک دوران است.

در شکل مقابل مثلث A با بازتاب محوری به مثلث B و سپس به مثلث C تبدیل شده است.

می توان نشان داد که اگر محورهای دوبازتاب عمودبرهم باشند،

مثلث A با دوران ۱۸۰° نسبت به محل برخورد دوخط، به مثلث B

تبدیل می شود.





۷) مثلث $AB'C'$ ، بازتاب مثلث ABC نسبت به خط AC است و مثلث $AB'C'$ ، بازتاب مثلث $AB'C$ نسبت به خط AB' است. مثلث ABC ، با کدام تبدیل، روی $AB'C'$ تصویر می‌شود؟

- (۱) دوران به مرکز A و زاویه‌ی A
 (۲) دوران به مرکز A و زاویه‌ی $2A$
 (۳) بازتاب نسبت به BC
 (۴) تجانس به مرکز A و نسبت به $k = -1$

۸) مربعی به ضلع 2 را نسبت به مرکزش به اندازه‌ی $\theta = 45^\circ$ دوران می‌دهیم. مساحت ناحیه‌ی مشترک بین مربع و تصویرش کدام است؟

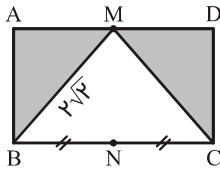
- (۱) $8(\sqrt{2}-1)$
 (۲) $4(2-\sqrt{2})$
 (۳) $2(\sqrt{2}+1)$
 (۴) $4(\sqrt{2}-1)$

۹) دو نقطه‌ی A و B به فاصله‌ی 2 از یکدیگر قرار دارند. نقطه‌ی A' دوران یافته‌ی A به مرکز B و زاویه‌ی $\theta = +90^\circ$ است. همچنین B' دوران یافته‌ی B به مرکز A و زاویه‌ی $\theta = -90^\circ$ است. طول $A'B'$ چقدر است؟

- (۱) $\sqrt{10}$
 (۲) $2\sqrt{2}$
 (۳) $2\sqrt{5}$
 (۴) $4\sqrt{2}$

۱۰) پاره خط $AB = 6$ مفروض است. در دوران 60° به مرکز B ، نقطه‌ی A روی A' تصویر می‌شود. اگر نقطه‌ی A'' بازتاب یافته‌ی نقطه‌ی A' نسبت به خط AB باشد. مساحت مثلث ABA'' چقدر است؟

- (۱) $6\sqrt{3}$
 (۲) $36\sqrt{3}$
 (۳) $9\sqrt{3}$
 (۴) $18\sqrt{3}$



۱۱) در مستطیل شکل مقابل، اگر مثلث ABM با دوران 90° به مرکز N «وسط BC » روی مثلث CDM تصویر شود؛ مساحت مستطیل چقدر است؟

- (۱) $4\sqrt{2}$
 (۲) 8
 (۳) $8\sqrt{2}$
 (۴) 16

۱۲) ضلع AB ، از مثلث ABC ، با دوران به مرکز A و زاویه‌ی 70° ، روی ضلع AC تصویر می‌شود. زاویه‌ی C از این مثلث، چند درجه است؟

- (۱) 70°
 (۲) 55°
 (۳) 40°
 (۴) 65°

۱۳) دو دایره‌ی $C(O, 6)$ و $C'(O', 2)$ مماس داخل‌اند. اگر دایره‌ی C' با دوران 90° به مرکز O ، به دایره‌ی C'' تبدیل شود. طول مماس مشترک داخلی دو دایره‌ی C' و C'' چقدر است؟

- (۱) 5
 (۲) 4
 (۳) $\sqrt{15}$
 (۴) $2\sqrt{5}$

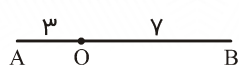


۱۴ دو دایره‌ی $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ مماس خارج‌اند. در دورانی به مرکز O و زاویه‌ی 60° ، نقطه‌ی O' به نقطه‌ی M تبدیل می‌شود. اندازه‌ی $O'M$ چقدر است؟

(۱) $|R - R'|$ (۲) $R + R'$

(۳) $2\sqrt{RR'}$ (۴) $\frac{R + R'}{2}$

۱۵ در شکل زیر، نقطه‌ی O را با دوران به مرکز A و زاویه‌ی $\theta = 90^\circ$ ، به M تبدیل می‌کنیم. هم‌چنین نقطه‌ی O ، با دوران به مرکز B و زاویه‌ی $\theta = -90^\circ$ ، به N تبدیل شده است. مساحت چهار ضلعی $AMNB$ چقدر است؟



(۱) ۶۳

(۲) ۴۹

(۳) ۵۰

(۴) ۴۲

۱۶ پاره خط $AB = 6$ مفروض است. در دوران 60° به مرکز B ، نقطه‌ی A روی A' تصویر می‌شود. اگر نقطه‌ی A'' بازتاب یافته‌ی نقطه‌ی A' نسبت به خط AB باشد. مساحت مثلث ABA'' چقدر است؟

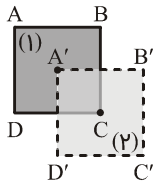
(۱) $6\sqrt{3}$

(۲) $36\sqrt{3}$

(۳) $9\sqrt{3}$

(۴) $18\sqrt{3}$

۱۷ در شکل زیر، مرکز هر مربع، رأسی از مربع دیگر است. کدام دوران نمی‌تواند مربع (۱) را به مربع (۲) تبدیل کند؟

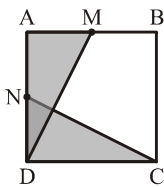


(۱) دوران 90° به مرکز وسط BC

(۲) دوران 90° به مرکز محل تلاقی CD و $A'D'$

(۳) دوران 180° به مرکز وسط $A'C$

(۴) دوران 180° به مرکز C



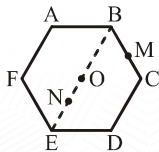
۱۸ در شکل روبه‌رو، نقاط M و N وسط‌های اضلاع مربع $ABCD$ هستند. کدام تبدیل، مثلث CDN را روی مثلث AMD تصویر می‌کند؟

(۱) بازتاب

(۲) تجانس معکوس

(۳) دوران 90°

(۴) دوران 45°



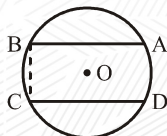
۱۹ نقطه‌ی O در شکل مقابل، مرکز شش ضلعی منتظم و نقاط M و N ، وسط‌های BC و EO هستند. کدام دوران AM را به AN تبدیل می‌کند؟

(۱) دوران 120° به مرکز O

(۲) دوران 60° به مرکز C

(۳) دوران 120° به مرکز D

(۴) دوران 60° به مرکز A



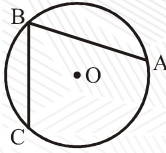
۲۰ در دایره‌ی شکل مقابل به مرکز O ، اگر وتر AB با دوران 180° روی وتر CD تصویر شود. اندازه‌ی زاویه‌ی \hat{ABC} چقدر است؟

(۱) 135°

(۲) 120°

(۳) 90°

(۴) اطلاعات کافی نیست.



۲۱) در دایره‌ی شکل مقابل به مرکز O وتر AB با دوران 130° ، که مرکز آن همان نقطه‌ی O است، روی وتر BC تصویر می‌شود. اندازه‌ی کمان AC چقدر است؟

- (۱) 130° (۲) 100°
(۳) 120° (۴) 180°

۲۲) ضلع AB ، از مثلث ABC ، با دوران به مرکز A و زاویه‌ی 70° ، روی ضلع AC تصویر می‌شود. زاویه‌ی C از این مثلث، چند درجه است؟

- (۱) 70° (۲) 55° (۳) 40° (۴) 65°

۲۳) ضلع AB از چهار ضلعی $ABCD$ با دوران 70° به مرکز A ، روی ضلع AD تصویر می‌شود. اگر ضلع BC با دوران 130° به مرکز C روی ضلع CD تصویر شود. اندازه‌ی زاویه‌ی B از این چهار ضلعی چقدر است؟

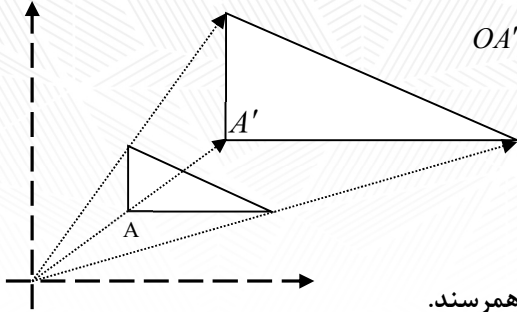
- (۱) 70° (۲) 80° (۳) 90° (۴) 105°

۲۴) در دوزنقه‌ی $ABCD$ ، دوران‌یافته‌ی ساق AD ، به اندازه‌ی 90° روی ساق BC تصویر می‌شود. اگر طول قاعده‌ها برابر 2 و 4 باشد. مساحت دوزنقه چقدر است؟

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $3\sqrt{2}$

تجانس: یک تجانس به مرکز O و نسبت K تبدیلی است که هر نقطه‌ی A در صفحه

را به نقطه‌ای A' طوری تصویر کند که A' روی نیم خط OA باشد و $OA' = kOA$

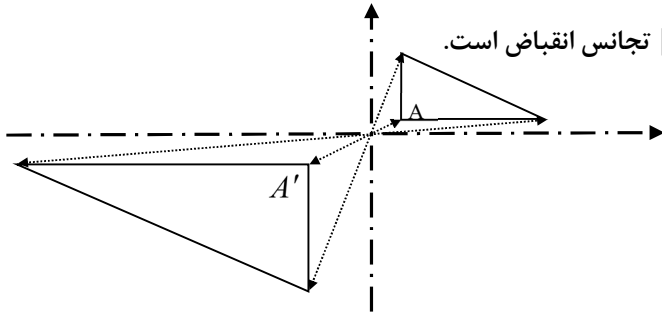


نکته ۱: در تجانس خط‌هایی که نقطه و مجانس آنها را بهم وصل می‌کنند هم‌رسانند.

نکته ۲: تجانس ایزومتري نیست (طول را با نسبت k تغییر می‌دهد) بجز حالتی که $k = \pm 1$

نکته ۳: در تجانس شیب خط عوض نمی‌شود.

نکته ۴: اگر $|k| > 1$ تجانس انبساط است و در حالتی که $|k| < 1$ تجانس انقباض است.



نکته ۵: اگر $k > 0$ تجانس مستقیم است و

در حالتی که $k < 0$ تجانس معکوس است که ترکیبی از تجانس مستقیم و دوران است.

۱) نقاط A', B', C' وسط‌های اضلاع $\triangle ABC$ هستند. نسبت تجانسی که $\triangle ABC$ را به $\triangle A'B'C'$ تبدیل می‌کند چقدر است؟

(۱) $k = 2$

(۲) $k = -2$

(۳) $k = \frac{1}{2}$

(۴) $k = -\frac{1}{2}$

۲) مرکز تجانسی که نقاط A(۱،۱) و B(۱،۲) را به نقاطی $A'(2,1)$ و $B'(2,3)$ تبدیل می‌کند کدام است؟

(۱) $(0,0)$

(۲) $(1,0)$

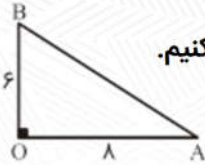
(۳) $(0,1)$

(۴) $(-1,0)$



۳) در کدام گزینه، دو نقطه مجانس یکدیگر تحت تجانس نسبت به نقطه $O(1,2)$ هستند؟

- (۱) $(3,0)$ و $(2,2)$ (۲) $(2,-3)$ و $(4,-6)$
(۳) $(4,1)$ و $(10,-1)$ (۴) $(5,2)$ و $(2,8)$

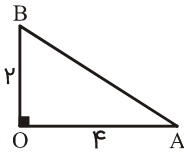


۴) در شکل زیر، نقاط A و B را با تجانس به مرکز O و نسبت $k = \frac{1}{4}$ به A' و B' تبدیل می‌کنیم.

مساحت $ABB'A'$ چقدر است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۵
(۳) ۲۴ (۴) ۳۰

۵) در شکل زیر، نقاط A و B را با تجانس به مرکز O و نسبت $k = -\frac{1}{4}$ به A' و B' تبدیل می‌کنیم. مساحت



$ABB'A'$ چقدر است؟

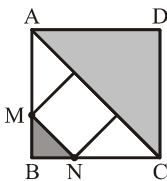
- (۱) ۸ (۲) ۹
(۳) ۱۲ (۴) ۱۶

۶) دو مستطیل در چه صورتی مجانس یکدیگرند؟

- (۱) متشابه باشند و یک ضلع آن‌ها موازی باشد.
(۲) متشابه باشند و یک قطر آن‌ها موازی باشد.
(۳) زاویه‌ی بین دو قطر در آن‌ها برابر باشد و طول‌های آن‌ها موازی باشد.
(۴) مرکزهای آن‌ها بر هم منطبق بوده و زاویه‌ی بین قطرهای آن‌ها برابر باشد.

۷) در شکل مقابل، $ABCD$ مربع است و مربعی درون مثلث ABC ، محاط شده است. نسبت

تجانسی که، مثلث BMN را به مثلث ADC تبدیل می‌کند، چقدر است؟



- (۱) ۲ (۲) $-\frac{3}{2}$
(۳) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۴) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

۸) اگر ترکیب دوران با زاویه‌های 3θ و $\theta + 20^\circ$ یک تجانس معکوس باشد. θ کدام است؟

- (۱) 60° (۲) 50°
(۳) 40° (۴) چنین چیزی ممکن نیست.

۹) مثلث ABC با تجانس مستقیم به مرکز O ، روی مثلث $A'B'C'$ تصویر شده است. اگر $\frac{OA'}{AA'} = k$ نسبت $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}$ کدام است؟

- (۱) k^2 (۲) $(k+1)^2$
(۳) $(k-1)^2$ (۴) $k^2 + 1$

۱۰) نسبت تجانسی که دایره‌ی محاطی مثلث متساوی‌الاضلاع را بر دایره‌ی محیطی همان مثلث تصویر می‌کند، چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{3}$
(۳) ۳ (۴) $\sqrt{2}$



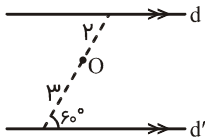
۱۱) نسبت تجانسی که مربع محاط، در یک دایره را به مربعی محیط، بر همان دایره تصویر کند، چقدر است؟

- (۱) $4 - \sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2}$
(۳) ۴ (۴) ۲

۱۲) طول خط‌المركزین دو دایره‌ی مماس داخل، برابر ۶ است. اگر این دو دایره، مجانس یک‌دیگر با نسبت $k = 3$ باشند؛ شعاع دایره‌ی کوچک‌تر چقدر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲
(۳) ۱ (۴) ۴

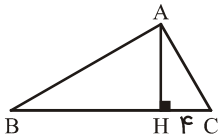
۱۳) در شکل زیر، اگر O مرکز تجانسی باشد که خط d را به d' تبدیل می‌کند، نسبت تجانس چقدر است؟



- (۱) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۲) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
(۳) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

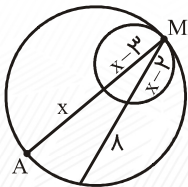
۱۴) در شکل مقابل، اگر مثلث AHC را با دوران 90° پادساعتگرد به مرکز H تبدیل کنیم، سپس مثلث حاصل را با استفاده از تجانس تصویر کنیم، بر مثلث AHB منطبق می‌شود. زاویه‌ی BAC چقدر است؟

- (۱) ۷۵ (۲) ۹۰
(۳) ۱۲۰ (۴) هر مقداری می‌تواند باشد.



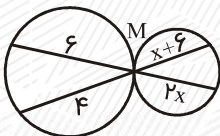
۱۵) در شکل مقابل، اگر مثلث AHC را با دوران 90° پادساعتگرد به مرکز H دوران دهیم، سپس با تجانس به مرکز H و نسبت $k = \frac{3}{4}$ تبدیل کنیم، روی مثلث ABH تصویر می‌شود.

- مساحت مثلث ABC چقدر است؟
(۱) ۶۰ (۲) ۴۸
(۳) ۳۶ (۴) ۳۹



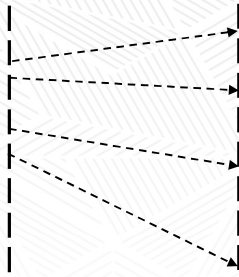
۱۶) در شکل مقابل، دو دایره در نقطه‌ی M بر هم مماس‌اند. اندازه‌ی MA چقدر است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸
(۳) ۹ (۴) ۱۱



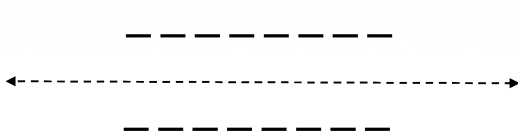
۱۷) در شکل مقابل، اگر دو دایره در نقطه‌ی M بر هم مماس باشند؛ مقدار x چقدر است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۵
(۳) ۱۸ (۴) ۳



نکته: دو خط موازی می توانند با انتقال یا بازتاب یا دوران به یکدیگر تبدیل شوند.

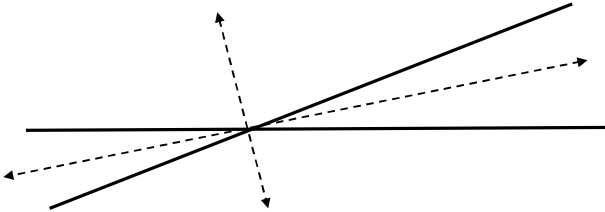
الف. هر برداری که دوسر آن روی دو خط موازی باشد می تواند دو خط موازی را به یکدیگر تبدیل کند. پس بینهایت انتقال وجود دارد.



ب. محور بازتابی که دو خط موازی را بهم تبدیل کند، خط وسط است.

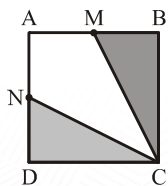
ج. دورانی که دو خط موازی را بهم تبدیل کند حتما 180° است و مرکز آن هر نقطه وسط دو خط موازی می توان باشد. (بازتاب مرکزی)

نکته: دو خط متقاطع فقط می توانند با بازتاب محوری یا دوران به یکدیگر تبدیل می شوند.



الف. محور بازتاب هر کدام از نیمسازهای زاویه ی بین دو خط می تواند باشد.

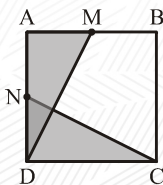
ب. مرکز دوران هر نقطه روی نیمساز زاویه ی بین دو خط می تواند باشد و زاویه ی دوران زاویه ی بین دو خط $(\theta$ یا $180^\circ - \theta$) است.



۱- در شکل روبهرو، نقاط M و N وسطهای اضلاع مربع ABCD هستند. کدام تبدیل،

مثلثهای رنگ شده را روی یکدیگر تصویر می کند؟

- (۱) تجانس مستقیم
- (۲) بازتاب
- (۳) دوران 90°
- (۴) انتقال



۲- در شکل روبهرو، نقاط M و N وسطهای اضلاع مربع ABCD هستند. کدام تبدیل،

مثلث CDN را روی مثلث AMD تصویر می کند؟

- (۱) بازتاب
- (۲) تجانس معکوس
- (۳) دوران 90°
- (۴) دوران 45°



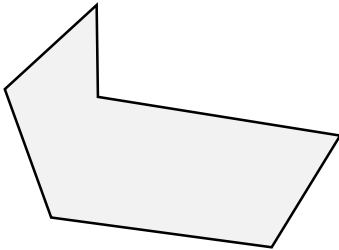
۳- دو خط d و d' بر هم عموداند. چند خط بازتاب وجود دارد که d را به d' تصویر کند؟
 ۱) ۱ (۱) ۲) ۲ (۲) ۳) هیچ (۳) ۴) بی شمار (۴)

۴- دو خط d و d' موازی‌اند. چند خط بازتاب وجود دارد که d را به d' تبدیل کند؟
 ۱) ۱ یا بی شمار (۱) ۲) صفر یا بی شمار (۲) ۳) دقیقاً ۱ خط (۳) ۴) دقیقاً ۲ خط (۴)

کاربرد تبدیل‌ها

مساله هم پیرامونی:

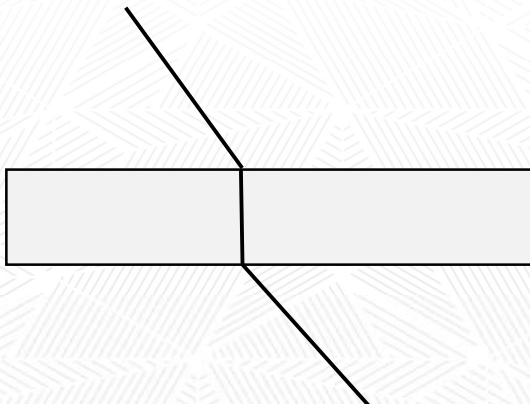
فرض کنید زمینی به شکل چندضلعی داریم که دور آن احصار کشیده ایم. حال می خواهیم با ثابت نگهداشتن محیط و ثابت نگهداشتن تعداد اضلاع چند ضلعی، بدون اینکه اندازه حصار کشی تغییر کند، مساحت زمین را افزایش دهیم.



مساله هرون: دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه ای واقع اند. می خواهیم جاده ای از A به B بسازیم به طوری که ۴ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. این ۴ کیلومتر را در چه قسمتی از رودخانه بسازیم تا مسیر $ACDB$ کوتاه ترین مسیر ممکن باشد؟



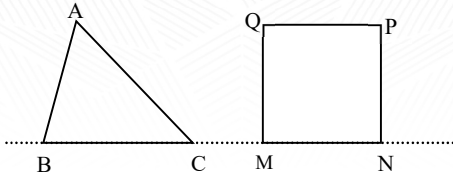
اگر دو شهر A و B دو طرف رودخانه باشند و بخواهیم جاده ای از به طوری که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد، محل احداث پل را کجا در نظر بگیریم که مسیر $AMNB$ کوتاه ترین مسیر ممکن باشد؟





۱) برای پیدا کردن نقطه‌ای روی خط d که کمترین مجموع فاصله را تا دو نقطه‌ی ثابت A و B (در یک طرف خط) داشته باشد کدام تبدیل به کار می‌رود؟

- (۱) بازتاب محوری
(۲) تجانس
(۳) انتقال
(۴) دوران



۲) مثلث ABC و مربع $MNPQ$ مفروضند، برای رسم خطی موازی BC که در دو شکل پاره خطهای برابر جدا کند کدام تبدیل بکار می‌رود؟

- (۱) انتقال
(۲) دوران
(۳) بازتاب
(۴) تجانس

۳) برای رسم خطی که از یک نقطه‌ی تقاطع دو دایره‌ی متقاطع می‌گذرد و دو وتر برابر در دو دایره ایجاد می‌کند، کدام تبدیل به کار می‌رود؟

- (۱) انتقال
(۲) دوران
(۳) بازتاب
(۴) تجانس

۴) برای رسم مثلث متساوی‌الاضلاعی که یک راس آن نقطه‌ی A و دو راس دیگر آن روی دو خط موازی L و L' باشد کدام تبدیل به کار می‌رود؟

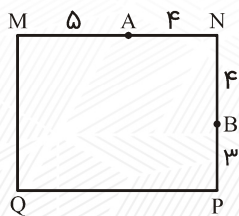
- (۱) بازتاب محوری
(۲) تجانس
(۳) انتقال
(۴) دوران

۵) برای رسم مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین به راس A که دو راس آن روی دو دایره‌ی متخارج باشد کدام تبدیل به کار می‌رود؟

- (۱) بازتاب محوری
(۲) دوران ۴۵
(۳) انتقال
(۴) دوران ۹۰

۶) برای رسم مربعی محاط در مثلث ABC که یک ضلع آن روی BC و دو راس دیگر آن روی اضلاع AB و AC باشد، کدام تبدیل بکار می‌رود؟

- (۱) بازتاب محوری
(۲) دوران
(۳) تجانس
(۴) انتقال



۷) در مستطیل شکل مقابل، پرتوی نوری از A به B تابانده می‌شود. اگر این پرتوی نور، پس از بازتاب نسبت به NP و PQ ، به نقطه‌ی D روی ضلع MQ برسد. طول مسیری که پرتوی نور طی کرده، چقدر است؟

- (۱) ۱۵
(۲) $10\sqrt{2}$
(۳) $13\sqrt{2}$
(۴) ۲۰

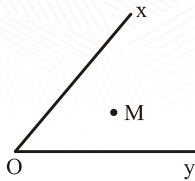


۸) پاره خط CD و دو نقطه‌ی A و B مطابق شکل، در یک طرف آن مفروض‌اند. برای پیدا کردن نقطه‌ای مانند M روی خط CD که داشته باشیم: $\widehat{AMC} = \widehat{BMD}$ ، کدام تبدیل به کار می‌رود؟



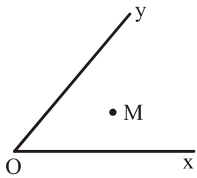
- (۱) بازتاب
(۲) انتقال
(۳) دوران
(۴) تجانس

۹) در شکل مقابل، برای رسم خطی گذرنده از M که دو نیم‌خط Ox و Oy را قطع کند و M وسط نقاط تقاطع باشد، کدام تبدیل به کار می‌رود؟



- (۱) بازتاب
(۲) دوران
(۳) انتقال
(۴) تجانس مستقیم

۱۰) در شکل مقابل، برای رسم خطی گذرنده از M که Ox و Oy را به ترتیب در A و B قطع کند، به طوری که $MA = 2MB$ ، کدام تبدیل به کار می‌رود؟



- (۱) تجانس با نسبت $3-2$
(۲) تجانس با نسبت $2-3$
(۳) تجانس با نسبت 3
(۴) تجانس با نسبت 2

۱۱) دو خط متقاطع L و L' و پاره خط AB مفروض‌اند. برای رسم پاره خطی موازی و مساوی با AB که دو سر آن روی دو خط L و L' باشد، کدام تبدیل به کار می‌رود؟

- (۱) تجانس
(۲) دوران
(۳) انتقال
(۴) بازتاب

۱۲) دو دایره‌ی C_1 و C_2 متخارج‌اند و دو نقطه‌ی A و M مفروض‌اند. برای رسم مثلث ABC که رأس‌های B و C روی دو دایره بوده و M وسط ضلع BC باشد، کدام تبدیل به کار می‌رود؟

- (۱) تجانس مستقیم
(۲) انتقال
(۳) دوران
(۴) بازتاب

۱۳) برای رسم مربعی محاط در یک نیم‌دایره که یک ضلع آن منطبق بر قطر نیم‌دایره باشد، کدام تبدیل به کار می‌رود؟

- (۱) بازتاب
(۲) تجانس
(۳) دوران
(۴) انتقال

۱۴) دو نقطه‌ی A و B ، دو طرف خط d قرار دارند. برای پیدا کردن نقطه‌ی M روی خط d که $|MA - MB|$ بیش‌ترین مقدار ممکن باشد، کدام تبدیل به کار می‌رود؟

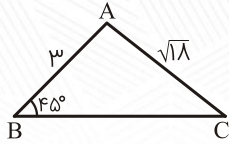
- (۱) بازتاب
(۲) تجانس
(۳) دوران
(۴) انتقال

۱۵) خط d و دایره‌ی M و نقطه‌ی A خارج از آن‌ها مفروض‌اند، برای رسم مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین ABC ($\widehat{A} = 90^\circ$)، که B روی خط و C روی دایره باشد، کدام تبدیل به کار می‌رود؟

- (۱) دوران
(۲) تجانس
(۳) بازتاب
(۴) انتقال

قضیه سینوس ها: در مثلث ABC رابطه بین اضلاع و زوایا بصورت زیر است:

$$2R = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$$



۱) در شکل مقابل، اندازه‌ی زاویه‌ی A کدام است؟

۶۰° (۱) ۷۵° (۲)

۱۰۵° (۳) ۱۲۰° (۴)

۲) دو ایستگاه رادار، که در طرفین هواپیما و در فاصله‌ی یک کیلومتری از هم واقع‌اند، در یک زمان، هواپیمایی را با زاویه‌های ۱۵° و ۶۰° رصد کرده‌اند. فاصله‌ی هواپیما از ایستگاه نزدیک‌تر چند کیلومتر است؟

۲ - sqrt(3) (۱) ۲ + sqrt(3) (۲) sqrt(3) (۳) ۲ sqrt(3) (۴) (tan 15° = 2 - sqrt(3))

۳) در مثلثی اندازه‌ی یک ضلع برابر ۳ واحد و زاویه‌ی روبه‌رو به آن ۳۰° درجه است. مجموع فواصل محل برخورد عمود منصف‌های اضلاع این مثلث تا رئوس آن کدام است؟

۳ (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۸ (۴)

۴) در مثلث ABC، ضلع BC = ۸، B = 35° و C = 85° است. شعاع دایره‌ی محیطی این مثلث کدام است؟

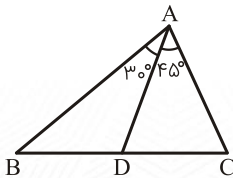
8*sqrt(3)/3 (۱) 4*sqrt(3) (۲) 8*sqrt(3) (۳) 4*sqrt(3)/3 (۴)

۵) در متوازی‌الاضلاع ABCD، اگر AB = sqrt(2)AD و ADB = 2BDC باشد، آن‌گاه زاویه‌ی BAD چند درجه است؟

۱۵ (۱) ۳۰ (۲) ۴۵ (۳) ۶۰ (۴)

۶) اگر در مثلث ABC، C = 50° و cos A / a = cos B / b باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی A است؟

۵۰° (۱) ۵۵° (۲) ۶۵° (۳) ۷۰° (۴)



۷) در مثلث ABC شکل مقابل، AB = 3AC است. نسبت BD/DC کدام است؟

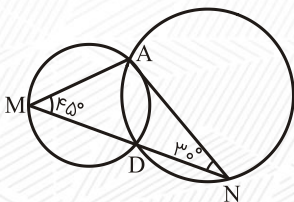
۳ (۱) 3*sqrt(2)/2 (۲)

۳*sqrt(2) (۳) ۲*sqrt(3) (۴)

۸) در شکل مقابل، دو دایره در نقاط A و D متقاطع‌اند. اگر MN از نقطه‌ی D بگذرد، آن‌گاه مساحت دایره‌ی بزرگ‌تر چند برابر مساحت دایره‌ی کوچک‌تر است؟

sqrt(2) (۱) ۲ (۲)

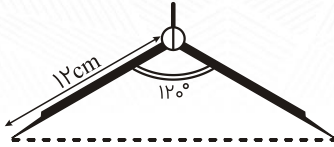
۲*sqrt(2) (۳) ۴ (۴)



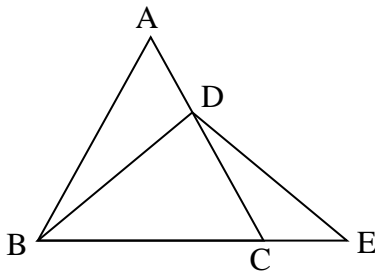
قضیه کسینوس ها : رابطه بین سه ضلع مثلث ABC در حالت کلی به صورت زیر است:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

۱) طول هر پایه‌ی پرگاری ۱۲ cm و زاویه‌ی بین پایه‌ها 120° است. طول شعاع دایره‌ای که این پرگار رسم می‌کند، کدام است؟



- (۱) ۱۰
 (۲) $10\sqrt{3}$
 (۳) $11\sqrt{3}$
 (۴) $12\sqrt{3}$



۲) در شکل مقابل ABC متساوی الاضلاع است و $AD = 2$ ، $DC = 4$ و اگر $BD = DE$ طول CE کدام است؟

- (۱) ۲
 (۲) ۳
 (۳) $\sqrt{8}$
 (۴) ۴

۳) دو ضلع مثلثی $6\sqrt{2}$ و $2\sqrt{10}$ و زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع $2\sqrt{10}$ برابر 45° است. ضلع سوم این مثلث کدام است؟

- (۱) ۸ و ۶
 (۲) ۴ و ۸
 (۳) $6\sqrt{2}$ و $8\sqrt{2}$
 (۴) $4\sqrt{2}$ و $8\sqrt{2}$

۴) در مثلثی به اضلاع ۲، ۳ و ۴ واحد، اندازه‌ی تصویر قائم کوچک‌ترین ضلع بر بزرگ‌ترین ضلع کدام است؟

- (۱) $\frac{11}{16}$
 (۲) $\frac{11}{8}$
 (۳) $\frac{29}{16}$
 (۴) $\frac{29}{32}$

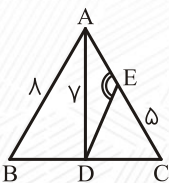
۵) اندازه‌ی دو ضلع مثلثی ۴ و ۶ و مجموع اندازه‌ی زوایای روبه‌روی این اضلاع، 60° درجه است. اندازه‌ی ضلع سوم مثلث کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{17}$
 (۲) $2\sqrt{7}$
 (۳) $2\sqrt{11}$
 (۴) $2\sqrt{19}$

۶) اگر در مثلث ABC، $a = \sqrt{2}b$ و $c = 2b$ باشد، $\cos \hat{A}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$
 (۲) $\frac{1}{2}$
 (۳) $\frac{3}{4}$
 (۴) $\frac{4}{5}$

۷) مطابق شکل در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع ۸، نقطه‌ی D به فاصله‌ی Y از رأس A قرار دارد. اگر نقطه‌ی E به فاصله‌ی ۵ واحد از رأس C قرار داشته باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی AED چند درجه است؟ ($CD > BD$)



- (۱) 105°
 (۲) 120°
 (۳) 135°
 (۴) 150°



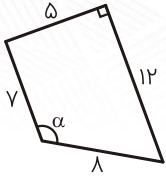
۸) در مثلث ABC داریم: $AB = 5$ ، $BC = 8$ و $B = 60^\circ$. اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محیطی این مثلث کدام است؟

$\frac{7}{3}$ (۴)

$\frac{7\sqrt{2}}{2}$ (۳)

$\frac{7\sqrt{3}}{3}$ (۲)

$\frac{7}{2}$ (۱)



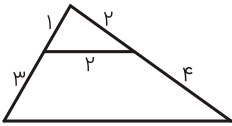
۹) در چهار ضلعی مقابل، دو ضلع عمود بر هم‌اند، $\sin \alpha$ کدام است؟

$\frac{3}{5}$ (۲)

$\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۱)

$\frac{4}{5}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳)



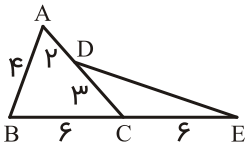
۱۰) در شکل مقابل، اندازه‌ی ضلع بزرگ‌تر چهار ضلعی کدام است؟

$2\sqrt{11}$ (۲)

$2\sqrt{10}$ (۱)

$5\sqrt{2}$ (۴)

$4\sqrt{3}$ (۳)



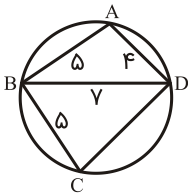
۱۱) در شکل مقابل، اندازه‌ی DE کدام است؟

$5\sqrt{2}$ (۲)

$4\sqrt{2}$ (۱)

$7\sqrt{2}$ (۴)

$6\sqrt{2}$ (۳)



۱۲) در شکل مقابل، محیط چهار ضلعی ABCD کدام است؟

۲۰ (۲)

۱۸ (۱)

۲۳ (۴)

۲۲ (۳)

رابطه‌ی طول میانه: برای محاسبه طول میانه نظیر یک ضلع از مثلث داریم:

$$\frac{a^2}{2} + 2m_a^2 = b^2 + c^2$$

اگر رابطه را برای هر سه میانه بنویسیم داریم:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

۱) در شکل مقابل، اگر اندازه‌ی اضلاع مثلث به ترتیب برابر با $AB = 4$ ، $AC = 6$ و

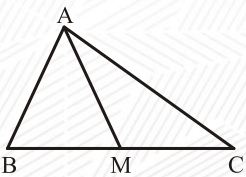
$BC = 8$ باشد، اندازه‌ی طول میانه‌ی وارد بر ضلع BC چقدر است؟

$\sqrt{10}$ (۴)

$2\sqrt{2}$ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

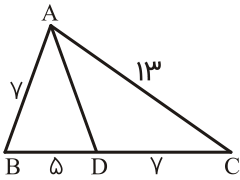


۲) اندازه‌های میانه‌های مثلثی برابر با ۴، ۵ و ۷ است. مجموع مربعات اندازه‌های اضلاع این مثلث کدام است؟
 (۱) ۶۰ (۲) ۹۰ (۳) ۱۰۰ (۴) ۱۲۰

۳) رابطه‌ی $25a^2 = b^2 + c^2$ ، میان طول اضلاع مثلث ABC برقرار است. فاصله‌ی رأس A از مرکز ثقل مثلث چه کسری از a است؟ (AB = c, AC = b, BC = a)
 (۱) ۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{7}{3}$

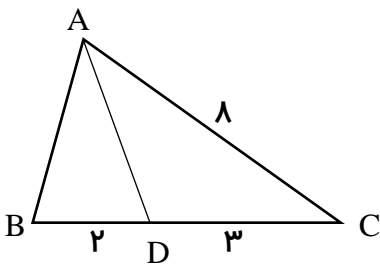
رابطه استوارت: در مثلث ABC رأس A را به نقطه ی P روی ضلع مقابل وصل می کنیم، بنابر رابطه استوارت داریم:

$$AP^2 = \frac{(xb^2 + yc^2)}{x + y} - xy$$



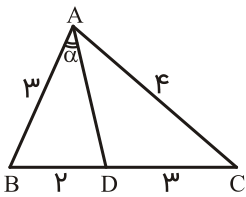
۱) در شکل مقابل، اندازه‌ی AD کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲



۲) در شکل مقابل AD = AB، اندازه‌ی AD کدام است؟

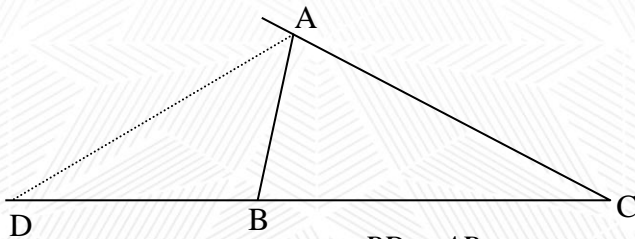
- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۶



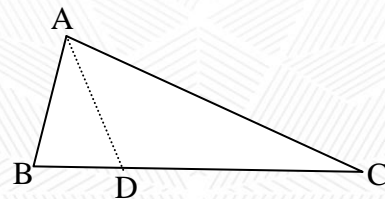
۳) در شکل مقابل، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{8}$ (۲) $\frac{8}{7}$ (۳) $\frac{8}{9}$ (۴) $\frac{9}{8}$

قضیه‌ی نیمساز: نیمساز هر زاویه از مثلث (داخلی یا خارجی) روی ضلع مقابل پاره خط هایی متناسب با اضلاع آن زاویه ایجاد می کند.



قضیه نیمساز خارجی: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$



قضیه نیمساز داخلی: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$



۱) نیمساز زاویه A از مثلث ABC ضلع BC را در D قطع کرده است. طول BD کدام است؟

$\frac{AC \cdot BC}{AC + BC}$ (۴)
 $\frac{AB \cdot AC}{BC + AC}$ (۳)
 $\frac{BC \cdot AB}{AB + AC}$ (۲)
 $\frac{BC \cdot AC}{AB + BC}$ (۱)

۲) در مستطیلی به ابعاد ۴ و ۳ واحد، نیمسازهای داخلی دو زاویه متقابل، قطر دیگر مستطیل را در M و N قطع می‌کند. اندازه MN کدام است؟

$\frac{5}{3}$ (۴)
 $\frac{5}{6}$ (۳)
 $\frac{5}{7}$ (۲)
 $\frac{2}{3}$ (۱)

۳) در مثلث ABC ، میانه $AM = 3$ و $BC = 2$ است. اگر نیمسازهای دو زاویه AMB و AMC ، دو ضلع AB و AC را به ترتیب در نقاط P و Q قطع کنند، آن گاه اندازه PQ کدام است؟

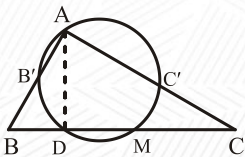
3 (۴)
 2 (۳)
 $\frac{3}{2}$ (۲)
 1 (۱)

۴) در مثلث ABC نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه A ضلع $BC = 10$ و امتداد آن را در D و D' قطع کرده‌اند. اگر $AB = 3$ و $AC = 2$ طول پاره خط DD' چقدر است؟

24 (۴)
 16 (۳)
 18 (۲)
 20 (۱)

۵) در مثلث ABC نیمسازهای A و B در O متقاطعند اگر D پای نیمساز وارد بر BC باشد نسبت $\frac{OA}{OD}$ با کدام گزینه برابر است؟

$\frac{BC}{AB}$ (۴)
 $\frac{AB + AC}{BC}$ (۳)
 $\frac{AB}{AC}$ (۲)
 $\frac{AB + BC}{AC}$ (۱)



۶) در مثلث ABC ، نقطه M وسط ضلع BC و AD نیمساز زاویه A است. دایره‌ی محیطی مثلث ADM رسم شده است. نسبت $\frac{BB'}{CC'}$ برابر کدام است؟

$\frac{DB}{DM}$ (۴)
 $\frac{AB'}{AC'}$ (۳)
 $\frac{AB}{AC}$ (۲)
 1 (۱)

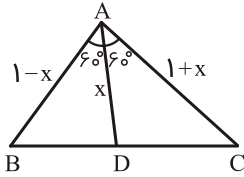


رابطه‌ی طول نیمساز: اگر AD نیمساز زاویه‌ی A از مثلث ABC باشد داریم:

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$$

همچنین داریم:

$$AD^2 = \frac{2bc \cdot \cos \frac{A}{2}}{b+c}$$



۷) در شکل مقابل اندازه‌ی x کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\sqrt{2}-1$ (۴) $\sqrt{3}-1$

۸) در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول نیمساز داخلی زاویه‌ی قائمه $5\sqrt{2}$ است. مجموع معکوس‌های دو ضلع زاویه‌ی قائمه کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{10}$ (۴) $\frac{1}{10}$

۹) نقطه‌ای روی وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای، از دو ضلع قائم آن به یک فاصله است. اگر این نقطه، وتر را به دو پاره خط به طول‌های ۳ و ۴ تقسیم کند، طول ضلع کوچک مثلث کدام است؟

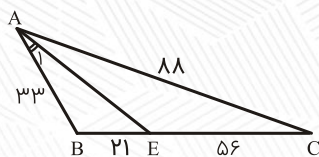
- (۱) $2/1$ (۲) $3/4$ (۳) $4/2$ (۴) 5

۱۰) در مثلثی با اضلاع ۶ و ۷ و ۸ طول نیمساز وارد بر ضلع متوسط چقدر است؟

- (۱) $\sqrt{30}$ (۲) 6 (۳) 5 (۴) $2\sqrt{10}$

۱۱) در مثلث ABC ، طول نیمساز داخلی AD از رابطه‌ی $AD^2 = BD \times CD$ به دست می‌آید. نسبت $\frac{AC}{CD}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) 2 (۴) $\sqrt{2}$

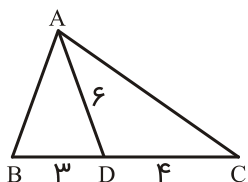


۱۲) در شکل مقابل، اندازه‌ی زاویه‌ی A_1 چند درجه است؟

- ۱) ۱۵
۲) ۳۰
۳) ۴۵
۴) ۶۰

۱۳) در مثلث ABC ، $AB = 4$ ، $BC = 9$ و $\sin \hat{B} = 2 \sin \hat{C}$ است. طول نیمساز داخلی AD کدام است؟

- ۱) $2\sqrt{3}$
۲) $\sqrt{14}$
۳) $\sqrt{15}$
۴) ۴

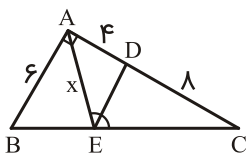


۱۴) در شکل مقابل، AD نیمساز رأس A است. اندازه‌ی محیط مثلث ABC کدام است؟

- ۱) ۲۰
۲) ۲۱
۳) ۲۲
۴) ۲۳

۱۵) در مثلث ABC ، AD نیمساز است؛ به طوری که $AB = AD$ ، $BD = 2$ و $CD = 3$ است. طول AD کدام است؟

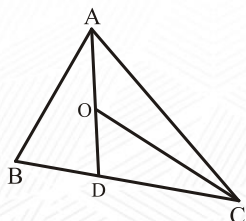
- ۱) $\sqrt{3}$
۲) $2\sqrt{2}$
۳) $2\sqrt{3}$
۴) $3\sqrt{2}$



۱۶) در شکل مقابل، AE نیمساز BAC و DE نیمساز AEC است. با توجه به

اندازه‌های روی شکل، طول AE کدام است؟

- ۱) $2\sqrt{5}$
۲) $2\sqrt{6}$
۳) $3\sqrt{3}$
۴) $4\sqrt{2}$



۱۷) در شکل زیر، AD و CO به ترتیب نیمسازهای زوایای داخلی A و C در مثلث ABC هستند. اگر $AB = 9$ ، $AC = 12$ و $CD = 4$ باشد، طول OD کدام است؟

- ۱) $\sqrt{6}$
۲) $\sqrt{2}$
۳) $\sqrt{3}$
۴) $\sqrt{10}$



رابطه ی هرون: اگر p نصف محیط مثلث ABC باشد مساحت آن به روش زیر قابل محاسبه است:

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

مساحت مثلث های زیر را بدست آورید:

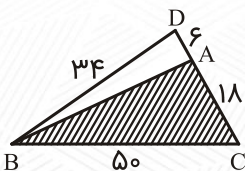
(۱) اندازه های اضلاع برابر ۴ و ۱۳ و ۱۵ است.

(۲) اندازه های اضلاع برابر ۵ و ۱۳ و $3\sqrt{10}$ است.

(۳) اندازه های سه میانه برابر ۹ و ۱۰ و ۱۷ است.

(۴) اندازه های دو ضلع برابر ۱۱ و ۱۳ و میانه ضلع سوم برابر ۲۰ است.

(۵) اندازه های دو میانه برابر ۱۲ و ۳۹ و ضلع بین آنها برابر ۳۰ است.



(۶) در شکل مقابل، اندازه ی مساحت مثلث ABC کدام است؟

(۲) ۲۷۰

(۱) ۲۴۰

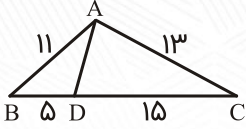
(۴) ۴۸۰

(۳) ۳۰۰



۷) در مثلث ABC، به اضلاع ۱۳، ۲۰ و ۲۱، نقطه‌ای درون مثلث از اضلاع به طول ۱۳ و ۲۱ به ترتیب به فاصله‌ی ۹ و ۵ است. فاصله‌ی این نقطه از ضلع به طول ۲۰ کدام است؟

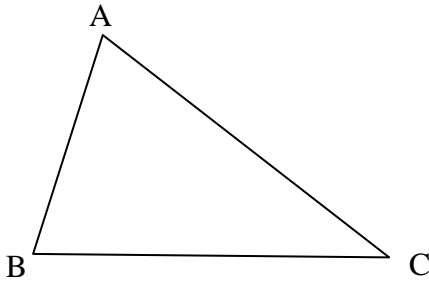
- ۱) ۱/۵ (۳) ۲) ۲ (۲) ۳) ۲/۵ (۳) ۴) ۳ (۴)



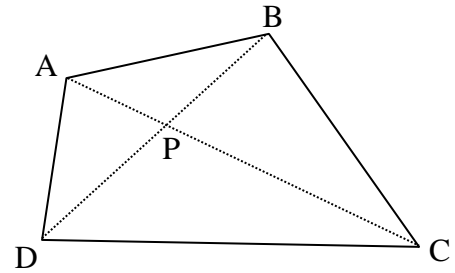
۸) با توجه به شکل مقابل، مساحت مثلث ABD کدام است؟

- ۱) ۱۶/۵ (۱) ۲) ۲۲ (۲) ۳) ۳۸/۵ (۳) ۴) ۴۴ (۴)

مساحت سینوسی:



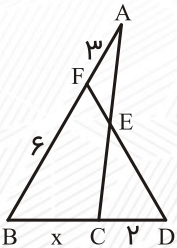
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$$



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin P$$

۱) اضلاع متوازی الاضلاعی به طول ۱۱ و ۱۲ واحد است. در صورتی که زاویه‌ی بین این دو ضلع 120° باشد، مساحت متوازی الاضلاع کدام است؟

- ۱) $22\sqrt{3}$ (۱) ۲) $66\sqrt{3}$ (۲) ۳) $22\sqrt{2}$ (۳) ۴) $66\sqrt{2}$ (۴)

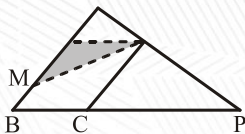


۲) در شکل مقابل، $S_{AEF} = S_{ECD}$ است. طول BC کدام است؟

- ۱) ۳ (۱) ۲) ۴ (۲) ۳) ۵ (۳) ۴) ۶ (۴)



۳) در شکل زیر، نقطه M وسط ضلع متوازی الاضلاع است. اگر $PC = \frac{2}{3}PB$ باشد، مساحت مثلث سایه زده چند

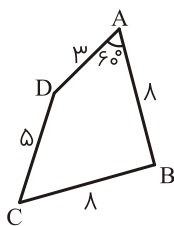


برابر مساحت بزرگترین مثلثها است؟

- (۱) $\frac{1}{12}$
(۲) $\frac{1}{9}$
(۳) $\frac{1}{8}$
(۴) $\frac{3}{16}$

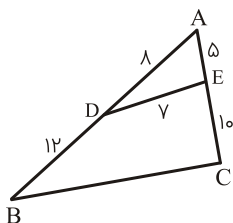
۴) در یک متوازی الاضلاع، طول ضلع کوچکتر برابر با ۲ و زاویه حاده بین اضلاع 60° است. اگر طول قطر کوچک متوازی الاضلاع $2\sqrt{3}$ باشد، مساحت متوازی الاضلاع کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{3}$
(۲) ۴
(۳) $6\sqrt{3}$
(۴) ۶



۵) مساحت چهار ضلعی ABCD کدام است؟

- (۱) $13\sqrt{2}$
(۲) $16\sqrt{3}$
(۳) $19\sqrt{3}$
(۴) $22\sqrt{3}$



۶) در شکل مقابل، مساحت چهار ضلعی DECB چند برابر $\sqrt{3}$ است؟

- (۱) ۵۵
(۲) ۶۰
(۳) ۶۵
(۴) ۷۰

۷) اگر $S_{\Delta ABC} = 10\sqrt{3}$ ، $AB = 5$ و $AC = 8$ باشند، محیط مثلث ABC چقدر است؟ (زاویه A حاده است.)

- (۱) ۲۰
(۲) ۲۲
(۳) ۲۴
(۴) ۲۶