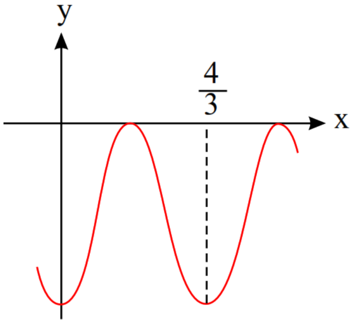
۱- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x)=-۲+a\cos\pi(۱+bx)$ است. در این صورت ab کدام می‌تواند باشد؟ $(a>۰)$



۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) ۳
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) ۵

۲- در بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع با ضابطه‌ی $f(x)=۲x+|۲x+۱|$ وارون‌پذیر است، ضابطه‌ی وارون آن کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\frac{x-۱}{۴};\ x\geq -۱$
۲) $f^{-1}(x)=\frac{x-۱}{۴};\ x\geq -\frac{۱}{۲}$
۳) $f^{-1}(x)=۴x+۱;\ x\geq -۱$
۴) $f^{-1}(x)=۴x+۱;\ x\geq -\frac{۱}{۲}$

۳- اگر دو خط $۳x-۴y=b$ و $bx+ay=-۱۶$ نسبت به خط $y=x$ قرینه یکدیگر باشند، مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ±۱۴
۲) ±۲
۳) ±۱۲
۴) ±۴

۴- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\sin x(\sin x+۱)+\cos x+\frac{\sin ۲x}{۲}=-\cos^۲ x$ در بازه‌ی $[۰,۳\pi]$، چند برابر π است؟

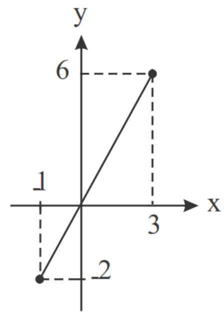
۱) ۵
۲) ۵/۲۵
۳) ۵/۵
۴) ۵/۷۵

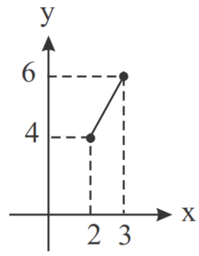
۵- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^۲}{|x|}(x-۱)$ در یک بازه، نزولی است. ضابطه‌ی معکوس آن در این بازه کدام است؟

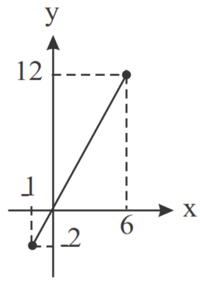
۱) $-\frac{۱}{۴}\leq x<۰$ و $f^{-1}(x)=\frac{۱}{۲}-\sqrt{x+\frac{۱}{۴}}$
۲) $-\frac{۱}{۴}\leq x<۰$ و $f^{-1}(x)=\frac{۱}{۲}+\sqrt{x+\frac{۱}{۴}}$
۳) $-\frac{۱}{۴}\leq x<۱$ و $f^{-1}(x)=\frac{۱}{۲}-\sqrt{x+\frac{۱}{۴}}$
۴) $-\frac{۱}{۴}\leq x<۱$ و $f^{-1}(x)=\frac{۱}{۲}+\sqrt{x+\frac{۱}{۴}}$

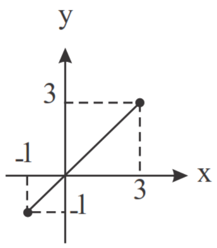
یادداشت‌نامه

۶- f تابعی خطی با دامنه $[-1,3]$ است که از دو نقطه $(-1,2)$ و $(1,4)$ می‌گذرد. نمودار تابع $g(x)=f(x)+f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۷- اگر f و g توابعی چندجمله‌ای باشند به‌طوری‌که $(f+g)(x)=4$ و $(fog)(x)=7-4x$، حاصل جمع مقادیر ممکن برای $g(2)$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) -3　　۴) -2

۸- اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ax^b+5x^2-x+1}{4x^2-3x-7}=2$، حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{b}{2}}\frac{x^a+x^b}{x^b-(a-1)x+1}$ کدام است؟

۱) $+\infty$　　۲) ۲　　۳) $-\infty$　　۴) $\frac{2}{3}$

۹- اختلاف حد چپ و راست تابع $g(x)=\frac{\sqrt{2}\sin\pi x}{\sqrt{1+\cos\pi x}}$ در نقطه‌ی $x=3$ چقدر است؟

۱) صفر　　۲) ۲　　۳) $2\sqrt{2}$　　۴) ۴

۱۰- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos^4 2x-16\sin^4 x\cos^4 x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ کدام است؟

۱) $x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{24}$　　۲) $x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{48}$

۳) $x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{12}$　　۴) $x=k\pi\pm\frac{\pi}{12}$

یادداشت‌نامه

۱۱- در کدام بازه‌ها، تابع $f(x)=\begin{cases} ۲(x+۳)^۳ & ;x<-۳ \\ -x^۲-۳x & ;-۳\leq x<۰ \\ \sqrt{x} & ;x\geq ۰ \end{cases}$، به‌ترتیب از راست به چپ صعودی و نزولی است؟

۱) $(-۲,-۱)\ ,\ (-۱,+\infty)$
۲) $[-۱,۱]\ ,\ (-۳,-۲)$
۳) $[-۱,۰]\ ,\ [-۴,-۲]$
۴) $\left[-\frac{۳}{۲},-۱\right],[-۲,-۱]$

۱۲- به‌ازای چه مقداری از a، تابع $f(x)=\begin{cases} |x+۱| & ;x\leq -۱ \\ -\frac{x}{۲}+a & ;-۱<x<۱ \\ -\sqrt{x-۱}-۱ & ;x\geq ۱ \end{cases}$ اکیداً نزولی خواهد بود؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) -۱
۴) $-\frac{۳}{۲}$

۱۳- اگر $f(x)=x^۲-۴x+۳$، $(fog)(x)=x^۲+۳x+\frac{۵}{۴}$ و $g(x)$ یک تابع خطی با شیب مثبت باشد، ضابطه تابع $g(f(x))$ کدام است؟

۱) $-x^۲+۴x+\frac{۱}{۲}$
۲) $-x^۲+۴x-\frac{۱۳}{۲}$
۳) $x^۲-۴x-\frac{۱}{۲}$
۴) $x^۲-۴x+\frac{۱۳}{۲}$

۱۴- اگر باقی‌مانده تقسیم عبارت $p(x)$ بر $x^۲+۳x+۲$، $۲x+۱$ باشد، باقی‌مانده تقسیم عبارت $p(x-۱)-p(x-۲)$ بر x کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۵- حدود m کدام باشد تا تابع $f=\{(۵,۶)\ ,\ (۳,m^۲-m)\ ,\ (-۴,۲)\ ,\ (۴,m^۲-m)\}$ یک تابع صعودی باشد؟

۱) $(-۲,۱)\cup(۲,۳)$
۲) $[-۲,۱]\cup[۲,۳]$
۳) $[-۲]-[-۱,۲]$
۴) $[-۲,۳]-(-۱,۲)$

یادداشت‌نامه ....

۱۶- اگر به‌ازای هر عدد حقیقی داشته باشیم: $(fog)^{-1}(2x-4)=\frac{x}{2}$ و $g(x)=2x^3+1$. آن‌گاه نمودار وارون تابع $f(x)$، محور yها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷- اگر $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+4}+2}{x^2+2ax+b}=+\infty$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{ax^3+2x+5}{bx^3+x^2+7}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) 3 ۳) -3 ۴) $\frac{1}{3}$

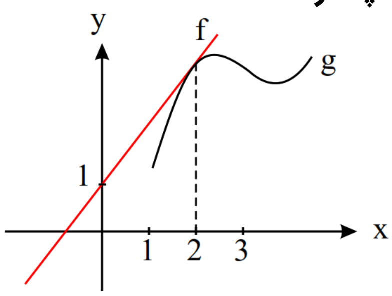
۱۸- تابع $f(x)=3+\sqrt{ax+b}$ با دامنه $[-2,+\infty)$ مفروض است. اگر نمودار این تابع، خط $2y-4x=10$ را در نقطه‌ای روی محور yها قطع کند، مقدار $f(a+b)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۷ ۴) ۶

۱۹- اگر $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{|3a|x^5-ax^n+7x^2-2}{4x^5+1}=1$ ، آن‌گاه مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۰- در شکل زیر اگر داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(2x)-f(2)}{x-1}=4$ ، آن‌گاه حاصل $f(1)+g'(2)$ چقدر است؟



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۲۱- ضابطه وارون تابع $y=2x-3|x-1|$ در بازه‌ای که صعودی است، کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\frac{x+3}{5};\ x<2$
۲) $f^{-1}(x)=\frac{x+3}{5};\ x\le 3$
۳) $f^{-1}(x)=x-3;\ x\ge 2$
۴) $f^{-1}(x)=x-3;\ x\ge 3$

یادداشت‌نامه

۲۲- تابع $f(x)=\begin{cases} x^3 & x \geq -1 \\ |(x-2)(x+3)^2| & x < -1 \end{cases}$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

۲۳- اگر $f(x)=(x^2+1)(x^4+1)$ و $g(x)=x^8-1$ مقدار $g'(1)f(1)-f'(1)g(1)$ کدام است؟

۱) ۴　　۲) ۸　　۳) ۱۶　　۴) ۳۲

۲۴- اگر $f(x)=\dfrac{3x+1}{2x+1}$ و $g(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{(2x+1)^2}$ باشد، مقدار $\dfrac{g'(x)f'(x)-g(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$ به‌ازای $x=9$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{6}$　　۲) $-\frac{5}{6}$　　۳) $\frac{7}{6}$　　۴) $-\frac{7}{6}$

۲۵- تابع $f(x)=\begin{cases} a-\log_{\frac{1}{3}}^{x} & ,x \geq 3 \\ 2x+1 & ,x < 3 \end{cases}$ به‌ازای چه حدودی از a، همواره در شرط $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ صدق می‌کند؟

۱) $a \leq 6$　　۲) $a \geq 6$　　۳) هیچ مقدار a　　۴) فقط $a=6$

۲۶- تابع $f(x)=|x(x^2+3x+3)+2|$ در بازه $[a,+\infty)$ صعودی اکید است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) -1　　۲) -2　　۳) $-\sqrt[3]{2}$　　۴) $-1-\sqrt[3]{2}$

۲۷- اگر تابع $f(x)=5\sin 3(\frac{\pi}{2}x-c)$ به‌ازای $x=\frac{1}{2}$ ماکسیمم شود، طول نقطه مینیمم آن، کدام می‌تواند باشد؟ (c، عدد ثابت است.)

۱) $\frac{-5}{6}$　　۲) $\frac{7}{6}$　　۳) $\frac{11}{6}$　　۴) $\frac{4}{3}$

۲۸- اگر $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x+1}$، حاصل $f''(1)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$　　۲) $\frac{3}{2}$　　۳) $-\frac{1}{2}$　　۴) ۱

۲۹- در مورد تابع $f(x)=\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{2-x}}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) $f'(0)=0$　　۲) $f'(0)=+\infty$　　۳) $f'_+(0)=+\infty$　　۴) $f'_+(0)=-\infty$

یادداشت‌نامه

۳۰- تابع $f(x)=\frac{3x^2+ax+b}{2x^2+cx+d}$، یک تابع ثابت با ضابطه $y=k$ و دامنه $\mathbb{R}-\{-3\}$ است. حاصل $\frac{a-b+c-d}{k}$ کدام است؟

۱) -10 ۲) 10 ۳) 5 ۴) -5

یادداشت‌نامه

پاسخنامه تشریحی

۱- گزینه ۲

می‌دانیم $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ است.

$$f(x)=-۲+\alpha\cos(\pi+\pi bx)\to f(x)=-۲-\alpha\cos(b\pi x)$$

داریم: $-۱\le\cos(\pi bx)\le ۱\xrightarrow{a>۰}-\alpha\le\alpha\cos(\pi bx)\le\alpha$

$$\xrightarrow{\text{منفی ضرب می‌کنیم}}-\alpha\le-\alpha\cos(\pi bx)\le\alpha\to-۲-\alpha\le-۲-\alpha\cos(\pi bx)\le-۲+\alpha$$

بیشترین مقدار تابع از روی شکل برابر صفر است یعنی $-۲+\alpha=۰$ است $\alpha=۲$ یعنی می‌باشد پس $f(x)=-۲-۲\cos(\pi bx)$ است.

با توجه به نمودار داده شده دوره‌ی تناوب تابع برابر $T=\frac{۴}{۳}$ است و می‌دانیم دوره‌ی تناوب تابع $y=\alpha\cos bx$ به صورت $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

$$\frac{۴}{۳}=\frac{۲\pi}{|\pi b|}\to\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{|b|}\to|b|=\frac{۳}{۲}\to b=\pm\frac{۳}{۲}$$

بنابراین $a\times b=\pm۳$ است.

۲- گزینه ۱

ابتدا عبارت داخل قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x\ge-\frac{۱}{۲}:y=۲x+۲x+۱\to y=۴x+۱$$

$x<-\frac{۱}{۲}:y=۲x-۲x-۱\to y=-۱$. تابع ثابت است که یک به یک نمی‌باشد.

بنابراین بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن وارون‌پذیر است $x\ge-\frac{۱}{۲}$ است. برای پیداکردن ضابطه‌ی وارون، x را برحسب y بدست می‌آوریم و سپس y را به x و x را به y تبدیل می‌کنیم.

$$y=۴x+۱\to y=۴x-۱\to x=\frac{y-۱}{۴}\to f^{-۱}(x)=\frac{x-۱}{۴}$$

توجه کنید که دامنه ي تابع معکوس برابر برد تابع اصلی است.

$$x\ge-\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\times۴}۴x\ge-۲\to۴x+۱\ge-۱\to y\ge-۱\to R_f=D_{f^{-۱}}=[-۱,+\infty)$$

۳- گزینه ۱

چون دو خط $۳x-۴y=b$ و $bx+ay=-۱۶$ نسبت به خط $y=x$ قرینه‌ی یکدیگر هستند پس می‌توان نتیجه گرفت که این دو خط تابع معکوس یکدیگر هستند پس داریم:

$$۳x-۴y=b\Rightarrow۳x=۴y+b\Rightarrow x=\frac{۴}{۳}y+\frac{b}{۳}\Rightarrow y=\frac{۴}{۳}x+\frac{b}{۳}\qquad(۱)$$

$$bx+ay=-۱۶\Rightarrow ay=-bx-۱۶\Rightarrow y=-\frac{b}{a}x-\frac{۱۶}{a}\qquad(۲)$$

روابط (۱) و (۲) باید یکسان باشند پس داریم:

$$-\frac{b}{a}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow b=-\frac{۴}{۳}a$$

$$-\frac{16}{a}=\frac{b}{3}\Rightarrow ab=-48\Rightarrow a(-\frac{4}{3}a)=-48\Rightarrow -\frac{4}{3}a^2=-48$$

$$\Rightarrow a^2=36\Rightarrow a=\pm 6$$

$$a=6\Rightarrow b=-\frac{4}{3}a=-\frac{4}{3}\times 6=-8\Rightarrow b-a=-14$$

$$a=-6\Rightarrow b=-\frac{4}{3}(-6)=8\Rightarrow b-a=14$$

چون دو خط داده شده نسبت به خط $y=x$ قرینه‌ی یکدیگرند پس این دو تابع، معکوس یکدیگرند بنابراین کافی است معکوس یکی از آن دو را به دست آورده و مساوی دیگری قرار دهیم و می‌دانیم برای به دست آوردن تابع معکوس، x را برحسب y به دست آورده و سپس جای y, x را عوض می‌کنیم.

۴- گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\sin 2a = 2\sin a\cos a}$

$$\sin x(\sin x+1)+\cos x+\frac{\sin 2x}{2}=-\cos^2 x$$

$$\sin^2 x+\sin x+\cos x+\frac{2\sin x\cos x}{2}+\cos^2 x=0$$

$$\to \underbrace{\sin^2 x}+\sin x+\cos x+\sin x\cos x+\underbrace{\cos^2 x}=0$$

$$\to 1+\sin x+\underbrace{\cos x}+\underbrace{\sin x\cos x}=0\to \underbrace{1+\sin x}+\cos x\underbrace{(1+\sin x)}=0$$

$$\to (1+\sin x)(1+\cos x)=0\to \begin{cases}\sin x=-1\xrightarrow{x\in[0,3\pi]}x=\frac{3\pi}{2}\\ \cos x=-1\xrightarrow{x\in[0,3\pi]}x=\pi,3\pi\end{cases}$$

مجموع ریشه‌ها در بازه‌ی خواسته شده $=\frac{3\pi}{2}+\pi+3\pi=\frac{11\pi}{2}=5/5\pi$

۵- گزینه ۱

$$x>0\to f(x)=\frac{x^2}{x}(x-1)=x^2-x\xrightarrow[y'\le 0\ \text{باشد.}]{\text{برای نزولی‌بودن باید}}2x-1\le 0$$

$$\to x\le\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}}0<x\le\frac{1}{2}$$

$$x<0\to f(x)=\frac{x^2}{-x}(x-1)=x^2+x\xrightarrow[y'\le 0\ \text{باشد.}]{\text{برای نزولی‌بودن باید}}-2x+1\le 0$$

$$\to x\ge\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}}\varnothing$$

بنابراین تابع $y=x^2-x$ در بازه‌ی $(0,\frac{1}{2}]$ نزولی است. برای یافتن ضابطه‌ی معکوس یک تابع کافی است x را برحسب y به دست آوریم و سپس y را به x و x را به y تبدیل کنیم.

$$y=x^2-x\to y=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\to (x-\frac{1}{2})^2=y+\frac{1}{4}\to x-\frac{1}{2}=\pm\sqrt{y+\frac{1}{4}}$$

$$\xrightarrow{0<x\le\frac{1}{2}}x-\frac{1}{2}=-\sqrt{y+\frac{1}{4}}\to x=\frac{1}{2}-\sqrt{y+\frac{1}{4}}\to f^{-1}(x)=\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}$$

توجه کنید دامنه‌ی تابع معکوس برابر برد تابع اصلی است.

$$0<x\le\frac{1}{2}\to\frac{-1}{2}<x-\frac{1}{2}\le 0\xrightarrow{\text{توان ۲}}0\le(x-\frac{1}{2})^2<\frac{1}{4}\to\frac{-1}{4}\le(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}<0$$

$$\to \frac{-1}{4} \le y < 0 \to R_f = D_{f^{-1}} = [\frac{-1}{4}, 0)$$

۶- گزینه ۲

ابتدا معادله خط گذرنده از نقاط $(-1,2)$ و $(1,4)$ را به دست می‌آوریم:

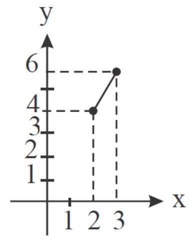
$$\frac{y-4}{x-1} = \frac{4-2}{1+1} = 1 \to y-4 = x-1 \to y = x+3$$

حال برد تابع را تعیین می‌کنیم.

$$-1 \le x \le +3 \xrightarrow{+3} 2 \le x+3 \le 6 \Rightarrow 2 \le f(x) \le 6 \Rightarrow R_f = [2,6]$$

تابع معکوس تابع را به دست می‌آوریم:

$$y = x+3 \Rightarrow x = y-3 \Rightarrow f^{-1}(x) = x-3 \ , \ D_{f^{-1}} = R_f = [2,6]$$
$$g(x) = f(x) + f^{-1}(x) \Rightarrow D_g = D_{f+f^{-1}} = D_f \cap D_{f^{-1}} = [-1,3] \cap [2,6] = [2,3]$$
$$g(x) = x+3+x-3 = 2x \ , \ D_g = [2,3 \Rightarrow]$$



۷- گزینه ۱

چون fog از درجه‌ی اول است، پس f و g توابعی از درجه‌ی اول هستند. اگر فرض کنیم $f(x) = ax+b$ خواهیم داشت:

$$f(x) + g(x) = 4 \Rightarrow g(x) = 4 - ax - b$$
$$f(g(x)) = 7 - 4x \Rightarrow ag(x) + b = 7 - 4x \Rightarrow a(4 - ax - b) + b = 7 - 4x$$
$$\Rightarrow -a^2x + 4a - ab + b = 7 - 4x \Rightarrow \begin{cases} -a^2 = -4 \Rightarrow a \pm 2 \\ 4a - ab + b = 7 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \left.\begin{cases} a = 2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow g(x) = -2x + 3 \Rightarrow g(2) = -1 \\ a = -2 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow g(x) = 2x - 1 \Rightarrow g(2) = 3 \end{cases}\right\} \xrightarrow{\text{جمع}} 2$$

۸- گزینه ۱

چون حاصل حد برابر عدد حقیقی غیرصفر است، پس از قاعده‌ی پرتوان نتیجه می‌گیریم که درجه‌ی صورت و مخرج با هم برابر است. چون مخرج درجه‌ی دو است، پس باید صورت هم درجه‌ی دو باشد، بنابراین $0 \le b \le 2$.
از طرفی حاصل حد برابر ۲ است، پس باید نسبت ضریب x^2 صورت به ضریب x^2 مخرج برابر ۲ باشد. با توجه به اینکه $2 \ne \frac{5}{4}$، نتیجه می‌گیریم $b = 2$. در این صورت با استفاده از قاعده‌ی پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^2 + 5x^2}{4x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(a+5)x^2}{4x^2} = \frac{a+5}{4} \to \frac{a+5}{4} = 2 \Rightarrow a+5 = 8 \Rightarrow a = 3$$

با جایگذاری این دو مقدار در حد خواسته شده خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\frac{b}{2}} \frac{x^a + x^b}{x^b - (a-1)x + 1} = \lim_{x\to1} \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x\to1} \frac{x^3 + x^2}{(x-1)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

۹- گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{1+\cos u = 2\cos^2\frac{u}{2}, \sin u = 2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}$

ابتدا تابع داده شده را ساده می‌کنیم:

$$g(x)=\frac{\sqrt{2}\sin\pi x}{\sqrt{1+\cos\pi x}}=\frac{\sqrt{2}\sin\pi x}{\sqrt{2\cos^2\frac{\pi x}{2}}}=\frac{\sqrt{2}\sin\pi x}{\sqrt{2}\,|\cos\frac{\pi x}{2}|}=\frac{2\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}{|\cos\frac{\pi x}{2}|}$$

اکنون حد راست و حد چپ تابع را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{2\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}{\underbrace{|\cos\frac{\pi x}{2}|}_{+}}=\lim_{x\to 3^+}\frac{2\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 3^+}2\sin\frac{\pi x}{2}=2\sin\frac{3\pi}{2}=-2$$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}{\underbrace{|\cos\frac{\pi x}{2}|}_{-}}=\lim_{x\to 3^-}\frac{2\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}{-\cos\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 3^-}-2\sin\frac{\pi x}{2}=-2\sin\frac{3\pi}{2}=2$$

بنابراین اختلاف حد چپ و راست تابع برابر ۴ است.

۱۰- گزینه ۱

می‌دانیم: $\boxed{\sin 2a = 2\sin a\cos a, \cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a}$

ابتدا سمت چپ معادله را ساده می‌کنیم:

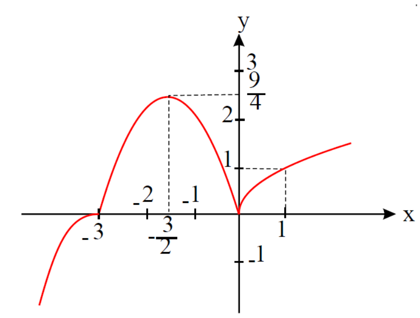
$$\cos^4 2x-16\sin^4 x\cos^4 2x-(2\sin x\cos x)^4=\cos^4 2x-\sin^4 2x$$
$$=\underbrace{(\cos^2 2x-\sin^2 2x)}_{\cos 4x}\underbrace{(\cos^2 2x+\sin^2 2x)}_{1}=\cos 4x$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$\cos 4x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \cos 4x=\cos\frac{\pi}{6}\xrightarrow{x=2k\pi\pm a}4x=2k\pi\pm\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{24}$$

۱۱- گزینه ۳

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم، توجه کنید سهمی $y=-x^2-3x$ دارای رأس به مختصات $S\left|\begin{array}{l}-\frac{b}{2a}=-\frac{3}{2}\\ \frac{4ac-b^2}{4}=\frac{9}{4}\end{array}\right.$ است که محور طول‌ها را در ۰ و ۳- قطع می‌کند.



تابع در بازه‌ی $(-\infty,-\frac{3}{2}]$ صعودی، در بازه‌ی $[-\frac{3}{2},0]$ نزولی و در بازه‌ی $[0,+\infty)$ صعودی است.

$$[-4,-2]\subset(-\infty,-\frac{3}{2}]\Rightarrow[-4,-2]\Rightarrow \text{نزولی}$$

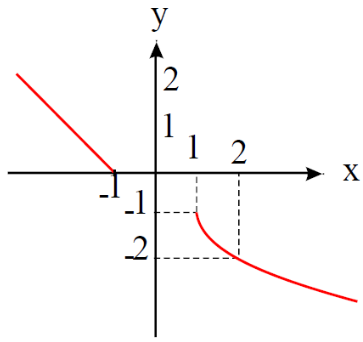
$$[-1,0]\subset[-\frac{3}{2},0]\Rightarrow[-1,0]\Rightarrow \text{صعودی}$$

۱۲- گزینه ۲

$$f(x)=\begin{cases}|x+۱| & ;x\le -۱\\ -\frac{x}{۲}+a & ;-۱<x<۱ \Rightarrow A\begin{vmatrix}x=-۱\\ y=\frac{۱}{۲}+a\end{vmatrix}\ B\begin{vmatrix}x=۱\\ y=-\frac{۱}{۲}+a\end{vmatrix}\\ -\sqrt{x-۱}-۱ & ;x\ge ۱\end{cases}$$

با توجه به نمودار زیر تابع f زمانی نزولی است که عرض نقطه‌ی $A(-۱,\frac{۱}{۲}+a)$ کوچکتر یا مساوی صفر و عرض نقطه‌ی $B(۱,-\frac{۱}{۲}+a)$ بزرگتر یا مساوی ۱- باشد، پس داریم:

$$\left.\begin{matrix}\frac{۱}{۲}+a\le ۰\Rightarrow a\le -\frac{۱}{۲}\\ -\frac{۱}{۲}+a\ge -۱\Rightarrow a\ge -\frac{۱}{۲}\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{اشتراک}} a=-\frac{۱}{۲}$$



۱۳- گزینه ۴

$$f(x)=x^۲-۴x+۳\to f(g(x))=g^۲(x)-۴g(x)+۳$$

$$fog(x)=x^۲+۳x+\frac{۵}{۴}\to f(g(x))=x^۲+۳x+\frac{۵}{۴}$$

پس: $g^۲(x)-۴g(x)+۳=x^۲+۳x+\frac{۵}{۴}\to (g(x)-۲)^۲-۴+۳=(x+\frac{۳}{۲})^۲-\frac{۹}{۴}+\frac{۵}{۴}$

$$\to (g(x)-۲)^۲-۱=(x+\frac{۳}{۲})^۲-۱\to (g(x)-۲)^۲=(x+\frac{۳}{۲})^۲$$

$\to \begin{cases}g(x)-۲=x+\frac{۳}{۲}\to g(x)=x+\frac{۷}{۲}\to & \text{.شیب خط مثبت است}\\ g(x)-۲=-x-\frac{۳}{۲}\to g(x)=-x+\frac{۱}{۲}\to & \text{.شیب خط منفی است}\end{cases}$

$$g(f(x))=g(f(x))=x^۲-۴x+۳+\frac{۷}{۲}=x^۲-۴x+\frac{۱۳}{۲}$$

۱۴- گزینه ۲

با نوشتن رابطه‌ی تقسیم داریم:

$$p(x)=(x^۲+۳x+۲)q(x)+۲x+۱=(x-۱)(x+۲)q(x)+۲x۱ \qquad (۱)$$

حال برای یافتن باقی‌مانده‌ی تقسیم $p(x-۱)-p(x-۲)$ بر x داریم:

$x=۰\Rightarrow$ باقی‌مانده‌ی $=p(۰-۱)-p(۰-۲)=p(-۱)-p(-۲)$

$(۱)\Rightarrow p(-۱)=۰+۲(-۱)+۱=-۱,\qquad p(-۲)=۰+۲(-۲)+۱=-۳$

باقی‌مانده‌ی $=p(-۱)-p(-۲)=-۱-(-۳)=۲$

۱۵- گزینه ۴

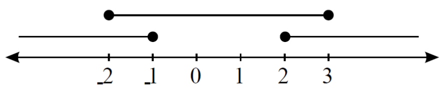
ابتدا x ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$f:\{(-۴,۲),(۳,m^۲-m),(۴,m^۲-m),(۵,۶)\}$$

می‌دانیم در تابع صعودی اگر $x_۱ < x_۲$ باشد آن‌گاه $f(x_۱) \le f(x_۲)$ است پس:

$$۲ \le m^۲ - m \le ۶ \to \begin{cases} m^۲ - m \ge ۲ \to m^۲ - m - ۲ \ge ۰ \to (m-۲)(m+۱) \ge ۰ \\ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m \le -۱ \text{ یا } m \ge ۲ \quad (I) \\ m^۲ - m \le ۶ \to m^۲ - m - ۶ \le ۰ \to (m-۳)(m+۲) \le ۰ \\ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۲ \le m \le ۳ \quad (II) \end{cases}$$

از اشتراک جواب‌های (I) و (II) داریم:



$$\to m \in [-۲,۳]-(-۱,۲)$$

۱۶- گزینه ۳

می‌دانیم که $(fog)^{-۱} = g^{-۱}of^{-۱}$ است.

$$(fog)^{-۱}(۲x-۴) = \frac{x}{۲} \to (g^{-۱}of^{-۱})(۲x-۴) = \frac{x}{۲} \to g^{-۱}(f^{-۱}(۲x-۴)) = \frac{x}{۲} \qquad \bigstar$$

محل برخورد نمودار وارون تابع $f(x)$ با محور y ها همان $f^{-۱}(۰)$ است بنابراین در رابطه‌ی $\bigstar$، x را ۲ قرار می‌دهیم تا $f^{-۱}(۰)$ درست شود.

$$x = ۲ \xrightarrow{\bigstar} g^{-۱}(f^{-۱}(۰)) = ۱ \to g(۱) = f^{-۱}(۰) \to ۲(۱)^۳ + ۱ = f^{-۱}(۰) \to f^{-۱}(۰) = ۳$$

۱۷- گزینه ۴

$$\lim_{x \to -۳} \frac{\sqrt{x+۴}+۲}{x^۲+۲ax+b} = +\infty$$

حد صورت برابر ۳ است و چون حاصل حد $+\infty$ می‌باشد، پس باید $x = -۳$ ریشه‌ی مضاعف مخرج باشد و با توجه به اینکه ضریب $x^۲$ در مخرج برابر یک است، یعنی مخرج همان عبارت $(x+۳)^۲$ می‌باشد.

$$x^۲ + ۲ax + b = (x+۳)^۲ = x^۲ + ۶x + ۹$$

$$۲a = ۶ \Rightarrow a = ۳, b = ۹$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax^۳ + ۲x + ۵}{bx^۳ + x^۲ + ۷} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{۳x^۳}{۹x^۳} = \frac{۱}{۳}$$

۱۸- گزینه ۳

زیر رادیکال باید بزرگ‌تر مساوی صفر باشد.

$$ax + b \ge ۰ \to ax \ge -b \xrightarrow[a>۰]{D_f: x \ge -۲} x \ge -\frac{b}{a} \to \frac{-b}{a} = -۲ \to ۲a = b \to f(x) = ۳ + \sqrt{ax+۲a}$$

محل تلاقی نمودار تابع و خط $۲y - ۴x = ۱۰$ روی محور عرض است پس $x = ۰$ است.

$$x = ۰ \xrightarrow{۲y-۴x=۱۰} ۲y = ۱۰ \to y = ۵ \to \Big| \begin{matrix} ۰ \\ ۵ \end{matrix}$$

$$\Big| \begin{matrix} ۰ \\ ۵ \end{matrix} \xrightarrow{f(x) = ۳ + \sqrt{ax+۲a}} ۵ = ۳ + \sqrt{۲a} \to ۲ = \sqrt{۲a} \to ۲a |= ۴| \to a = ۲, b = ۴$$

پس: $f(a+b) = f(۶) = ۳ + \sqrt{۱۲+۴} = ۷$

۱۹- گزینه ۲

چون جواب حد، عددی غیرصفر شده است پس بزرگ‌ترین توان x صورت و مخرج باید باهم برابر باشند.

حالت اول: وقتی $n<۵$ است.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|۳a|x^۵}{۴x^۵}=\frac{|۳a|}{۴}=۱\to|۳a|=۴\to ۳a=\pm۴\to a=\pm\frac{۴}{۳}$$

حالت دوم: وقتی $n=۵$ است.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|۳a|x^۵-ax^۵}{۴x^۵}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(|۳a|-a)x^۵}{۴x^۵}=\frac{|۳a|-a}{۴}=۱$$

$$\to|۳a|-a=۴\to\begin{cases}a\ge ۰\to ۳a-a=۴\to ۲a=۴\to a=۲ \text{ ق ق}\\ a<۰\to -۳a-a=۴\to -۴a=۴\to a=-۱ \text{ ق ق}\end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای a برابر $۱=۱-۲+\frac{۴}{۳}-\frac{۴}{۳}$ است.

۲۰- گزینه ۲

تابع f یک تابع خطی است و می‌توان آن را به صورت $f(x)=ax+b$ نشان داد.

$$f(x)=ax+b\to\begin{cases}f(۲x)=۲ax+b\\ f(۲)=۲a+b\end{cases}$$

$$\lim_{x\to۱}\frac{f(۲x)-f(۲)}{x-۱}=\lim_{x\to۱}\frac{۲ax+b-۲a-b}{x-۱}=\lim_{x\to۱}\frac{۲a(x-۱)}{(x-۱)}=۲a=۴\to a=۲$$

دقت کنید چون تابع f از نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}۰\\۱\end{matrix}\right.$ می گذرد بنابراین معادله‌ی آن به صورت $f(x)=۲x+۱$ است پس $f(۱)=۳$ است

و چون دو تابع f و g در $x=۲$ برهم مماس هستند پس $f'(۲)=g'(۲)$ است و از طرفی $f'(x)=۲$ پس $f'(۲)=۲$ است

در نتیجه $f(۱)+g'(۲)=۳+۲=۵$ است.

۲۱- گزینه ۱

در ابتدا شرط گذاشته و قدرمطلق را از بین می‌بریم.

$x\ge۱\to y=۲x-۳(x-۱)\to y=-x+۳\to m=-۱\to$ نزولی

$x<۱\to y=۲x-۳(-x+۱)\to y=۵x-۳\to m=۵\to$ صعودی

برای پیدا کردن ضابطه‌ی تابع معکوس، x را برحسب y بدست می‌آوریم سپس x را به y و y را به x تبدیل می‌کنیم.

$$y=۵x-۳\to ۵x=y+۳\to x=\frac{y+۳}{۵}\to f^{-۱}(x)=\frac{x+۳}{۵}$$

توجه کنید که دامنه‌ی تابع معکوس، برد تابع اصلی است پس باید برد تابع $y=۵x-۳$ را با شرط $x<۱$ بدست آوریم.

$$x<۱\to ۵x<۵\to ۵x-۳<۲\to y<۲$$

پس دامنه‌ی تابع معکوس، $x<۲$ است.

۲۲- گزینه ۲

در توابع چندضابطه‌ای باید مشتق‌پذیری‌های تک تک ضابطه‌ها را بررسی کرده و مشتق‌پذیری نقطه‌ی مرزی را هم بررسی کنیم.

در مورد ضابطه‌ی بالایی واضح است که در دامنه‌اش در همه‌جا مشتق‌پذیر است. اما درمورد ضابطه‌ی پایینی، می‌دانیم که توابع قدرمطلقی در ریشه‌های ساده‌ی داخل قدرمطلق، مشتق‌ناپذیرند. پس:

$$y_2 = |\underbrace{(x-2)}_{x=2}\underbrace{(x+3)^2}_{x=-3}|$$

ریشه‌ی ساده ریشه‌ی مضاعف

لذا این تابع فقط یک ریشه‌ی ساده‌ی $x=2$ دارد که آن هم جزء دامنه‌ی این ضابطه $(x<-1)$ نیست. پس این ضابطه هم هیچ نقطه‌ی مشتق‌ناپذیری ندارد. نهایتاً می‌رسیم به بررسی نقطه‌ی مرزی یعنی $x=-1$، ابتدا پیوستگی را در این نقطه بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(-1)=\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+} x^3=(-1)^3=-1 \\ \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-} |(x-2)(x+3)^2|=|(-1-2)(-1+3)^2|=12 \end{cases}$$

پس تابع در این نقطه پیوسته نیست و قطعاً مشتق‌ناپذیر است. لذا تابع فقط در یک نقطه مشتق‌ناپذیر است.

۲۳- گزینه ۴

از عبارت $g'(x)f(x)-f'(x)g(x)$ باید متوجه شویم که این عبارت، صورت کسر مشتق $\frac{g(x)}{f(x)}$ است زیرا:

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)'=\frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{(g(x))^2}$$

پس عبارت $g(x)$ را بر $f(x)$ تقسیم می‌کنیم؛ داریم:

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^8-1}{(x^2+1)(x^4+1)}=\frac{(x^4+1)(x^4-1)}{(x^2+1)(x^4+1)}=\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{(x^2+1)}=x^2-1$$

حال از دو طرف مشتق می‌گیریم:

$$\frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{(f(x))^2}=2x$$

و در نهایت x را مساوی یک قرار می‌دهیم:

$$\frac{g'(1)f(1)-f'(1)g(1)}{(f(1))^2}=2 \xrightarrow{f(1)=4} g'(1)f(1)-f'(1)g(1)=2\times 4^2=32$$

۲۴- گزینه ۳

با توجه به مشتق کسر داریم:

$$\left(\frac{g(x)}{f'(x)}\right)'=\frac{g'(x)f'(x)-g(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

حال $\frac{g(x)}{f'(x)}$ را تشکیل می‌دهیم:

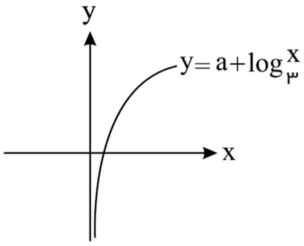
$$f(x)=\frac{3x+1}{2x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{3(2x+1)-2(3x+1)}{(2x+1)^2}=\frac{1}{(2x+1)^2}$$

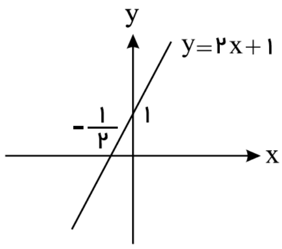
$$y=\frac{g(x)}{f'(x)}=\frac{\frac{x+\sqrt{x}}{(۲x+۱)^۲}}{\frac{۱}{(۲x+۱)^۲}}=x+\sqrt{x}\Rightarrow y'=۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow y'(۹)=۱+\frac{۱}{۶}-\frac{۷}{۶}$$

۲۵- گزینه ۲

ابتدا شکل کلی از نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}a-\log_{\frac{۱}{۳}}^{x} & ,x\ge ۳\\ ۲x+۱ & ,x<۳\end{cases}$ را رسم می‌کنیم:

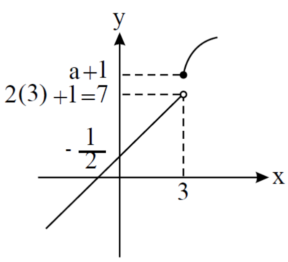
$$y=a-\log_{\frac{۱}{۳}}^{x}=a-\log_{۳^{-۱}}^{x}=a+\log_{۳}^{x}$$





حال هردو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

شرط $x_۲>x_۱\Rightarrow f(x_۲)\ge f(x_۱)$ به معنی صعودی بودن $f(x)$ است، برای صعودی بودن باید داشته باشیم:



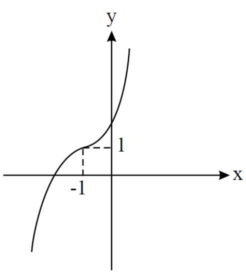
$$\rightarrow ۷\le a+۱\Rightarrow ۶\le a$$

۲۶- گزینه ۲

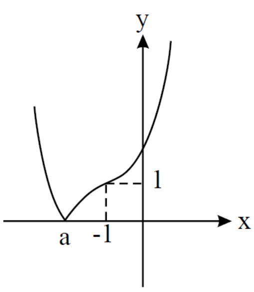
ابتدا ضابطه‌ی f را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x)=|x^۳+۳x^۲+۳x+۱+۱|=|(x+۱)^۳+۱|$$

نمودار تابع $y=(x+۱)^۳+۱$ را به کمک انتقال تابع $y=x^۳$ رسم می‌کنیم:



برای رسم نمودار f، کافیست قسمتی از نمودار را که زیر محور x هاست، نسبت به محور x ها قرینه کنیم و آن قسمت از نمودار را که بالای محور x هاست حفظ کنیم:



برای به دست آوردن a باید معادله‌ی $f(x)=۰$ را حل کنیم:

$$(x+۱)^۳+۱=۰\rightarrow (x+۱)^۳-۱=\rightarrow x+۱=-۱\rightarrow x=-۲$$

پس تابع f در بازه‌ی $[-۲,+\infty)$ صعودی اکید است و حداقل مقدار a برابربا ۲- است.

۲۷- گزینه ۲

دوره‌ی تناوب تابع $f(x)=a\sin bx+c$ برابر $\frac{۲\pi}{|a|}$ است.

$$f(x)=۵\sin ۳(\frac{\pi}{۲}x-c)=۵\sin(\frac{۳\pi}{۲}x-۳c)\to T=\frac{۲\pi}{\left|\frac{۳\pi}{۲}\right|}=\frac{۴}{۳}$$

فاصله‌ی طولی نقاط ماکسیمم و مینیمم متوالی برابر $\frac{T}{۲}$ است پس اگر از $x=\frac{۱}{۲}$ به اندازه‌ی $\frac{T}{۲}$ به سمت راست یا چپ برویم به نقطه‌ی مینیمم می‌رسیم.

$$x_{Min}=x_{Max}+\frac{T}{۲}=\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۳}=\frac{۷}{۶}$$

۲۸- گزینه ۲

ابتدا ضابطه‌ی $f(x)$ را ساده می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} x^۳+x & x+۱ \\ \hline -x^۳-x^۲ & x^۲-x+۲ \\ \hline -x^۲+x & \\ x^۲+x & \\ \hline ۲x & \\ -۲x-۲ & \\ \hline -۲ & \end{array}$$

$$\to f(x)=x^۲-x+۲-\frac{۲}{x+۱}=x^۲-x+۲-۲(x+۱)^{-۱}$$

مشتق اول تابع به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Rightarrow f'(x)=۲x-۱-۲(-۱)(x+۱)^{-۲}=۲x-۱+۲(x+۱)^{-۲}$$

مشتق دوم تابع، با مشتق‌گیری از f' به‌دست می‌آید.

$$\Rightarrow f''(x)=۲+۲(-۲)(x+۱)^{-۳}=۲-۴(x+۱)^{-۳}=۲-\frac{۴}{(x+۱)^۳}$$

با جایگذاری $x=۱$ در عبارت بالا، داریم:

$$f''(۱)=۲-\frac{۴}{۸}=۲-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

۲۹- گزینه ۳

ابتدا دامنه‌ی تابع را می‌یابیم.

$$۲-x\ge ۰\Rightarrow x\le ۲\qquad (۱)$$
$$\sqrt{۲}-\sqrt{۲-x}\ge ۰\Rightarrow \sqrt{۲}\ge\sqrt{۲-x}\Rightarrow ۲\ge ۲-x\Rightarrow x\ge ۰\qquad (۲)$$
$$(۱)\cap(۲): ۰\le x\le ۲\Rightarrow D_f=[۰,۲]$$

با توجه به دامنه، تنها مشتق راست در نقطه‌ی $x=۰$ قابل محاسبه است.

$$f'_+=\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{\sqrt{۲}-\sqrt{۲-x}}-۰}{x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{\sqrt{۲}-\sqrt{۲-x}}}{x}\times\frac{\sqrt{\sqrt{۲}+\sqrt{۲-x}}}{\sqrt{\sqrt{۲}+\sqrt{۲-x}}}$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{۲}-۲+x}{\sqrt[x]{\sqrt{۲}+\sqrt{۲-x}}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[x]{\sqrt{۲}+\sqrt{۲-x}}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{\sqrt{\sqrt{۲}+\sqrt{۲-x}}}$$

$$=\frac{۱}{۰^+\times\sqrt{۲\sqrt{۲}}}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

۳۰- گزینه ۱

دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}-\{-۳\}$ است پس $x=-۳$ تنها ریشه‌ی مخرج است و چون مخرج درجه‌ی دوم است پس حتماً مخرج به‌صورت $۲(x+۳)^۲$ است.

$$۲(x+۳)^۲=۲x^۲+۱۲x+۱۸=۲x^۲+cx+d\to c=۱۲, d=۱۸$$

دقت کنید که تابع $f(x)=\dfrac{۳x^۲+ax+b}{۲x^۲+۱۲x+۱۸}$ قرار است یک تابع ثابت شود برای این منظور صورت کسر باید به صورت ضریبی از مخرج درآید. با مقایسه‌ی جملات اول صورت و مخرج، مشخص می‌شود که صورت قرار است $\frac{۳}{۲}$ برابر مخرج باشد پس این نسبت در بقیه‌ی جملات صورت و مخرج نیز برقرار است یعنی:

$$\begin{cases}a=\frac{۳}{۲}(۱۲)=۱۸\\ b=\frac{۳}{۲}(۱۸)=۲۷\end{cases}$$

پس: $f(x)=\dfrac{۳x^۲+۱۸x+۲۷}{۲x^۲+۱۲x+۱۸}=\dfrac{\frac{۳}{۲}(۲x^۲+۱۲x+۱۸)}{۲x^۲+۱۲x+۱۸}=\dfrac{۳}{۲}=k$

در نتیجه: $\dfrac{a-b+c-d}{k}=\dfrac{۱۸-۲۷+۱۲-۱۸}{\frac{۳}{۲}}=\dfrac{-۱۵}{\frac{۳}{۲}}=-۱۰$