۱- به‌ازای کدام مقدار b، رابطه‌ی $f=\{(1,3),(2,4),(1,b^2-1),(b,6),(3,1)\}$ تابع است؟

۱) ± 2 ۲) فقط ۲ ۳) فقط ۲− ۴) هیچ مقدار b

۲- اگر $f(x)=3x-1$ و $f(g(x))=x^2-x-1$ باشد، مقدار $g(3)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳- ضابطه‌ی وارون تابع $y=2x-x^2$ برای $x<1$ چگونه است؟

۱) $f^{-1}(x)=1-\sqrt{1-x}$ ۲) $f^{-1}(x)=1+\sqrt{1-x}$

۳) $f^{-1}(x)=1-\sqrt{1+x}$ ۴) $f^{-1}(x)=1+\sqrt{1+x}$

۴- جواب کلی معادله‌ی $\sin(\frac{\pi}{2}+2x)+3\cos x=1$ کدام است؟

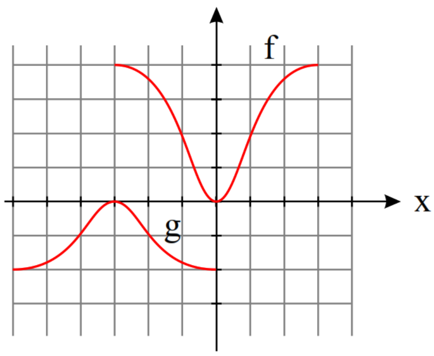
۱) $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۲) $x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

۳) $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۴) $x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

۵- اگر $f(x+2)=\frac{\cos\pi x}{1+\sin\pi x}$، حاصل $\lim_{x\to 3} f(x)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱− ۳) ۱ ۴) $+\infty$

۶- در شکل مقابل، نمودار g از طریق تعدادی عملیات انبساط، انقباض، انتقال و قرینه روی تابع f به‌دست آمده است. ضابطه‌ی تابع g کدام است؟



۱) $\frac{f(-x-3)}{2}$

۲) $\frac{f(2-x)}{2}$

۳) $\frac{-f(x+3)}{2}$

۴) $\frac{-f(3-x)}{2}$

یادداشت‌نامه

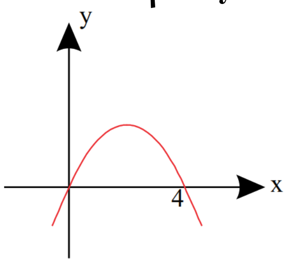
۷- فرض کنید $f(x)=\frac{\sqrt{x^{۴}+x}+x^{۲}}{۳^{x}}$ و $g(x)=(\sqrt{x^{۴}+x}-x^{۲})۳^{x+۱}$، حاصل عبارت $f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$ به‌ازای $x=۱۳۹۴$ کدام است؟

۱) ۴۱۸۲
۲) ۳
۳) $۳(۱۳۹۴)^{۴}$
۴) $۳(۱۳۹۴)^{۲}$

۸- حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱۲^{x}-۳^{x}+۴^{x}-۱}{۱۶^{x}-۱}$، کدام است؟

۱) ۱
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۱۲

۹- نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ به شکل مقابل است. معادله‌ی محور تقارن تابع $y=f(x-۲)$ کدام است؟



۱) $x=۲$
۲) $x=۰$
۳) $x=۴$
۴) $x=-۲$

۱۰- اگر $f(x)=\begin{cases}x^{۲}-۱, & x\geq ۰\\ ۲x+۱, & x<۰\end{cases}$ و $g(x)=\frac{x-۱}{۲}$، آن‌گاه مجموع طول نقاط برخورد تابع fog با محور x ها کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) -۱
۳) ۳
۴) ۲

۱۱- اگر انتهای کمان زاویه‌ی x در ناحیه‌ی دوم دایره‌ی مثلثاتی باشد و داشته باشیم $\cos(\pi+۲x)=\frac{۱}{۳}$، مقدار $\tan x$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) $-\sqrt{۳}$
۳) $-\sqrt{۵}$
۴) $-\sqrt{۲}$

۱۲- حاصل $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sqrt{۱+\cos x}}{\sin x}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) وجود ندارد.

۱۳- دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{\log_{۰/۲۵}^{(x-۳)}}$، شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) بی‌شمار

یادداشت‌نامه

۱۴- اگر $f(x)=\frac{x^3+2}{3}$ و ترکیب دو تابع f و g به‌صورت $x \to \boxed{g} \to \boxed{f} \to 3x+1$ باشد، مقدار $g(2)$ کدام است؟

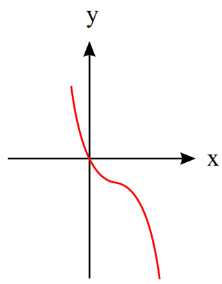
۱) $\sqrt[3]{19}$ ۲) $\sqrt[3]{7}$ ۳) $\sqrt[3]{\frac{10}{3}}$ ۴) 7

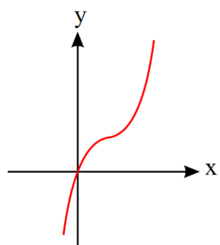
۱۵- اگر $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$ و $g(x)=3\sqrt{4-2x}$، آن‌گاه دامنه تابع $\frac{g}{f}$ کدام است؟

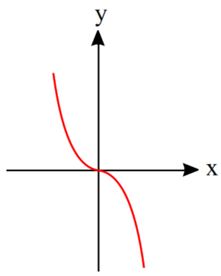
۱) $D=(-\infty,3]-\left\{\frac{-1}{2}\right\}$ ۲) $D=(-\infty,3)-\left\{\frac{-1}{2}\right\}$

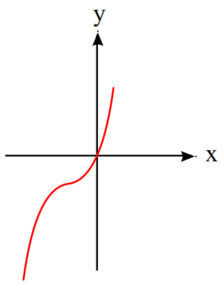
۳) $D=(-\infty,3)-\left\{\frac{-1}{2},2\right\}$ ۴) $D=(-\infty,3]-\left\{\frac{-1}{2},2\right\}$

۱۶- نمودار تابع $f(x)=6x^2-x^3-12x$ شبیه کدام گزینه است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۷- اگر $f(x)=\sqrt{x}-x$، دامنه تابع fof کدام است؟

۱) $\{0,1\}$ ۲) $[0,+\infty]$ ۳) $[0,1]$ ۴) $[1,+\infty)$

۱۸- اگر تابع $f=\{(-1,a-1),(0,a^3-1),(-2,a)\}$ اکیداً نزولی باشد، حدود a کدام است؟

۱) $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

۳) $(-\infty,0)\cup(0,1)$ ۴) $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

۱۹- اگر $(x-1)$ یک عامل عبارت $p(x)=x^4-x^3+ax+8$ باشد، معادله $p(x)=0$ چند ریشه دیگر دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۰- اگر داشته باشیم: $g(x)=f(2x+5)$ و $f^{-1}(x)=\frac{x^3}{9}+\sqrt[3]{9x}$، آن‌گاه حاصل عبارت $f^{-1}(g^{-1}(f(-1)))$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -2 ۳) -3 ۴) -6

یادداشت‌نامه

۲۱- اگر $f(x)=x^{۲}-۲x$ و $g(x)=\sqrt{۴-x}+۱$ باشند، برد تابع $fog(x)$ کدام است؟

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $[-۱,+\infty)$ ۳) $(-\infty,۱]$ ۴) $\mathbb{R}$

۲۲- در تابع $f=\{(-۱,۰),(۰,۱),(۱,-۱),(۲,۲)\}$، رابطه $f(۱-f(x_{۰}))=f(x_{۰})$ برقرار است، $x_{۰}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۲۳- در تابع $f(x)=x^{۳}+x+۲$، اگر محل برخورد $f^{-۱}(x)$ با محور xها را A' بنامیم و نقطه A قرینه A' نسبت به خط $y=x$ باشد، آن‌گاه اندازه پاره‌خط AA' کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$

۲۴- اگر تابع $f(x)=ax+۲$ با وارونش در بیش از یک نقطه تقاطع داشته باشند، مقدار $f^{-۱}(۳)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۵ ۴) -۵

۲۵- مشتق مرتبه دوم تابع $f(x)=(۲x-۱)^{۲}\sqrt{x+\frac{۱}{۲}}$ در $x=\frac{۱}{۲}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۲۶- اگر بازه $(۲x-۱,\frac{x+۵}{x+۱})$ یک همسایگی $\frac{۱}{۲}$ باشد، حدود x کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-(-۸,-۱)$ ۲) $(-\infty,-۹)\cup(-۱,\frac{۳}{۴})$

۳) $\mathbb{R}-(-۹,-۱)$ ۴) $(-\infty,-۸)\mathbb{R}(-۱,\frac{۳}{۴})$

۲۷- حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{۲\cos ۲x-۱}{۲\sin^{۲}x+\sin x-۱}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۴}{۳}$

۲۸- حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{\sqrt{۲x}-۲}{x^{۲}-۳x+۲}$ کدام است؟

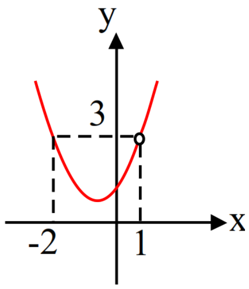
۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۴}$

یادداشت‌نامه

۲۹- نمودار تابع $y=\sqrt{1-2x}$ را یک واحد به چپ و سپس یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم. نمودار جدید خط $y=x+9$ را در نقطه $A(\alpha,\beta)$ قطع می‌کند. حاصل $\alpha+\beta$ چقدر است؟

۱) ۲۰- ۲) ۹ ۳) ۱- ۴) ۳

۳۰- اگر نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x^3+bx+c}{x-1}$ به‌صورت روبه‌رو باشد، مقدار $b-c$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

یادداشت‌نامه

پاسخنامه تشریحی

۱- گزینه ۳

یک رابطه که به‌صورت زوج مرتب داده شده است. در صورتی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه‌ی یکسان نباشند، یعنی اگر مؤلفه‌ی اول دو زوج مرتب مساوی بود، مولفه‌ی دومشان هم مساوی باشند.

$(1,3),(1,b^2-1)\in f$ شرط تابع بودن $\to b^2-1=3\Rightarrow b^2=4\Rightarrow b=\pm 2$

اما به ازای $b=2$ رابطه به‌صورت $f=\{(1,3),(2,4),(1,3),(2,6),(3,1)\}$ در می‌آید که تابع نیست. اما به‌ازای $b=-2$ رابطه به‌صورت $f=\{(1,3),(2,4),(1,3),(2,6),(3,1)$ در می‌آید که تابع است.

۲- گزینه ۲

روش اول:

$$f(x)=3x-1\to f(g(x))=3g(x)-1$$

پس : $3g(x)-1=x^2-x-1\xrightarrow{x=3}3g(3)-1=9-3-1\to 3g(3)=6\to g(3)=2$

$$\begin{cases}f(x)=3x-1\Rightarrow f(g(x))=3g(x)-1\Rightarrow 3g(x)-1=x^2-x-1\Rightarrow 3g(x)=x^2-x\\ f(g(x))=x^2-x-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{x^2-x}{3}\Rightarrow g(3)=\frac{3^2-3}{3}=2$$

۳- گزینه ۱

برای به‌دست آوردن ضابطه‌ی معکوس یک تابع، ابتدا x را برحسب y به‌دست می‌آوریم. سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$y=2x-x^2\Rightarrow y-1=2x-x^2-1=-(x^2-2x+1)=-(x-1)^2\Rightarrow (x-1)^2=1-y$$

جذر می‌گیریم $\to |x-1|=\sqrt{1-y}\xrightarrow{x<1}1-x=\sqrt{1-y}\Rightarrow x=1-\sqrt{1-y}$

جای x,y را عوض می‌کنیم $\to f^{-1}(x)=1-\sqrt{1-x}$

۴- گزینه ۳

$$\sin(\frac{\pi}{2}+2x)+3\cos x=1\to \cos 2x+3\cos x=1$$

حال با کمک رابطه‌ی $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ داریم:

$$2\cos^2 x-1+3\cos x=1\Rightarrow 2\cos^2 x+3\cos x-2=0\Rightarrow(\cos x+2)(2\cos x-1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos x+2=0\Rightarrow \cos x=-2 \text{ غ ق ق } (-1\le\cos x\le 1)\\ 2\cos x-1=0\Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

دقت کنید معادله‌ی $2\cos^2 x+3\cos x-2=0$ را از راه Δ نیز می‌توانید حل کنید.

۵- گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=\lim_{x\to ۱} f(x+۲)$$

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=\lim_{x\to ۱}\frac{\cos\pi x}{۱+\sin\pi x}=\frac{\cos\pi}{۱+\sin\pi}=\frac{-۱}{۱+۰}=-۱$$

۶- گزینه ۳

ابتدا در مرحله‌ی اول، نمودار f را در راستای محور yها، با ضریب $\frac{۱}{۲}$ منقبض کرده و در مرحله دوم،آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. در مرحله‌ی سوم، نمودار را سه واحد به چپ منتقل می‌کنیم:

$$y=f(x)\xrightarrow{۱}y=\frac{f(x)}{۲}\xrightarrow{۲}y=\frac{-f(x)}{۲}\xrightarrow{(۳)}y=\frac{-f(x+۳)}{۲}$$

۷- گزینه ۲

عبارت خواسته شده مشتق حاصل ضرب مشتق حاصل ضرب دو تابع است زیرا $(f(x).g(x))'=f'(x).g(x)+g'(x).f(x)$ پس کافی است دو تابع را در هم ضرب کرده و سپس مشتق بگیریم.

$$(f(x).g(x))'=\left(\frac{\sqrt{x^۴+x}-x^۲}{۳^x}\times(\sqrt{x^۴+x}+x^۲)۳^{x+۱}\right)=(۳(x^۴+x-x^۲))'=(۳x)'=۳$$

۸- گزینه ۱

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱۲^x-۳^x+۴^x-۱}{۱۶^x-۱}=\lim_{x\to ۰}\frac{۳^x(۴^x-۱)+(۴^x-۱)}{(۴^x-۱)(۴^x+۱)}=\lim_{x\to ۰}\frac{۳^x+۱}{۴^x+۱}=\frac{۲}{۲}=۱$$

۹- گزینه ۳

چون تابع درجه‌ی دوم محور طول را در $x=۰$ و $x=۴$ قطع کرده است می‌توان معادله‌ی آن را به صورت $y=a(x-۰)(x-۴)=ax^۲-۴ax$ نشان داد.

معادله‌ی محور تقارن : $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{۴a}{۲a}=۲$

برای رسم تابع $y=f(x-۲)$ کافی است تابع $y=f(x)$ را دو واحد به سمت راست انتقال دهیم بنابراین معادله‌ی محور تقارن در این حالت برابر $x=۲+۲=۴$ است.

۱۰- گزینه ۳

$$fog(x)=۰\to f(g(x))=۰\xrightarrow{x\geq ۲}\left(\frac{x-۱}{۲}\right)^۲-۱=۰\to\frac{(x-۱)^۲}{۴}=۱\to(x-۱)^۲=۴$$

$$\to\begin{cases}x-۱=۲\to x=۳ \text{ ق ق}\\ x-۱=-۲\to x=-۱\ (\text{با توجه به } x\geq ۰)\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۱۱- گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\tan^۲\alpha=\frac{۱-\cos۲\alpha}{۱+\cos۲\alpha}}$

$$\cos(\pi+۲x)=\frac{۱}{۳}\to-\cos۲x=\frac{۱}{۳}\to\cos۲x=-\frac{۱}{۳}$$

$$\tan^۲x=\frac{۱-\cos۲x}{۱+\cos۲x}=\frac{۱+\frac{۱}{۳}}{۱-\frac{۱}{۳}}=\frac{\frac{۴}{۳}}{\frac{۲}{۳}}=۲\to\tan x=\pm\sqrt{۲}\xrightarrow{\text{ناحیه‌ی دوم دایره‌ی مثلثاتی}}\tan x=-\sqrt{۲}$$

۱۲- گزینه ۴

می‌دانیم $\boxed{\sin u = ۲\sin\frac{u}{۲}\cos\frac{u}{۲}, ۱+\cos u = ۲\cos^۲\frac{u}{۲}}$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{۱+\cos x}}{\sin} = \lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{۲\cos^۲\frac{x}{۲}}}{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}} = \lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{۲}\left|\cos\frac{x}{۲}\right|}{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}$$

چون داخل قدر مطلق، صفر است باید حد راست و حد چپ را جداگانه محاسبه نمود.

$$\begin{cases}\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{۲}\left|\overbrace{\cos\frac{x}{۲}}^{-}\right|}{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}} = \lim_{x\to\pi^+}\frac{-\sqrt{۲}\cos\frac{x}{۲}}{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}} = \frac{-\sqrt{۲}}{۲} \\ \lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{۲}\left|\overbrace{\cos\frac{x}{۲}}^{+}\right|}{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}} = \lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{۲}\cos\frac{x}{۲}}{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\end{cases}$$

دقت کنید $\left(\frac{\pi}{۲}\right)^+$ در ناحیه‌ی دوم است و در این ناحیه کسینوس منفی است

دقت کنید $\left(\frac{\pi}{۲}\right)^-$ در ناحیه‌ی اول است و در این ناحیه کسینوس مثبت است

چون حد راست و حد چپ تابع در $x=\pi$ باهم برابر نیستند پس در $x=\pi$ حد وجود ندارد.

۱۳- گزینه ۱

می‌دانیم: $\log_a^A \geq m \xrightarrow{۰<a<۱} A \leq a^m$

برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف تابع، باید جلوی لگاریتم مثبت باشد و زیر رادیکال بزرگتر مساوی صفر باشد.

$x-۳>۰ \to x>۳ \quad (I)$

$\log_{۰/۲۵}^{x-۳} \geq ۰ \to x-۳ \leq (۰/۲۵)^{\circ} \to x-۳\leq ۱ \to x\leq ۴ \quad (II)$

از اشتراک I و II به جواب $۳<x\leq ۴$ می‌رسیم که شامل یک عدد طبیعی $x=۴$ است.

۱۴- گزینه ۱

از نمودار داده شده نتیجه می‌شود که $f(g(x)) = ۳x+۱$ است.

$$f(x) = \frac{x^۳+۲}{۳} \to f(g(x)) = \frac{g^۳(x)+۲}{۳}$$

پس : $\frac{g^۳(x)+۲}{۳} = ۳x+۱ \xrightarrow{x=۲} \frac{g^۳(۲)+۲}{۳} = ۶+۱ \to g^۳(۲)+۲ = ۲۱ \Rightarrow g^۳(۲) = ۱۹ \to g(۲) = \sqrt[۳]{۱۹}$

۱۵- گزینه ۴

دامنه تابع $\frac{g}{f}$ بصورت مقابل تعریف می‌شود.

$$D_{\frac{g}{f}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,f(x)=۰\}$$

$$f(x)=\frac{۲x+۱}{x-۲}\to x-۲\neq ۰\Rightarrow x\neq ۲\Rightarrow D_f=R-\{۲\}$$

$$g(x)=۳\sqrt{۶-۲x}\Rightarrow ۶-۲x\geq ۰\Rightarrow ۲x\leq ۶\Rightarrow x\leq ۳\Rightarrow D_g=(-\infty,۳]$$

$$f(x)=۰\Rightarrow \frac{۲x+۱}{x-۲}=۰\Rightarrow ۲x+۱=۰\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$$

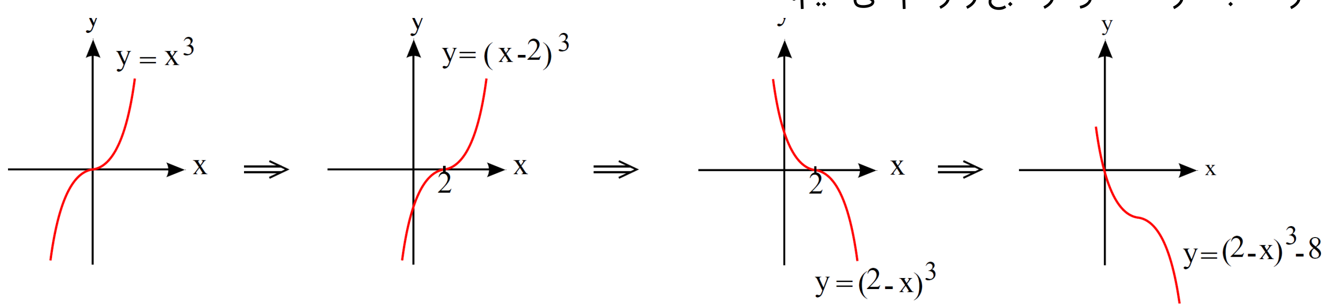
$$D_f\cap D_g=(-\infty,۳]-\{۲\}\Rightarrow D\frac{g}{f}=(-\infty,۳]-\left\{۲,\frac{۱}{۲}\right\}$$

۱۶- گزینه ۱

عدد ۸ را اضافه و کم می‌کنیم:

$$f(x)=۶x^۲-x^۳-۱۲x+۸-۸=(۲-x)^۳-۸$$

حالا مرحله به مرحله نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



۱۷- گزینه ۳

دامنهٔ تعریف تابع $f(x)$ به صورت $x\geq ۰$ است.

$$D_{fof(x)}=\{x\in D_f, f(x)\in D_f\}=\{x\geq ۰,\sqrt{x}-x\geq ۰\}$$

اکنون نامعادلهٔ $\sqrt{x}-x\geq ۰$ را حل می‌کنیم.

$$\sqrt{x}-x\geq ۰\to \sqrt{x}\geq x\to x\geq x^۲\to x^۲-x\leq ۰\to x(x-۱)\leq ۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰\leq x\leq ۱$$

پس : $D_{fof(x)}=\{x\geq ۰, ۰\leq x\leq ۱\}=۰\leq x\leq ۱\to x\in[۰,۱]$

۱۸- گزینه ۴

با مرتب کردن اعضای دامنهٔ تابع داریم:

$$f:\{(-2,a),(-1,a-1)(0,a^3-1)\}$$

$$-2<-1<0 \xrightarrow{\text{f اکیداً نزولی}} f(-2)>f(-1)>f(0) \Rightarrow a>a-1>a^3-1$$

$$a>a-1 \Rightarrow 0>-1 \Rightarrow \qquad \Rightarrow a\in R \quad (1)$$

$$a^3-1<a-1 \Rightarrow a^3-a<0 \Rightarrow a(a^2-1)<0$$

$$\begin{array}{c|ccccccccc} a & -\infty & & -1 & & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline a(a^2-1) & & - & 0 & + & 0 & - & 0 & + & \end{array} \Rightarrow a<-1 | \quad 0<a<1 \quad (2)$$

$$(1)\cap(2) \Rightarrow a<-1 \quad 0<a<1 \Rightarrow a\in(-\infty,-1)\cup(0.1)$$

۱۹- گزینه ۲

$$p(x)=x^4-x^3+ax+8$$

چون $x-1$ یک عامل $p(x)$ است، پس $p(x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است و داریم:

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow p(1)=0 \Rightarrow 1-1+a+8=0 \Rightarrow a=-8$$

$$p(x)=x^4-x^3-8x+8=0 \Rightarrow x^3(x-1)-8(x-1)=0 \Rightarrow (x-1)(x^3-8)=0$$

$$\Rightarrow x-1=0 \ \text{یا}\ x^3-8=0 \Rightarrow x=1 \ \text{یا}\ x=2$$

پس $f(x)=0$ یک ریشهٔ دیگر دارد.

۲۰- گزینه ۴

توجه کنید اگر $x=-3$ باشد $g(-3)=f(-1)$ است.

$$f^{-1}(g^{-1}(f(-1)))=f^{-1}(g^{-1}(g(-3)))=f^{-1}(-3)=\frac{(-3)^3}{9}+\sqrt[3]{-27}=-3-3=-6$$

توجه کنید اگر $x\in D_g$ باشد آن‌گاه $g^{-1}(g(x))=x$ است به همین علت $g^{-1}(g(-3))=-3$ است.

۲۱- گزینه ۲

$$f(x)=x^2-2x+1-1=(x-1)^2-1\ ,\ D_f=R$$

$$g(x)=\sqrt{4-x}+1\ ,\ D_g=(-\infty,4]$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\le 4 \mid (\sqrt{4-x}+1)\in R\}=(-\infty,4]$$

$$fog(x)=f(g(x))=f(\sqrt{4-x}+1)=(\sqrt{4-x}+1-1)^2$$

$$=4-x-1=3-x\ ,\ D_{fog}=(-\infty,4]$$

برای پیدا کردن برد fog، از روی دامنهٔ fog شروع به ساختن fog می‌کنیم:

$$x\le 4 \Rightarrow -x\ge -4 \Rightarrow 3-x\ge -1 \Rightarrow fog(x)\ge -1 \Rightarrow R_{fog}=[-1,+\infty)$$

۲۲- گزینه ۲

تابع f تابعی یک به یک است، پس از $f(u)=f(v)$ می‌توان نتیجه گرفت $u=v$، حال داریم:

$$f(۱-f(x_۰))=f(x_۰)\Rightarrow ۱-f(x_۰)=x_۰\Rightarrow f(x_۰)=۱-x_۰$$

فقط زوج مرتب $(۰,۱)$ در رابطهٔ فوق صدق می‌کند.

$$x_۰=۰\Rightarrow f(۰)=۱-۰\Rightarrow f(۰)=۱$$

۲۳- گزینه ۲

$$A'(a,۰)\in f^{-۱}\to(۰,a)\in f\to f(۰)=a\to(۰)^۳+۰+۲=a\to a=۲$$

$$\to A'(۲,۰)\xrightarrow{A \text{ قرینه } A' \text{ نسبت به خط } y=x}A(۰,۲)$$

$$\to AA'=\sqrt{(x_A-x_{A'})^۲+(y_A-y_{A'})^۲}=\sqrt{(۰-۲)^۲+(۲-۰)^۲}=\sqrt{۴+۴}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

۲۴- گزینه ۲

وارون هر تابع خطی، یک تابع خطی است. وارون f را حساب می‌کنیم:

$$y=ax+۲\Rightarrow x=\frac{y-۲}{a}\xrightarrow{A \text{ قرینه } A' \text{ نسبت به خط } y=x}y=\frac{x-۲}{a}\to f^{-۱}(x)=\frac{۱}{a}x-\frac{۲}{a}$$

اگر f و $f^{-۱}$ در بیش از یک نقطه برخورد داشته باشند، چون هر دو توابع خطی هستند. باید بر هم منطبق باشند؛ بنابراین داریم:

$$f(x)=f^{-۱}(x)\Rightarrow ax+۲=\frac{۱}{a}x-\frac{۲}{a}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{۱}{a}\\ ۲=-\frac{۲}{a}\end{cases}\Rightarrow a=-۱$$

پس ضابطهٔ f و $f^{-۱}$ به‌صورت $f(x)=f^{-۱}(x)=-x+۲$ در می‌آید.

$$\Rightarrow f^{-۱}(۳)=-۳+۲=-۱$$

۲۵- گزینه ۳

عبارت $(۲x-۱)^۲$ به ازای $x=\frac{۱}{۲}$، صفر می‌شود بنابراین برای محاسبه $f''(\frac{۱}{۲})$ کافی است از این عامل صفر شونده ۲ بار مشتق گرفته و در بقیهٔ عبارت، $x=\frac{۱}{۲}$ را جایگزین کنیم.

$$(۲x-۱)^۲\xrightarrow{\text{مشتق}}۲(۲x-۱)(۲)\xrightarrow{\text{مشتق}}۸$$

$$\text{پس: } f''(\frac{۱}{۲})=۸\sqrt{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}=۸$$

۲۶- گزینه ۲

عدد $\frac{1}{2}$ باید درون بازهٔ داده شده قرار داشته باشد.

$$\frac{1}{2}\in(2x-1,\frac{x+5}{x+1})\Rightarrow 2x-1<\frac{1}{2}<\frac{x+5}{x+1}$$

$$2x-1<\frac{1}{2}\Rightarrow 2x<\frac{3}{2}\Rightarrow x<\frac{3}{4}\quad (I)$$

$$\frac{x+5}{x+1}>\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{x+5}{x+1}-\frac{1}{2}>0\Rightarrow\frac{2x+10-x-1}{2(x+1)}>0\Rightarrow\frac{x+9}{2(x+1)}>0$$

x	$-\infty$		-9		-1		$+\infty$
$\frac{x+9}{2(x+1)}$		$+$	0	$-$	ن	$+$	

$$\Rightarrow x<-9 \text{ یا } x>-1\quad (II)$$

$$(I)\cap(II)\Rightarrow x<-9 \text{ یا } -1<x<\frac{3}{4}\Rightarrow x\in(-\infty,-9)\cup(-1,\frac{3}{4})$$

۲۷- گزینه ۴

می‌دانیم که $\cos 2\alpha=1-\sin^2$ است.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos 2x-1}{2\sin^2 x+\sin x-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2(1-2\sin^2 x)-1}{2\sin^2 x+2\sin x-\sin x-1}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-4\sin^2 x}{2\sin x(\sin x+1)-(\sin x+1)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{-(2\sin x-1)(2\sin x+1)}{(\sin x+1)(2\sin x-1)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{-(2\sin x+1)}{\sin x+1}=\frac{-(2\times\frac{1}{2}+1)}{\frac{1}{2}+1}=\frac{-2}{\frac{3}{2}}=-\frac{4}{3}$$

۲۸- گزینه ۲

روش اول: حد داده شده دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است و برای رفع ابهام، عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2}{x^2-3x+2}\times\frac{\sqrt{2x}+2}{\sqrt{2x}+2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{(x-2)(x-1)(\sqrt{2x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{(x-2)(x-1)(\sqrt{2x}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2}{(x-1)(\sqrt{2x}+2)}=\frac{2}{1\times 4}=\frac{1}{2}$$

روش دوم: برای رفع ابهام از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2}{x^2-3x+2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1(2)}{2\sqrt{2x}}}{2x-3}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$$

۲۹- گزینه ۳

$$y=\sqrt{1-2x}\xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}}y_1=\sqrt{1-2(x+1)}\xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}}y_2=\sqrt{-2x-1}+1$$

$$\begin{cases}y_2=\sqrt{-2x-1}+1\\ y=x+9\end{cases}\xrightarrow{\text{تلاقی}}\sqrt{-2x-1}+1=x+9\to\sqrt{-2x-1}+1=x+9\to\sqrt{-2x-1}=x+8$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}-2x-1=x^2+64+16x\to x^2+18x+65=0\to(x+5)(x+13)=0$$

$$\begin{cases}x=-13 & \text{غ ق ق (در معادله صدق نمی‌کند.)}\\ x=-5\xrightarrow{y=x+9}y=4\to A\left|\begin{matrix}-5:\alpha\\ 4:\beta\end{matrix}\right.\to\alpha+\beta=-1\end{cases}$$

۳۰- گزینه ۱

تابع در $X=1$ حدی برابر ۳ دارد.

عدد گذاری : $x=1\to\frac{1+b+c}{0}$

چون جواب حد برابر ۳ است پس این کسر حتماً $\frac{0}{0}$ بوده که پس از رفع ابهام جوابش ۳ شده است بنابراین $1+b+c=0$ است.

$$\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+b}{1}=3+b=3\to b=0\ ,\ c=-1\to b-c=1$$