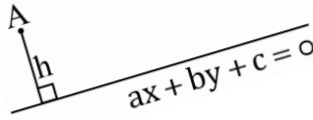


هندسه مختصاتی

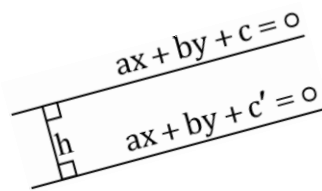
اندازه پاره خط:  $AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$



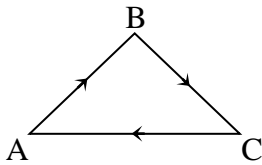
نقطه وسط:  $M = \frac{A+B}{2}$



فاصله نقطه از خط:  $h = \frac{|نقطه در خط|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



فاصله دو خط موازی:  $h = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



PS =  $\begin{vmatrix} | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{vmatrix}$

مساحت مثلث با سه نقطه مختصاتی

	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	}	شیب یابی:
زاویه با محور x	$\pm \tan \alpha$		
توازی	$m_1 = m_2$		
تعامد	$m_1 m_2 = -1$		
خط مماس	$f'$		

$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \xrightarrow{\det=0} \begin{matrix} \times & \parallel & / \end{matrix}$

بحث دستگاه:

دایره

معادله دایره به دو فرم زیر می باشد:

(۱) معادله دایره به فرم استاندارد

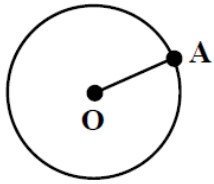
(۲) معادله دایره به فرم گسترده

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

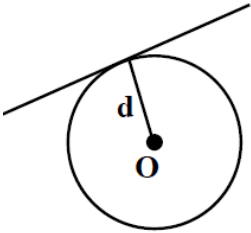
$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$

مرکز  $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ ,  $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$

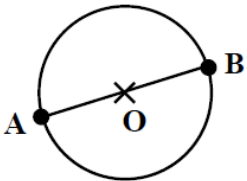
مرکز  $O(\alpha, \beta)$ , شعاع = r



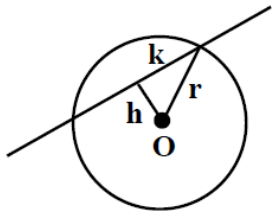
(۱) اگر مرکز دایره و یک نقطه از دایره را داده باشند و معادله دایره بخواهند:  
در این صورت از فرمول فاصله دو نقطه (OA) شعاع را بدست می‌آوریم و مرکز  $O(\alpha, \beta)$  را هم که داریم. بنابراین معادله دایره به صورت  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$  نوشته می‌شود.



(۲) اگر مرکز دایره و یک خط بر دایره مماس باشد و معادله را بخواهند:  
در این صورت از فاصله نقطه از خط شعاع (d) را بدست می‌آوریم و مرکز هم که داریم معادله خط را می‌نویسیم.



(۳) اگر دو سر قطر را داده باشند و معادله دایره با بخواهند، در این صورت از مختصات نقطه وسط، مختصات مرکز دایره با بدست می‌آوریم و از فاصله دو نقطه، اندازه قطر را بدست



می‌آوریم و نصف می‌کنیم تا شعاع بدست آید سپس معادله دایره را می‌نویسیم.  
(۴) اگر مرکز یک دایره و معادله خطی که وتر را به طول مشخص در دایره ایجاد می‌کند:  
**نکته:** شعاع عمود بر وتر، وتر و کمان‌های آن را نصف می‌کند.

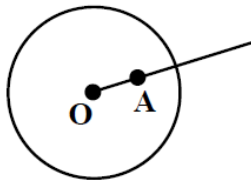
(۱) نصف وتر است.

(۲) فاصله نقطه از خط است.

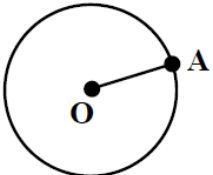
(۳) از رابطه فیثاغورس  $r$  را بدست می‌آوریم.

(۴) معادله دایره را می‌نویسیم.

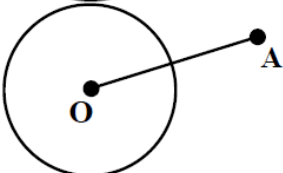
(۵) وضعیت نقطه  $A(x, y)$  نسبت به دایره  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$  مختصات نقطه را در معادله دایره قرار می‌دهیم:



(۱) اگر  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 < r^2$  باشد، نقطه روی دایره است.



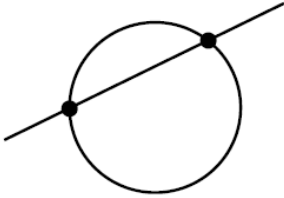
(۲) اگر  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$  باشد، نقطه روی دایره است.



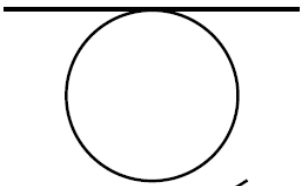
(۳) اگر  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 > r^2$  باشد، نقطه خارج دایره است.

۶) وضعیت خط نسبت به دایره

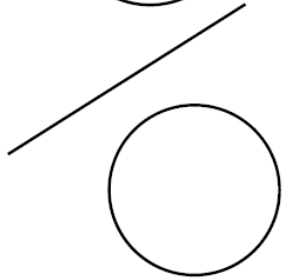
اول باید از معادله خط،  $y$  را بر حسب دیگری ( $x$ ) بدست آوریم و سپس معادله را به صورت معادله درجه ۲، بر حسب  $x$  مرتب کنیم و  $\Delta$  معادله را بدست آوریم ( $\Delta = b^2 - 4ac$ )



۱) اگر  $\Delta > 0$  خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند و اصطلاحاً می‌گوییم متقاطع‌اند.



۲) اگر  $\Delta = 0$ ، خط بر دایره مماس است.



۳) اگر  $\Delta < 0$ ، خط دایره را قطع نمی‌کند و اصطلاحاً می‌گوییم متخارج‌اند.

۷) اوضاع نسبی دو دایره نسبت به هم: ابتدا باید مراکز دو دایره و فاصله بین دو مرکز که خط‌المركزین هم می‌گویند ( $d$ ) را بدست می‌آوریم. بینیم کدامیک از حالت‌های زیر رخ می‌دهد:

۱) اگر  $|r - r'| < d < r + r'$ : دو دایره متقاطع

۲) اگر  $d = r + r'$ : دو دایره مماس بیرون

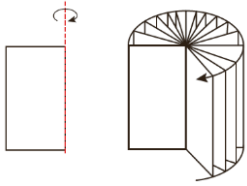
۳) اگر  $d = |r - r'|$ : دو دایره مماس درون

۴) اگر  $d > r + r'$ : دو دایره متخارج

۵) اگر  $d < |r - r'|$ : دو دایره متداخل

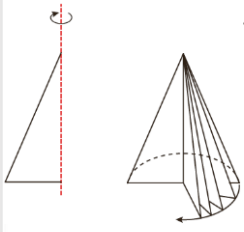
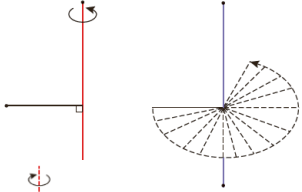
۶) اگر  $d = 0$ : دو دایره هم‌مرکز

### تفکر تجسمی دوران:

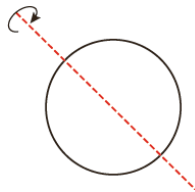


(۱) شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول یا عرض آن یک استوانه است.

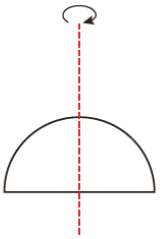
(۲) شکل حاصل از دوران یک پاره خط، حول پاره خط دیگری که بر آن عمود است، یک دایره توپیر است.



(۳) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع زاویه قائمه یک مخروط است.



(۴) شکل حاصل از دوران یک دایره حول یکی از قطرهای آن، یک کره است.



(۵) شکل حاصل از دوران یک نیم‌دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن یک نیم‌کره است.

(۶) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر آن دو مخروط با قاعده مشترک است.

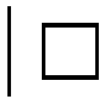
(۷) شکل حاصل از دوران یک خط، حول خطی موازی با آن یک استوانه است.

(۸) شکل حاصل از دوران یک خط حول خطی متقاطع با آن یک سطح مخروطی است.

(۹) شکل حاصل از دوران مثلث متساوی‌الساقین حول ارتفاع وارد بر قاعده‌ی آن یک مخروط است.

(۱۰) شکل حاصل از دوران یک ذوزنقه قائمه را حول ارتفاع آن یک مخروط ناقص است.

(۱۱) شکل حاصل از دوران مربعی که با فاصله‌ای از یک خط موازی با یکی از اضلاع آن (حول آن خط)، فضای بین دو استوانه خواهد بود.



(۱۲) شکل حاصل از دوران یک لوزی حول یکی از قطرهای آن دو مخروط با قاعده مشترک است.

(۱۳) شکل حاصل از دوران یک مربع حول قطرش، دو مخروط مشترک است.

فرمول‌های مهمی که در این قسمت کاربرد دارند:

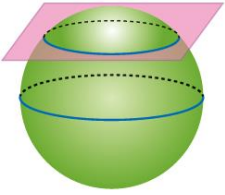
$$\text{حجم استوانه} = \pi r^2 h$$

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

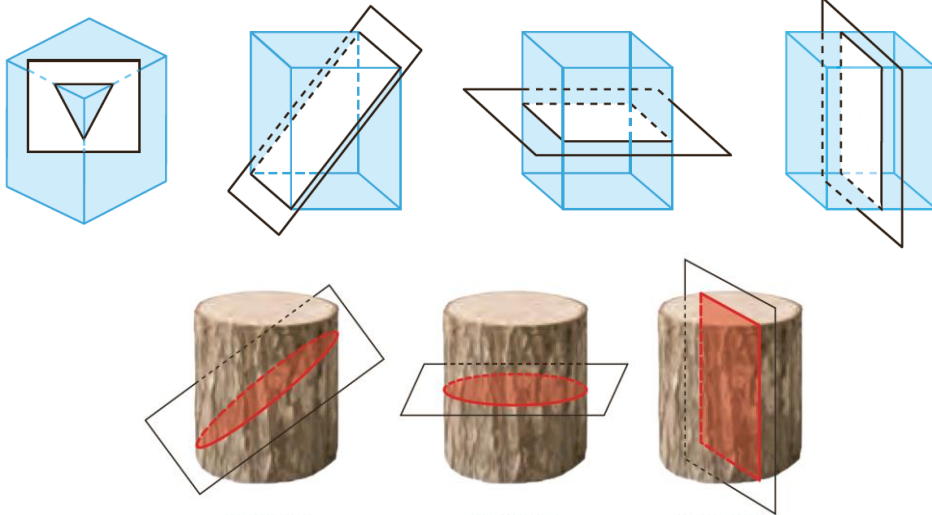
$$\text{مساحت کره} = 4\pi r^2$$

$$\text{ارتفاع} \times (\text{مجموع دو قاعده}) = \frac{1}{3} \text{مساحت ذوزنقه}$$



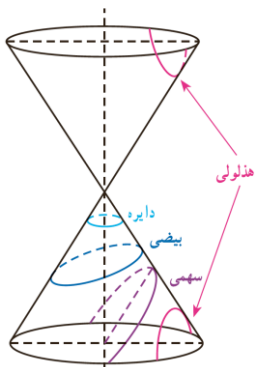
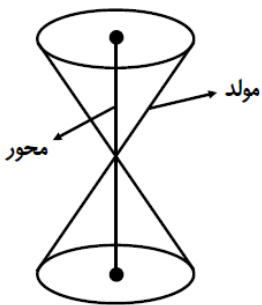
### برش اجسام:

- ۱) اگر کره‌ای توسط صفحه‌ای برش داده شود، سطح مقطع یک دایره است.
- ۲) اگر صفحه‌ای عمود بر محور استوانه، استوانه را قطع کند، سطح مقطع یک دایره است.
- ۳) اگر صفحه‌ای موازی با محور استوانه، استوانه را قطع کند، سطح مقطع یک مستطیل است.
- ۴) اگر صفحه‌ای مایل با محور استوانه، استوانه را قطع کند، سطح مقطع یک بیضی است.
- ۵) اگر صفحه‌ای موازی با قطر و یا شامل قطر مکعب مستطیل را قطع کند، سطح مقطع یک مستطیل است.
- ۶) اگر صفحه‌ای از سه وجه مکعب مستطیل بگذرد، سطح مقطع یک مثلث است.



### مقاطع مخروطی

- ۱) اگر صفحه بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل دایره است.
- ۲) اگر صفحه بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود، از رأس نگذرد، شکل حاصل بیضی خواهد بود.
- ۳) اگر صفحه در یکی از موقعیت‌ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس عبور نکند، شکل حاصل سه‌می است.
- ۴) اگر صفحه سطح مخروطی را هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل را هذلولی می‌گوییم.

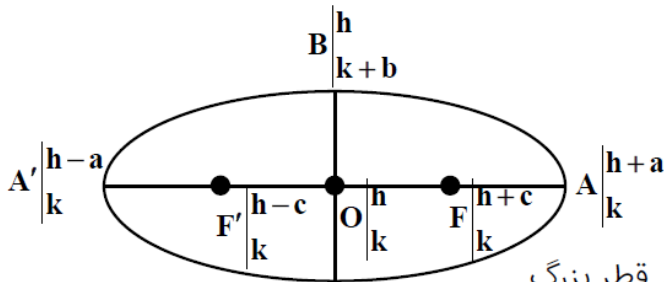


### بیضی

نکاتی که در حل مسائل باید بدانید:

دو نوع بیضی داریم:

(۱) بیضی افقی:



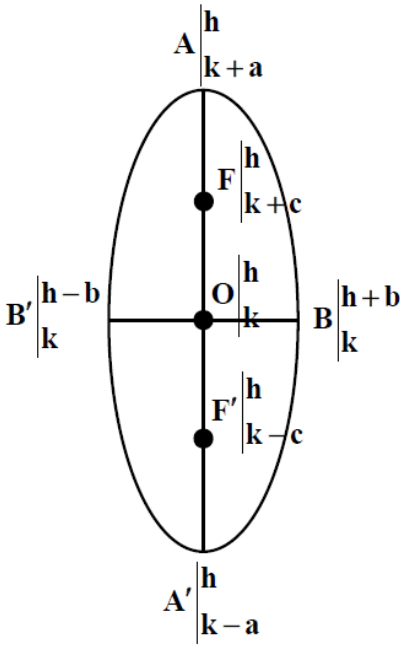
قطر بزرگ  $AA' = 2a \Rightarrow OA = OA' = a$

قطر کوچک (قطر ناکانونی)  $BB' = 2b \Rightarrow OB = OB' = b$

رابطه‌ای که بین  $a$ ،  $b$  و  $c$  برقرار است:  $a^2 = b^2 + c^2$

\* در بیضی افقی محور کانونی موازی محور  $x$  هاست:  $y = k$  معادله محور کانونی

### بیضی قائم:



$x = h$  (محور کانونی)

$y = k$  (محور ناکانونی)

### خروج از مرکز بیضی:

میزان کشیدگی بیضی را با واحدی  $e = \frac{c}{a}$

به نام خروج از مرکز بیضی می‌سنجیم که آن را با  $e$  نمایش می‌دهیم.

(۱) اگر  $e = 0$  دو کانون به هم چسبیده و دایره داریم.  $0 \leq e \leq 1$

(۲) اگر  $e = 1$  فاصله کانونی با طول نخ برابر و بیضی به پاره‌خط تبدیل می‌شود.

هرچه  $e$  به ۰ نزدیک‌تر شود بیضی به دایره نزدیک‌تر و هرچه  $e$  به ۱ نزدیک‌تر شود، بیضی کشیده‌تر می‌شود.  
**مثال مهم:**

خروج از مرکز بیضی افقی  $\frac{4}{5}$  و مرکز آن  $(-4, -1)$  و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است. طول قطر کانونی و فاصله کانونی را بدست آورید.

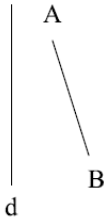
$$\frac{c}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow c = \frac{4}{5}a \quad e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow \boxed{b = 3}$$

$$\frac{16}{25}a^2 = a^2 - 9 \Rightarrow a^2 - \frac{16}{25}a^2 = 9 \Rightarrow \frac{9}{25}a^2 = 9 \Rightarrow$$

$$a^2 = 25 \Rightarrow \boxed{a = 5}, \quad c = \frac{4}{5}a = \frac{4}{5} \times 5 = 4 \Rightarrow \boxed{c = 4}$$

طول قطر کانونی  $= 2a = 2(5) = 10$

فاصله کانونی  $FF' = 2c = 2(4) = 8$



۱ - در شکل مقابل، از دوران  $AB$  حول  $d$  چه شکلی به دست می آید؟

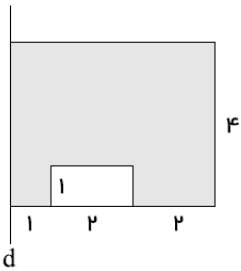
- ۱ مخروط ناقص  
 ۲ مخروط  
 ۳ استوانه  
 ۴ دوزنقه

۲ - مقطع حاصل از برخورد دو کره کدام است؟

- ۱ کره  
 ۲ دایره  
 ۳ نیم دایره  
 ۴ مخروط

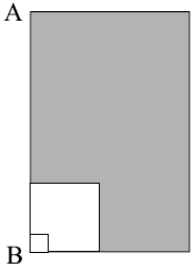
۳ - از دوران شکل مقابل حول خط  $d$ ، حجم شکل حاصل چقدر است؟

- ۱  $92\pi$   
 ۲  $100\pi$   
 ۳  $82\pi$   
 ۴  $64\pi$



۴ - از دوران شکل مقابل حول  $AB$  چه شکلی به دست می آید؟

- ۱ سه استوانه ای خالی از یک استوانه  
 ۲ دو استوانه  
 ۳ استوانه ای خالی از یک استوانه  
 ۴ سه استوانه



۵ - دو رأس کانونی یک بیضی  $A(7, 1)$  و  $A'(-3, 1)$  هستند. اگر بیضی بر محور  $x$ ها مماس باشد، فاصله ی کانونی آن چقدر است؟

- ۱  $2\sqrt{26}$   
 ۲  $2\sqrt{6}$   
 ۳  $4\sqrt{6}$   
 ۴ ۸

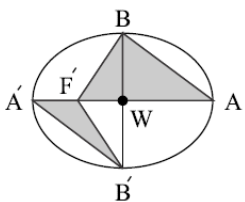
۶ - اگر  $F'(-3, 1), F(-1, 1)$  دو کانون یک بیضی با خروج از مرکز  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  باشند طول قطر کوچک این بیضی کدام است؟

- ۱ ۲  
 ۲ ۴  
 ۳  $2\sqrt{2}$   
 ۴  $4\sqrt{2}$

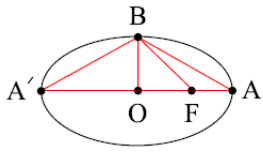
۷ - اگر خروج از مرکز یک بیضی  $\frac{1}{4}$  باشد زاویه ی بین خطی که از کانون و رأس ناکانونی می گذرد با محور کانونی کدام است؟

- ۱  $30^\circ$   
 ۲  $60^\circ$   
 ۳  $45^\circ$   
 ۴  $120^\circ$

۸ - در بیضی زیر، اگر مساحت مثلث  $BF'A$  پنج برابر مساحت مثلث  $A'B'F'$  باشد خروج از مرکز بیضی کدام است؟



- ۱  $\frac{2}{3}$   
 ۲  $\frac{3}{5}$   
 ۳  $\frac{1}{3}$   
 ۴  $\frac{2}{5}$



۹- در شکل زیر اگر مساحت مثلث  $ABA'$  برابر ۱۵ و مساحت مثلث  $OBF$  برابر ۶ باشد خروج از مرکز بیضی کدام است؟

- ۱  $\frac{3}{5}$      
  ۲  $\frac{6}{15}$      
  ۳  $\frac{4}{5}$      
  ۴  $\frac{4}{15}$

۱۰- در بیضی با کانون‌های  $F(\sqrt{3}, 1)$  و  $F'(-\sqrt{3}, 1)$ ، اگر قطر کوچک برابر ۲ باشد، مختصات رئوس کانونی کدام است؟

- ۱  $(0, \pm 1)$      
  ۲  $(0, \pm 2)$      
  ۳  $(\pm 1, 1)$      
  ۴  $(\pm 2, 1)$

۱۱- نقاط  $F$  و  $F'$  کانون‌های یک بیضی هستند. اگر نقطه  $M$  روی این بیضی واقع باشد، خروج از مرکز آن کدام است؟

- ۱  $\frac{\sqrt{10}-3}{3}$      
  ۲  $\frac{\sqrt{10}-2}{3}$      
  ۳  $\frac{\sqrt{10}-1}{3}$      
  ۴  $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{3}}{3}$

۱۲- خروج از مرکز یک بیضی که یک رأس و کانون‌های آن، رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع باشند، کدام است؟

- ۱  $\frac{\sqrt{3}}{2}$      
  ۲  $\frac{1}{2}$      
  ۳  $\frac{\sqrt{3}}{3}$      
  ۴  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۳- دو دایره با معادلات  $x^2 + y^2 - 4y = b$  و  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  مماس خارج هستند. مقدار  $b$  کدام است؟

- ۱  $2 - 2\sqrt{5}$      
  ۲  $4 - 2\sqrt{5}$      
  ۳  $2\sqrt{5}$      
  ۴  $1$

۱۴- دو خط  $x + y + 4 = 0$  و  $2y = 5 - 2x$  بر دایره‌ای مماس هستند. شعاع این دایره کدام است؟

- ۱  $\frac{13}{2\sqrt{2}}$      
  ۲  $\frac{13}{4}$      
  ۳  $\frac{13}{4\sqrt{2}}$      
  ۴  $\frac{13}{2}$

۱۵- مرکز دایره‌ای که از نقاط  $(1, 2)$ ،  $(0, 0)$  و  $(-2, 1)$  می‌گذرد، کدام نقطه است؟

- ۱  $(0.5, 1)$      
  ۲  $(-1, 0.5)$      
  ۳  $(-0.5, 1)$      
  ۴  $(1, 0.5)$

۱۶- دایره‌ای بر هر دو محور مختصات و خط  $y = x + 2$  در ربع دوم مماس است. شعاع آن کدام است؟

- ۱  $\sqrt{2} \pm 1$      
  ۲  $\sqrt{2}$      
  ۳  $2$      
  ۴  $2 \pm \sqrt{2}$

۱۷- دو دایره از نقطه‌ی  $A(-3, 6)$  می‌گذرند و بر محورهای مختصات مماس‌اند. مجموع شعاع‌های آن‌ها کدام است؟

- ۱  $18$      
  ۲  $15$      
  ۳  $45$      
  ۴  $36$

۱۸- دایره‌ای، محور  $x$ ها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟

- ۱  $\sqrt{3}$      
  ۲  $2$      
  ۳  $\sqrt{5}$      
  ۴  $3$

۱۹- دایره‌ای از دو نقطه‌ی  $(0, 1)$  و  $(3, 0)$  گذشته و معادله‌ی یک قطر آن به صورت  $x - y = 2$  است. شعاع این دایره کدام است؟

- ۱  $\sqrt{2}$      
  ۲  $2$      
  ۳  $\sqrt{5}$      
  ۴  $3$

۲۰- دایره‌ای از دو نقطه‌ی  $(2, 0)$  و  $(-2, 0)$  گذشته و بر خط  $y = 1$  مماس است. شعاع این دایره کدام است؟

- ۱  $\frac{3}{2}$      
  ۲  $\sqrt{5}$      
  ۳  $\frac{5}{2}$      
  ۴  $3$



۲۱- مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات  $A(2, 5)$ ،  $B(3, 0)$  و  $C(0, 2)$  کدام است؟

- ① ۶      ②  $\frac{6}{5}$       ③ ۷      ④  $\frac{7}{5}$

۲۲- دو نقطه روی خط  $y = 2x + 1$  قرار دارند که از نیمساز ربع اول و سوم به فاصله  $4\sqrt{2}$  هستند. طول این نقاط کدام است؟

- ①  $-7$  و  $9$       ②  $7$  و  $-9$       ③  $9$  و  $7$       ④  $\pm 8$

۲۳- به ازای کدام مقدار  $k$ ، سه خط به معادلات  $x - 6y + k = 0$ ،  $x + 6y - 1 = 0$  و  $3y + 4x = 0$  در یک نقطه متقاطع اند؟

- ① ۷      ② ۸      ③ ۹      ④ ۱۰

۲۴- سه نقطه  $A(1, 1)$ ،  $B(4, 0)$  و  $C(5, 3)$  سه رأس مثلث هستند. مختصات نقطه‌ی برخورد ارتفاع‌های این مثلث کدام است؟

- ①  $(3, 3)$       ②  $(2, 2)$       ③  $(4, 0)$       ④  $(3, 4)$

۲۵- اگر فاصله‌ی دو خط موازی  $3x - 4y - 1 = 0$  و  $ax - 8y + 2b = 0$  برابر ۷ باشد، بیشترین مقدار  $a + b$  کدام است؟

- ① ۳۶      ② ۳۸      ③ ۴۰      ④ ۴۲

۲۶- یک خط از دسته خطوط به معادله  $(k+1)y + 2kx - k + 1 = 0$  برخط گذرنده بر دو نقطه  $(2, -1)$  و  $(8, 3)$  عمود است. معادله‌ی آن خط کدام است؟

- ①  $2y + 3x = 4$       ②  $2y + 3x = 1$       ③  $2y - 3x = -5$       ④  $3y - 2x = -5$

۲۷- دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات  $2y + x = 6$  و  $2x - y = 7$  و یک رأس آن نقطه  $A(8, 5)$  است. مساحت این مستطیل کدام است؟

- ①  $\frac{7}{2}$       ②  $\frac{9}{6}$       ③  $\frac{11}{4}$       ④  $\frac{12}{8}$

۲۸- نقاط  $A(2, 5)$  و  $B(3, -1)$  و  $C(0, 2)$  سه رأس مثلثی هستند. مختصات پای ارتفاع  $AH$  کدام است؟

- ①  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$       ②  $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$       ③  $(\frac{-1}{2}, \frac{5}{2})$       ④  $(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$

۲۹- نقاط  $A|_{m-1}^m$  و  $B|_{-2}^1$  و  $C$  رئوس مثلث  $ABC$  هستند که در رأس  $C$  قائمه است. اندازه‌ی وتر این مثلث کدام است؟

- ①  $2\sqrt{10}$       ②  $\sqrt{10}$       ③  $\sqrt{20}$       ④  $2\sqrt{20}$

۳۰- اگر خطوط  $y = (k+2)x + 3$  و  $ky - x - 5 = 0$  معادلات قطرهای یک مربع باشند فاصله‌ی محل تلاقی دو قطر مربع از مبدأ مختصات کدام است؟

- ①  $\sqrt{15}$       ②  $\sqrt{17}$       ③  $\sqrt{18}$       ④  $\sqrt{19}$