

رابطه یکنوایی تابع و مشتق: برای مشخص کردن بازه‌های مربوط به صعودی و نزولی بودن تابع کافی است آن را تعیین علامت کنیم. هر جا مشتق مثبت باشد تابع در آن بازه اکیداً صعودی و هر جا مشتق منفی باشد، تابع در آن بازه اکیداً نزولی است.

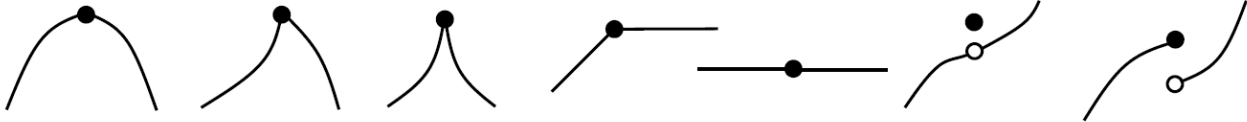
تذکر: اگر مشتق در تعدادی نقطه جدا از هم صفر شود، تأثیری در صعودی یا نزولی بودن در آن بازه ندارد و همچنین اگر در یک بازه از دامنه تابع f مقدار f' موجود و برابر صفر باشد، آن‌گاه f در آن بازه ثابت است.

ماکزیم نسبی: گوییم تابع f در $x = c$ ماکزیم نسبی دارد هرگاه:

(۱) تابع در c همسایگی آن تعریف شده باشد.

(۲) عرض آن نقطه از اطرافینش بیشتر یا مساوی باشد.

از نظر هندسی به صورت زیر می‌باشد:

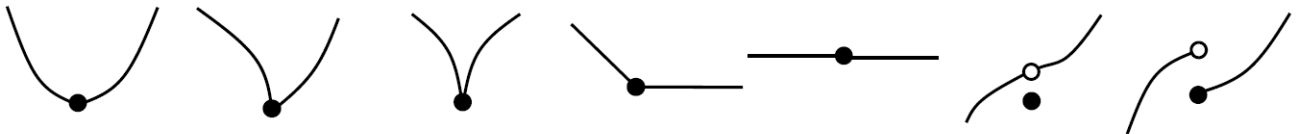


مینیم نسبی: گوییم تابع f در $x = c$ مینیم نسبی دارد هرگاه:

(۱) تابع f در یک همسایگی آن تعریف شده باشد.

(۲) عرض آن نقطه از اطرافینش کمتر یا مساوی باشد.

از نظر هندسی به صورت زیر می‌باشد:



نکته: فرض کنید $x = c$ طول نقطه اکستریم نسبی باشد، در این صورت:

(۱) f می‌تواند در این نقطه مشتق‌پذیر نباشد.

(۲) اگر f در $x = c$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه $f'(c) = 0$

(۳) نقطه $(c, f(c))$ روی نمودار تابع است یعنی مختصات آن در معادله تابع صدق می‌کند.

نقطه بحرانی: نقطه $c \in D$ را نقطه بحرانی تابع می‌گوییم هرگاه تابع f در یک همسایگی c تعریف شده باشد اگر $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

نکته: (۱) نقاط ابتدایی و انتهایی دامنه نمی‌توانند نقطه بحرانی باشند.

(۲) در تابع ثابت، هر نقطه یک نقطه بحرانی است و هر نقطه هم ماکسیم نسبی است و هم مینیم نسبی

(۳) هر نقطه اکستریم نسبی یک نقطه بحرانی است ولی هر نقطه بحرانی ممکن است اکستریم نباشد.

مانند $f(x) = x^3$ در $x = 0$

آزمون مشتق اول: فرض کنید c طول نقطه بحرانی تابع f و f در $x=c$ پیوسته است و f در یک همسایگی محذوف c مشتق‌پذیر باشد در این صورت:

①

x	c	
f'	-	+
	\searrow	\nearrow

min

②

x	c	
f'	+	-
	\nearrow	\searrow

max

③

x	c	
f'	\pm	\pm

اکسترم نیست

ماکزیمم مطلق: نقطه $(c, f(c))$ را در نقطه ماکزیمم مطلق تابع f گوئیم هرگاه $\forall x \in D_f : f(x) \leq f(c)$

مینیمم مطلق: نقطه $(c, f(c))$ را نقطه مینیمم مطلق تابع f گوئیم هرگاه $\forall x \in D_f : f(x) \geq f(c)$

نکته ۱: اکسترمم نسبی حتماً باید درون بازه باشد ولی اکسترمم مطلق می‌تواند در ابتدا و انتهای دامنه نیز باشد.
نکته ۲: اگر تابع در یک همسایگی نقطه اکسترمم مطلق تعریف شده باشد، آن‌گاه این نقطه اکسترمم نسبی نیز هست.

نکته ۳: اگر تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه f در این بازه ماکزیمم و مینیمم مطلق دارد. برای یافتن اکسترمم مطلق روی بازه $[a, b]$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) نقاط بحرانی را پیدا می‌کنیم. (۲) مقدار تابع را در نقاط بحرانی و ابتدا و انتهای بازه بدست می‌آوریم.

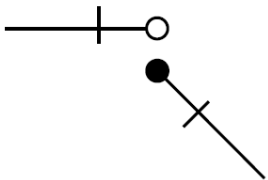
۳) بزرگترین عدد بدست آمده ماکزیمم مطلق و کمترین عدد بدست آمده مینیمم مطلق است.

بهینه‌سازی: به فرایندی که طی آن ماکزیمم یا مینیمم مطلق یک عبارت را تحت شرایط اولیه پیدا می‌کنیم بهینه‌سازی می‌گویند.

برای حل مسائل بهینه‌سازی ابتدا تابعی که قرار است ماکزیمم یا مینیمم شود را مشخص می‌کنیم و معادله را برای آن می‌نویسیم.

اگر معادله نوشته شده بر حسب بیش از یک متغیر باشد، ابتدا به کمک اطلاعات مسئله آن را بر حسب یک متغیر درمی‌آوریم و سپس با استفاده از مشتق اکسترمم مطلق آن را پیدا می‌کنیم.

* هر نقطه اکسترمم نسبی بحرانی است اما هر نقطه بحرانی لزوماً اکسترمم نسبی نیست.



ویژگی نقطه اکسترمم نسبی:

۱) مختصات نقطه در معادله تابع صدق می‌کند.

۲) طول نقطه ذر $f' = 0$ صدق می‌کند.

مثال: اگر نقطه‌ی $(2, 1)$ ، نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را بدست آورید.

۱- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & ; x < 1 \\ a & ; x = 1 \\ 3 - 2x & ; x > 1 \end{cases}$ در $x = 1$ ماکسیمم یا می نیمم نسبی داشته باشد، a چند مقدار صحیح را نمی تواند بپذیرد؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) بی شمار

۲- نمودار تابع $y = -4 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right)$ روی بازه $[-1, 1]$ در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳- تابع با ضابطه $y = (x - 1)|x|$ در کدام بازه نزولی است؟

- ۱) $(0, \frac{1}{2})$ ۲) $(0, 1)$ ۳) $(-\infty, 0)$ ۴) $(0, +\infty)$

۴- تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 + x$ همواره صعودی است. تغییرات a کدام است؟

- ۱) $0 \leq a < 2$ ۲) $-\sqrt{3} \leq a < 2$ ۳) $|a| < \sqrt{3}$ ۴) $|a| \leq 2$

۵- کم ترین مقدار تابع $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3}$ در بازه $[-1, 2]$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) صفر ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{2}{7}$

۶- بیش ترین مقدار تابع با ضابطه $f(x) = (x^2 + 4x + 3)^{\frac{1}{3}}$ روی بازه $[-4, -1]$ کدام است؟

- ۱) $\sqrt[3]{5}$ ۲) $\sqrt[3]{3}$ ۳) ۲ ۴) $2/51$

۷- مستطیل محاط در دایره به قطر ۶ واحد را حول یک ضلع خود دوران می دهیم تا استوانه های قائم ایجاد شود. وقتی حجم این استوانه ها بیشترین مقدار را دارد، ارتفاع آن کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{6}$ ۴) $3\sqrt{2}$

۸- اگر تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + a}$ دارای اکسترمم نسبی باشد، مقادیر a کدام است؟

- ۱) $a < -2$ یا $a > 0$ ۲) $a > 2$ یا $a < 0$ ۳) $-2 < a < 0$ ۴) $0 < a < 2$

۹- اگر تابع f در نقطه c دارای اکسترمم نسبی باشد، الزاماً تابع f چگونه است؟

- ۱) $f'(c) = 0$ ۲) در c پیوسته ۳) در همسایگی، تعریف شده ۴) در c مشتق پذیر

۱۰- طول نقطه ی ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$ کدام است؟

- ۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۰ ۴) ۱

۱۱- مجموعه ی طول نقاط بحرانی تابع $y = \sqrt[3]{x}(x - 2)$ کدام است؟

- ۱) $\left\{\frac{1}{2}, 0\right\}$ ۲) $\{1, 0\}$ ۳) $\{2, 0\}$ ۴) $\left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$

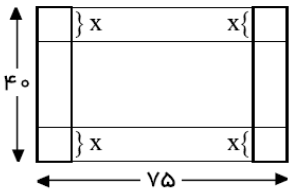
۱۲- اگر $(1, 4)$ مختصات نقطهٔ مینیمم نسبی تابع $y = \frac{ax^2 + b}{x}$ باشد، مختصات نقطهٔ ماکسیمم نسبی آن کدام است؟

- ① $(-1, -2)$ ② $(-1, 4)$ ③ $(-1, -4)$ ④ $(-2, -1)$

۱۳- معادلهٔ خطی که نقاط اکسترمم تابع $y = \frac{ax}{x^2 + 1}$ را به هم وصل می‌کند، $y = 4x + b$ است. b کدام است؟

- ① صفر ② ۱ ③ -۲ ④ ۳

۱۴- مطابق شکل زیر می‌خواهیم با برش زدن مربع‌هایی با اندازه‌های مساوی از چهار گوشهٔ یک قطعه مقوای 75×40 سانتی‌متر، یک جعبهٔ درباز بسازیم. طول ضلع مربع‌های جداشده باید چه قدر باشد تا حجم جعبه، بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد؟

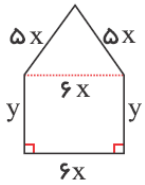


- ① ۳۰ ② $\frac{25}{3}$

- ③ $\frac{25}{6}$ ④ $\frac{50}{3}$

۱۵- ماکسیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{1}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5}$ کدام است؟

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$



۱۶- محیط شکل مقابل ۲۴ است. اگر مساحت آن ماکسیمم باشد، نسبت $\frac{x}{y}$ برابر کدام است؟

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ ۲ ④ ۴

۱۷- کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A به عرض ۲ واقع بر محور عرض‌ها از نقاط منحنی $y = x^2$ چقدر است؟

- ① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{7}}{2}$

۱۸- در بین همهٔ مخروط‌های قائم که طول مولد آنها ثابت است، آن که بیش‌ترین حجم را دارد در نظر می‌گیریم. نسبت ارتفاع به شعاع قاعدهٔ آن کدام است؟

- ① $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ② $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ③ ۱ ④ $\frac{1}{\sqrt{6}}$

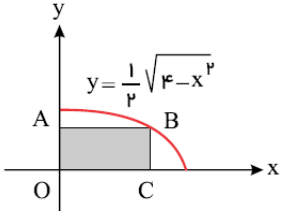
۱۹- تابع $f(x) = |x^2 - x|$ دارای مینیمم نسبی و ماکسیمم نسبی می‌باشد. (به ترتیب از راست به چپ)

- ① ۱۹۱ ② ۲۹۱ ③ ۱۹۲ ④ ۲۹۲

۲۰- اگر حاصل‌ضرب طول‌های نقاط بحرانی تابع $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{mx^2}{2} + (m-1)x + 1$ برابر ۲ باشد، مقدار m کدام است؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۲۱- در شکل مقابل مستطیل $OABC$ را حول محور x ها دوران می دهیم. بیش ترین حجم استوانه قائم ایجاد شده چقدر است؟



$$\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{16\sqrt{3}} \quad (4)$$

$$\frac{\pi}{9\sqrt{3}} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{8\sqrt{3}} \quad (3)$$

۲۲- مساحت شکلی که از به هم وصل کردن نقاط بحرانی تابع $f(x) = x^{\frac{8}{3}} - 2x^{\frac{4}{3}}$ به دست می آید، کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

۲۳- در تابع با ضابطه $f(x) = x^5 - \frac{20}{3}x^3 + a$ مقدار می نیمم نسبی ۲۱- است. نقطه ی ماکسیمم نسبی در کدام ناحیه قرار دارد؟

$$\text{چهارم} \quad (4)$$

$$\text{سوم} \quad (3)$$

$$\text{دوم} \quad (2)$$

$$\text{اول} \quad (1)$$

۲۴- یک ضلع از مستطیلی منطبق بر محور x ها و دو رأس آن واقع بر منحنی به معادله $y = 20 - \sqrt[4]{x^6}$ در بالای محور x ها است. بیش ترین مساحت این مستطیل کدام است؟

$$96 \quad (4)$$

$$48 \quad (3)$$

$$54 \quad (2)$$

$$108 \quad (1)$$

۲۵- حداکثر مساحت مستطیلی که بین منحنی $y = \sqrt{6-x}$ و محورهای مختصات محصور است، چقدر است؟

$$3\sqrt{2} \quad (4)$$

$$2\sqrt{2} \quad (3)$$

$$4\sqrt{2} \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

۲۶- بیش ترین محیط مثلث های قائم الزاویه ای که طول وتر آن ها برابر یک واحد است، کدام است؟

$$\sqrt{2} + 2 \quad (4)$$

$$\sqrt{2} + 1 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

۲۷- اگر x و y دو ضلع قائم از مثلثی به وتر ۵ باشند، بیش ترین مقدار $x + 2y$ کدام است؟

$$\sqrt{10} \quad (4)$$

$$2\sqrt{5} \quad (3)$$

$$5\sqrt{5} \quad (2)$$

$$\sqrt{5} \quad (1)$$

۲۸- می خواهیم یک مخزن استوانه ای با حجم 200π بسازیم. هزینه ساخت هر واحد سطح درپوش و کف مخزن ۸ و هر واحد سطح دیواره مخزن ۱۰ واحد قیمت است. ارتفاع استوانه را چه مقدار انتخاب کنیم تا هزینه ساخت حداقل شود؟

$$5 \quad (4)$$

$$10 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$8 \quad (1)$$

۲۹- نمودار تابع $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ در کدام فاصله صعودی است؟

$$x > 3 \quad (4)$$

$$x < 2 \quad (3)$$

$$x > 2 \quad (2)$$

$$x < \frac{1}{2} \quad (1)$$

۳۰- اگر تابع $f(x) = 2x + \frac{a}{x+1}$ در نقطه $\frac{\beta}{6}$ دارای اکسترمم نسبی باشد، مقدار β کدام است؟

$$-2 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$