

تعریف مشتق:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (۲)$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (۱)$$

\*  $f'(a)$  همان شیب خط مماس بر منحنی در نقطه  $x = a$  است. (به شرط آنکه حد فوق موجود و متناهی باشد)

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (\text{مشتق راست})$$

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (\text{مشتق چپ})$$

شیب خط مماس راست

شیب خط مماس چپ

$$x = a \text{ در منحنی بر مماس خط معادله } y - y_1 = f'(a)(x - a)$$

$$x = a \text{ در نیم مماس راست معادله } y - y_1 = f'(a)(x - a)$$

$$x = a \text{ در نیم مماس چپ معادله } y - y_1 = f'_-(a)(x - a)$$

\* به شکل زیر توجه کنید (رابطه مشتق پذیری و پیوستگی)

(۱) اگر  $f$  در  $x = a$  مشتق پذیر باشد، آن گاه پیوسته است.

(۲) اگر  $f$  در  $x = a$  پیوسته باشد، مشتق پذیر نیست.

(۳) اگر  $f$  تابعی پیوسته باشد، در مورد مشتق پذیری چیزی نمی توان گفت.

\* تابع  $f$  در  $x = a$  مشتق پذیر نیست هرگاه:

(۱)  $f$  در  $x = a$  پیوسته نباشد.

(۲)  $f$  در  $x = a$  پیوسته باشد ولی مشتق چپ و راست هر دو متناهی ولی برابر نباشد. (نقطه گوشه ای)

(۳)  $f$  در  $x = a$  پیوسته باشد ولی مشتق چپ و راست یکی موجود و دیگری نامتناهی باشد. (نقطه گوشه ای)

(۴)  $f$  در  $x = a$  پیوسته باشد ولی مشتق و راست هر دو متناهی باشد.

فرمول های مشتق:

$$۱) f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$۲) f(x) = ku^n \Rightarrow f'(x) = nku'u^{n-1}$$

$$۳) f(x) = \sqrt{u} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$۴) f(x) = \sqrt[n]{u^m} \Rightarrow f'(x) = \frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$$

$$۵) f(x) = uv \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$$

$$۶) f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$۷) y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \Rightarrow y' = g'(x) \times f'(g(x))$$

$$۸) y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

\* اگر در امتحان مشتق‌پذیری یک تابع چند ضابطه‌ای خواسته شد، دقت کنید که ابتدا شرط پیوسته بودن را بررسی کنید اگر پیوسته نبود، بگویید مشتق‌پذیر نیست. اما اگر پیوسته بوده از تعریف مشتق، مشتق‌پذیرتر آن را بررسی کنید.

\* حل یک مثال مهم:

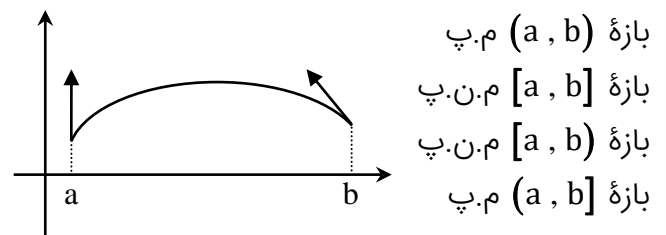
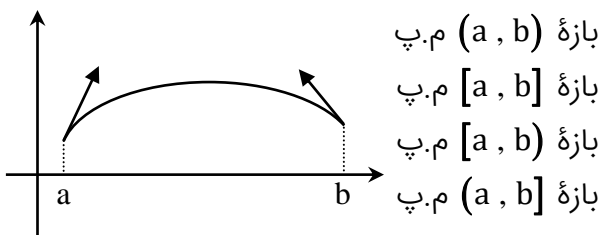
مشتق‌پذیری  $f(x) = |x^2 - 1|$  را در  $x = 1$  بررسی کنید.

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} \end{cases}$$

لذا  $f'_-(1) \neq f'_+(1)$  مشتق‌پذیر نیست.

تابع  $f$  روی بازه  $(a, b)$  مشتق‌پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق‌پذیر باشد.

تابع  $f$  روی بازه  $[a, b]$  مشتق‌پذیر است، هرگاه  $f$  در بازه  $(a, b)$  مشتق‌پذیر باشد و در نقطه  $a$  مشتق راست و در  $b$  مشتق چپ داشته باشد.



آهنگ لحظه‌ای  $\leftarrow f'(a)$

آهنگ متوسط  $[a, b] \leftarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$



۱- مشتق تابع  $y = (x-3)|x-3| + \sqrt[3]{(x-3)^2(x-4)}$  در  $x=3$  کدام است؟

- ① -۱      ② ۱      ③ ۰      ④ ۲

۲- تابع  $f(x) = \begin{cases} |x^2-1| & |x| \leq 2 \\ 4x-1 & |x| > 2 \end{cases}$  در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

- ① ۱      ② ۴      ③ ۲      ④ ۳

۳- اگر  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-2h)}{h} = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$  مقدار  $f'(2)$  کدام است؟

- ①  $\frac{1}{3}$       ②  $\frac{2}{3}$       ③ ۱      ④  $\frac{2}{9}$

۴- در تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & x \geq 1 \\ x^2 - 3x + 6 & x < 1 \end{cases}$  حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-h^2)}{h^2}$  چقدر است؟

- ① ۵      ② -۱      ③ ۴      ④ -۲

۵- تابع  $f$  مشتق پذیر است. اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)+2}{x-2} = \frac{1}{2}$  باشد، معادله‌ی خط مماس بر تابع  $y = xf(\sqrt{x})$  در نقطه‌ای به طول  $x=4$  واقع بر آن کدام است؟

- ①  $2y + 3x + 4 = 0$       ②  $2y + 3x = 22$       ③  $2y = 3x + 10$       ④  $2y = 3x - 22$

۶- تعداد نقاط مشتق ناپذیری تابع  $f(x) = ||x| - 1|$  بر روی  $\mathbb{R}$  کدام است؟

- ① ۰      ② ۱      ③ ۲      ④ ۳

۷- تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \sqrt{1+|x|}$  در  $x = \alpha$  مشتق ندارد. مقدار  $f'_+(\alpha) - f'_-(\alpha)$  کدام است؟

- ① -۱      ②  $\frac{1}{2}$       ③ ۱      ④ تعریف نشده

۸- اگر  $f(x) = x[2x+1]$  مقدار  $f'_+(1) - f'_-(1)$  کدام است؟

- ① ۰      ② ۳      ③ ۶      ④ وجود ندارد

۹- نسبت تغییرات متوسط تابع  $f(x) = x^2 - \sqrt[3]{x}$  روی بازه‌ی  $[1, 8]$  کدام است؟

- ①  $\frac{5}{8}$       ②  $\frac{3}{8}$       ③  $\frac{6}{8}$       ④  $\frac{3}{8}$

۱۰- یک ظرف آب مشتمل بر ۴۰ لیتر آب است در لحظه‌ی  $t=0$  یک سوراخ در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم آب باقی مانده در ظرف، پس از  $t$  ثانیه از رابطه‌ی

$$V = 40 \cdot \left(1 - \frac{t}{100}\right)^2$$

به دست آید، در چه زمانی آهنگ آبی تغییر  $V$  برابر آهنگ متوسط تغییر آن از  $t=0$  تا  $t=100$  (ثانیه) است؟

- ① ۲۵      ② ۱۲۵      ③ ۵۰      ④ ۴۵

۱۱- اگر  $f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{x^2+1}}$  و  $g(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ ،  $g'(x)f(x) - f'(x)g(x)$  کدام است؟

- ①  $\sqrt{x^2+1}$       ② ۰      ③ ۱      ④ -۲



۱۲- اگر  $f(x) = \sqrt{x}$  و  $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$  باشد  $g'(f(x))$  کدام است؟

- ①  $1 + \sqrt{x}$       ②  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$       ③  $\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2}$       ④  $\sqrt{x} + \frac{1}{2}$

۱۳- اگر  $f'(a) = 1$  و  $f(a) = -1$ ، مقدار مشتق عبارت  $f^2(x) + \frac{1}{f(x)}$  در نقطه‌ی  $x = a$  چقدر است؟

- ①  $-3$       ②  $1$       ③  $-2$       ④  $-1$

۱۴- چند نقطه روی منحنی  $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$  وجود دارد که مماس بر منحنی در آن نقاط موازی خط  $y = -x + 1$  باشد؟

- ① یک نقطه      ② دو نقطه      ③ سه نقطه      ④ وجود ندارد

۱۵- اگر  $f(x) = g(\sqrt{3x+1}) = 3x^2 - 4x + 1$  باشد، آن گاه  $f'(0)$  چند برابر  $g'(2)$  است؟

- ①  $\frac{3}{2}$       ②  $\frac{3}{4}$       ③  $\frac{3}{8}$       ④  $\frac{3}{16}$

۱۶- اگر  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{h} = -\frac{2}{3}$  باشد مقدار  $(f(\sqrt{x-1}))'$  در نقطه‌ای به طول  $x = 5$  کدام است؟

- ①  $-\frac{1}{6}$       ②  $-\frac{1}{3}$       ③  $\frac{1}{6}$       ④  $-\frac{3}{2}$

۱۷- بر منحنی  $y = \frac{x+2}{x-2}$  دو مماس به موازات خط  $x + y = 0$  رسم شده است. فاصله‌ی دو نقطه‌ی تماس کدام است؟

- ①  $3$       ②  $4$       ③  $3\sqrt{2}$       ④  $4\sqrt{2}$

۱۸- مشتق دوم تابع  $y = f(x^2)$  در  $x = 1$  با فرض  $f'(1) = 1$  و  $f''(1) = 2$  کدام است؟

- ①  $16$       ②  $14$       ③  $12$       ④  $10$

۱۹- اگر  $f$  تابعی مشتق‌پذیر باشد و  $f(x) = \frac{1}{x^2} \sqrt{x^2 + 3}$ ، حاصل  $f'(5)$  کدام است؟

- ①  $-\frac{4}{7}$       ②  $-\frac{2}{7}$       ③  $\frac{7}{4}$       ④  $\frac{7}{2}$

۲۰- اگر  $f(x) = \frac{x}{x^3 - x - 2}$  باشد، حاصل  $(\frac{f'}{f^2})(2)$  برابر کدام است؟

- ①  $-\frac{7}{2}$       ②  $-\frac{9}{2}$       ③  $\frac{7}{2}$       ④  $\frac{9}{2}$

۲۱- خط به معادله‌ی  $y = 5x + 1$  در نقطه‌ای به طول  $x = 3$  بر منحنی پیوسته‌ی  $y = f(x)$  مماس است. حاصل  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) - 16f(x)}{3-x}$  کدام است؟

- ①  $80$       ②  $-80$       ③  $160$       ④  $-160$

۲۲- خط‌های  $y = k_1$  و  $y = k_2$  بر نمودار تابع  $y = 9x + \frac{1}{x}$  مماس هستند. حاصل  $|k_1 - k_2|$  کدام است؟  $(k_1, k_2 \in R)$

- ۱) ۸      ۲) ۶      ۳) ۱۲      ۴) ۱۸

۲۳- کدام یک از توابع زیر در نقطه‌ی  $x = 1$  مشتق پذیر است؟

۱)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \geq 1 \\ x^2 - x & x < 1 \end{cases}$       ۲)  $g(x) = (x+1)^2 [x]$       ۳)  $h(x) = \begin{cases} 4\sqrt{x-1} & x \geq 1 \\ -\sqrt{1-x} & x < 1 \end{cases}$       ۴)  $k(x) = |x| + |x^3 + 1|$

۲۴- در تابعی با ضابطه‌ی  $f(x) = (3x+1)^{-\frac{1}{2}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه‌ی  $[1, 5]$  از آهنگ لحظه‌ای آن در  $x = \frac{1}{3}$ ، چقدر کمتر است؟

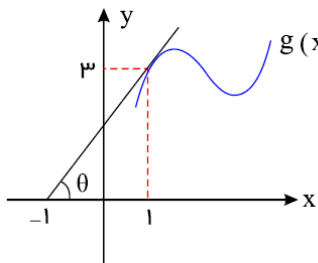
- ۱)  $\frac{1}{72}$       ۲)  $\frac{1}{144}$       ۳)  $\frac{1}{48}$       ۴)  $\frac{1}{288}$

۲۵- اگر  $f(x) = (x^3 - 2)|x|$ ، کدام یک از موارد زیر درست است؟

- ۱)  $f'(0) = -2$       ۲)  $f'_+(0) = -2$       ۳)  $f'(0) = -2$       ۴)  $f'(1) = -1$

۲۶- نمودار دو تابع با ضابطه‌های  $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x - 3$  و  $g(x) = 2x^2 + x + a$  بر هم مماس‌اند. عرض نقطه‌ی تماس کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{3}$       ۲) ۱      ۳) -۱      ۴)  $-\frac{1}{3}$



۲۷- شکل زیر، نمودار تابع پیوسته و مشتق پذیر  $g$  می‌باشد. هرگاه  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{g(x)}$  باشد، آن گاه مقدار  $f'(1)$  چه قدر است؟

- ۱)  $\frac{1}{3}$       ۲) ۱      ۳)  $\frac{2}{3}$       ۴)  $\frac{1}{9}$

۲۸- به ازای کدام مقادیر  $m$ ، خط به معادله‌ی  $y = mx + 2$ ، بر منحنی به معادله‌ی  $x^2 + y^2 - 2x = 3$  مماس است؟

- ۱)  $-\frac{4}{3}$  و ۰      ۲)  $\frac{4}{3}$  و ۰      ۳)  $-\frac{2}{3}$  و ۱      ۴)  $\frac{2}{3}$  و ۱

۲۹- در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(2x+6)^2} & ; x > 1 \\ ax+b & ; x \leq 1 \end{cases}$ ، مقدار  $f'(1)$  موجود است.  $b$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{4}{3}$       ۲)  $\frac{7}{3}$       ۳)  $\frac{8}{3}$       ۴)  $\frac{10}{3}$

۳۰- خط مماس بر منحنی به معادله‌ی  $y = x^3 - x^2$  در نقطه‌ای به طول  $x = 1$  واقع بر آن، منحنی را در نقطه‌ی دیگر  $A$  قطع می‌کند. عرض نقطه‌ی  $A$  کدام است؟

- ۱) -۳      ۲) -۲      ۳) ۲      ۴) ۳