

مفهوم حد راست و چپ:

۱- حد راست: فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند (x_0, b) تعریف شده باشد، حد راست f در x_0 برابر L است، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت راست به قدر کافی به x_0 نزدیک شود، در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

۲- حد چپ: فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند (a, x_0) تعریف شده باشد، حد چپ f در x_0 برابر L است، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت چپ به قدر کافی به x_0 نزدیک شود، در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

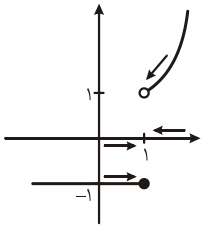
۳- حد تابع: فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند (a, b) شامل x_0 (به جز احتمالاً خود x_0) تعریف شده باشد. هر تابع f در x_0 برابر عدد L است، هرگاه مقدار تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد. به شرط آنکه x از دو طرف به قدر کافی به x_0 نزدیک شود. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ اگر و تنها اگر } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \text{ و } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

مثال: نمودار تابع f به صورت روبه‌رو است. حد در نقطه $x=1$ را بررسی کنید.

حل: ۱- حد راست: با توجه به نمودار وقتی از سمت راست به نقطه یک نزدیک می‌شویم، مقدار تابع f به یک نزدیک می‌شود.



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

۲- حد چپ: با توجه به نمودار وقتی از سمت چپ به نقطه یک نزدیک می‌شویم، مقدار تابع f به -1 نزدیک می‌شود.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$$

۳- مقدار در خود نقطه $x=1$ برابر -1 است.

به دلیل این‌که مقدار حد چپ و راست در نقطه $x=1$ برابر نیست، پس تابع f در نقطه $x=1$ ، حد ندارد.

مثال: اگر $f(x) = \frac{|x|}{x}$ باشد، آیا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجود است؟

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & x \geq 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \end{cases}$$

حل:

حد چپ و راست با هم برابر نیستند، پس تابع $f(x)$ در $x=0$ حد ندارد.

محاسبه حد تابع:

۱- حد تابع ثابت: اگر $f(x) = k$ باشد، در هر نقطه دلخواه a ، حد تابع $f(x)$ برابر k است.

مثال: اگر $f(x) = ۳$ باشد، آن گاه: $\lim_{x \rightarrow ۱} f(x) = \lim_{x \rightarrow -۲} f(x) = ۳$

۲- حد تابع همانی: اگر $f(x) = x$ باشد، در هر نقطه دلخواه a ، حد تابع برابر a است.

مثال: $\lim_{x \rightarrow ۲} x = ۲$ و $\lim_{x \rightarrow ۵} x = ۵$

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ ، آن گاه:

۱) حد مجموع $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L + m$

۲) حد تفاضل $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L - m$

۳) حد حاصل ضرب $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \cdot m$

۴) حد تقسیم $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{L}{m} \Rightarrow m \neq 0 \Rightarrow$ مخرج باید مخالف صفر باشد.

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ، آن گاه:

۱) $\lim_{x \rightarrow a} (Cf(x)) = C \times \lim_{x \rightarrow a} f(x) = C \times L$

۲) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n = L^n$

نکته: اگر حاصل $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ برابر با $\frac{0}{0}$ شود، ابتدا باید $f(x)$ و $g(x)$ را بر $x - a$ ساده کنیم و سپس با استفاده از قانون تقسیم، حدها را بررسی کنیم.

مثال: حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{-x^2 + 5x + 4} = \frac{(-1)^2 + 3(-1) + 2}{(-1)^2 + 5(-1) + 4} = \frac{0}{0}$$

حل:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{-x^2 + 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{x+4} = \frac{-1+2}{-1+4} = \frac{1}{3}$$

حد توابع جزء صحیح:

در محاسبه حد توابع شامل جزء صحیح ابتدا با توجه به تعریف جزء صحیح، به جای آن، عدد ثابتی قرار می‌دهیم، سپس با توجه به قضایای حد، حدگیری را انجام می‌دهیم.



مثال: حاصل حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} ([x] + 3x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [1^-] + 3x = \lim_{x \rightarrow 1^-} (0 + 3x) = 3(1) = 3$$

یادت باشد قبلاً از شر براکت و قدر مطلق خلاص بشی و ساده‌کاری کنی

تجزیه و ضرب در مزدوج

مشتق صورت

مشتق مخرج

صفر

صفر

حالت

- حالت $\frac{\infty}{\infty}$ ← استفاده از بیش‌ترین درجات

- جواب حد برابر ∞ ← حتماً با تعیین مخرج $+\infty$ یا $-\infty$ را تعیین کن.

- حد در نقاط ابتدا و انتها وجود ندارد، به‌عنوان نمونه: $y = \frac{2x+5}{[x]-1}$ ($x_0 = 2$) ، $y = \sqrt{x-4}$ ($x_0 = 4$)

پیوستگی:

(۱) تابع در $x=C$ حد داشته باشد. } تابع f را در نقطه $C \in \mathbb{R}$ پیوسته می‌گوییم، هرگاه
(۲) حد تابع در $x=C$ با مقدار تابع در C برابر باشد.

پیوستگی راست: هرگاه $\lim_{x \rightarrow C^+} f(x) = f(C)$ ، در این صورت می‌گوییم تابع f ، در $x=C$ پیوستگی راست دارد.

پیوستگی چپ: هرگاه $\lim_{x \rightarrow C^-} f(x) = f(C)$ ، در این صورت می‌گوییم تابع f ، در $x=C$ پیوستگی چپ دارد.

پیوستگی روی بازه:

(۱) تابع f روی بازه (a, b) پیوسته است، هرگاه در هر نقطه این بازه پیوسته باشد.

(۲) تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته است، هرگاه f در بازه (a, b) پیوسته باشد و در نقطه a ، پیوستگی راست و در نقطه b پیوستگی چپ داشته باشد.

۱- اگر باقی مانده تقسیم $f(x) = x^2 + 3x - m$ بر $x + 3$ برابر -2 باشد، آنگاه باقی مانده تقسیم $f(x - 1)$ بر $x + 4$ کدام است؟

- ۱) -8 ۲) 8 ۳) 2 ۴) -2

۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{9x - 5}{3x - 2} \right]$ کدام است؟

- ۱) 2 ۲) 3 ۳) -3 ۴) -2

۳- قدر مطلق تفاضل حد راست از حد چپ تابع $\frac{|x^2 - 4|}{x^2 - 4} + \frac{x - 2}{|x - 2|}$ وقتی $x \rightarrow 2$ کدام است؟

- ۱) 6 ۲) 4 ۳) 0 ۴) 1

۴- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 3^{\cot x}}$ کدام است؟

- ۱) 1 ۲) 0 ۳) ∞ ۴) $\frac{1}{2}$

۵- اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n + x^2 + 4}{ax^5 + 3x^2 + 1} = 4$ باشد حاصل $n + a$ کدام است؟

- ۱) 5 ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{19}{4}$ ۴) $\frac{21}{4}$

۶- اگر $f(x) = \frac{2x - 6}{x^2 + x - 6}$ و $g(x) = 2^x$ باشد آنگاه $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(f(x))$ کدام است؟

- ۱) 2 ۲) -2 ۳) 0 ۴) $+\infty$

۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{6})^-} \frac{\cot x + \sqrt{3}}{\cot x - \sqrt{3}}$ کدام است؟

- ۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$ ۳) 0 ۴) $\sqrt{3}$

۸- حاصل $A = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})^+} \left[\frac{2}{x} \right] - \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})^-} \left[\frac{4}{x} \right]$ کدام است؟

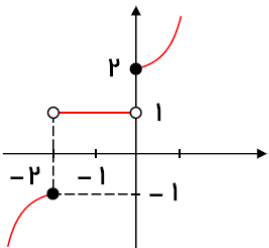
- ۱) -5 ۲) 5 ۳) -19 ۴) 19

۹- با توجه به شکل زیر حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(-2 - x^2) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(1 - x^2)$ کدام است؟

- ۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) -2

۱۰- اگر چند جمله‌ای $ax^4 - 3x^3 - x^2 - x - 2$ بر $x^2 - x - 2$ بخش پذیر باشد، حاصل $a + 2b$ کدام است؟

- ۱) 4 ۲) -4 ۳) -8 ۴) 8

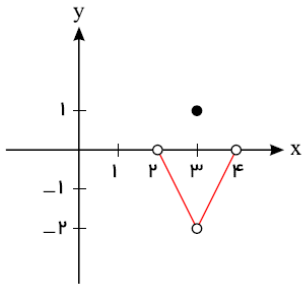


۱۱- اگر $f(x) - xf(-x) = 2x - 1$ ، آنگاه باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x + 2$ کدام است؟

- ① $-\frac{11}{5}$ ② $\frac{11}{5}$ ③ $\frac{6}{5}$ ④ $-\frac{6}{5}$

۱۲- با توجه به ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x} & x > 0 \\ -\sqrt{4+x} & x < 0 \end{cases}$ آنگاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 + x)$ کدام گزینه است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- ① ۲ ② $-\sqrt{3}$ ③ ۰ ④ -۲



۱۳- اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} [\frac{2}{f(x)}]$ کدام است؟

- ① -۱ ② -۲ ③ ۰ ④ ۱

۱۴- مجموع حد راست و چپ تابع $f(x) = [3 \cos x - 4] + |\cos x|$ در $x = \frac{\pi}{2}$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

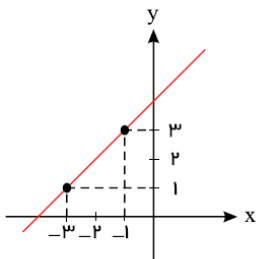
- ① -۵ ② -۴ ③ -۳ ④ -۹

۱۵- اختلاف حد راست و حد چپ تابع $f(x) = \frac{\sqrt{1 - \sin 2x}}{\cos x - \sin x}$ در $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

- ① ۱ ② -۱ ③ ۰ ④ ۲

۱۶- مجموع حد راست و چپ تابع $f(x) = -\left[\frac{-x-1}{x+2}\right]$ در $x = -3$ کدام است؟

- ① ۳ ② ۲ ③ ۵ ④ ۷



۱۷- با توجه به نمودار زیر مقدار حد $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{4f(x)} + \lim_{x \rightarrow 3} 2f^{-1}(x)$ کدام است؟

- ① صفر ② ۴ ③ ۱ ④ حد ندارد.

۱۸- حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1 - \log_{\delta}^x}{2 + \log_{\delta}^x - \log_x^{125}}$ کدام است؟

- ① -۴ ② $-\frac{1}{4}$ ③ ۳ ④ $-\frac{1}{3}$

۱۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin^3 x - \cos^3 x}$ کدام است؟

④ $\frac{-3\sqrt{2}}{2}$

③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

② $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

① $\frac{-2\sqrt{2}}{3}$

۲۰- حاصل حد $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} \frac{3x + \sqrt{3x-1} - 1}{\sqrt{9x^2-1}}$ کدام است؟

④ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۱- اگر $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x^3 - 4x^2 + 4x}}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x-2)$ کدام است؟

④ $-3\sqrt{2}$

③ $3\sqrt{2}$

② $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

① $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

۲۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4[x^2] + 8x^2}{[4x^2] + 9x^2}$ کدام است؟

④ $\frac{5}{7}$

③ $\frac{12}{13}$

② ۱

① $\frac{8}{9}$

۲۳- حاصل $\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+2} - 3^n + 5}{3^{n+1} + 3^n - 1}$ کدام است؟

④ -۵

③ $+\infty$

② ۲

① ۳

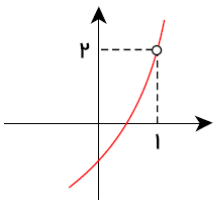
۲۴- نمودار مقابل قسمتی از تابع $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + ax + b}{x + c}$ را نشان می دهد. مقدار $f(2)$ کدام است؟

② ۱۰

④ ۶

① ۸

③ ۴



۲۵- حد عبارت $\frac{\tan 2x \sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin^2 x}$ وقتی $x \rightarrow 0^-$ کدام است؟

④ $3\sqrt{2}$

③ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

② $-\sqrt{2}$

① $-2\sqrt{2}$



۲۶- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax^n - 6}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ کدام است؟

- ① $-\frac{1}{6}$ ② $-\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$

۲۷- اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = -1$ ، آن گاه حد راست این عبارت در نقطه‌ی $x = -2$ کدام است؟

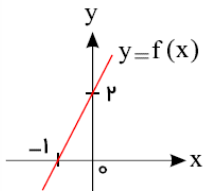
- ① $-\frac{4}{3}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{4}{3}$

۲۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3 - x}}}$ کدام است؟

- ① ۸ ② ۱۲ ③ ۱۶ ④ ۲۴

۲۹- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax + b\sqrt{x^2 + 3}}{x^2 - 3x + 2}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ باشد، آن گاه حد تابع $g(x) = xf(x)$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ کدام است؟

- ① ۴ ② -۸ ③ ۸ ④ -۴



۳۰- با توجه به نمودار تابع f ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2f^{-1}(x)}{x}$ کدام است؟

- ① ۳ ② ۱ ③ ۴ ④ ۲