

**واحدهای اندازه‌گیری:**

۱- **رادیان:** ۱ رادیان برابر است با اندازه‌ی زاویه مرکزی دایره‌ای که طول کمان روبه‌روی آن با شعاع آن دایره مساوی است.  
اگر  $L$  طول کمان روبه‌رو زاویه،  $r$  شعاع دایره و  $\alpha$  زاویه برحسب رادیان باشد، داریم:  $\alpha = \frac{L}{r}$

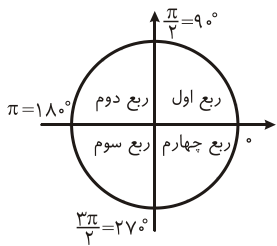
۲- **تبدیل درجه و رادیان به یکدیگر:**  $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$

**مثال:** در دایره‌ای به شعاع ۳، توسط زاویه  $\alpha$ ، کمانی به طول ۷ متر ایجاد می‌شود، با فرض  $\pi = ۳$ ، اندازه  $\alpha$  برحسب درجه کدام است؟

$$\alpha = \frac{L}{r} = \frac{Y}{۳} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{Y}{\pi} \Rightarrow D = \frac{Y}{۳} \times 180 = 140$$

**حل:**

**روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی:**



نسبت مثلثاتی \ ربع	اول	دوم	سوم	چهارم
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

**مثال:** علامت  $\cos(\frac{7\pi}{9})$  را مشخص کنید.

**حل:** چون  $\frac{\pi}{2} < \frac{7\pi}{9} < \pi$  قرار دارد (ناحیه دوم)، پس کسینوس منفی است.

**روابط مهم:**

۱)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

۲)  $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$

۳)  $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha$

۴)  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$

**نسبت‌های مثلثاتی قرینه:**

۱)  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$

۲)  $\cos(-\alpha) = +\cos \alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$

۴)  $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

**نسبت‌های مثلثاتی مکمل و متمم:**

۱)  $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$

۲)  $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$

$$۳) \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$۵) \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$۷) \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$۹) \sin\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$۱۱) \tan\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$۱۳) \sin\left(\frac{\pi}{۲} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$۱۵) \tan\left(\frac{\pi}{۲} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$۴) \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

$$۶) \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$۸) \cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

$$۱۰) \cos\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$۱۲) \cot\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

$$۱۴) \cos\left(\frac{\pi}{۲} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$۱۶) \cot\left(\frac{\pi}{۲} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

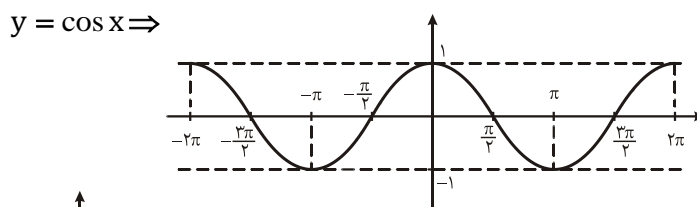
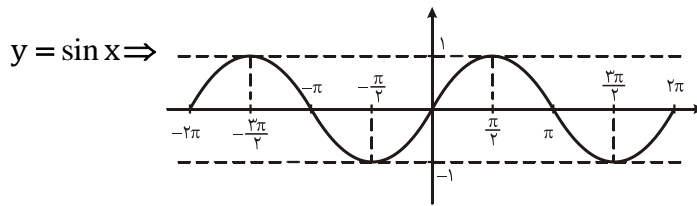
نسبت‌های مثلثاتی زوایا با مجموع یا تفاضل  $۲k\pi$  رادین:

هرگاه زاویه به صورت  $۲k\pi \pm \alpha$  بود، می‌توان از  $۲k\pi$  صرف‌نظر کرد.

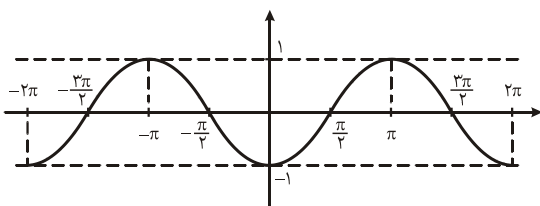
مثال:  $\sin(۲k\pi + \alpha) = \sin(\alpha)$

توابع مثلثاتی:

رسم تابع سینوس:



رسم تابع کسینوس:



مثال: نمودار تابع  $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$  را رسم کنید.

حل: چون  $x$  منهای  $\frac{\pi}{2}$  شده، پس به اندازه  $\frac{\pi}{2}$  به سمت راست می‌رویم.

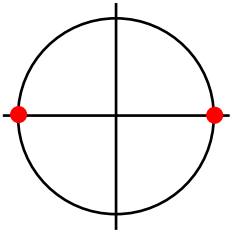
توابع  $y = a \cos(bx + c)$  و  $y = a \sin(bx + c)$

دوره تناوب این توابع  $T = \frac{۲\pi}{|b|}$  است. بیش‌ترین مقدار تابع برابر  $|a|$  و کم‌ترین مقدار تابع برابر  $-|a|$  می‌باشد.

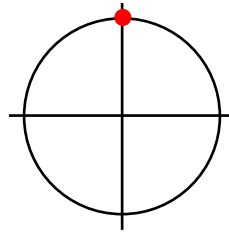
$$\begin{cases} \sin ۲\alpha = ۲ \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos ۲\alpha = \cos^۲ \alpha - \sin^۲ \alpha \\ \tan ۲\alpha = \frac{۲ \tan \alpha}{1 - \tan^۲ \alpha} \end{cases} \begin{cases} 1 - ۲ \sin^۲ \alpha \\ ۲ \cos^۲ \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cot \alpha + \tan \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha} \\ \cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha \end{cases}$$

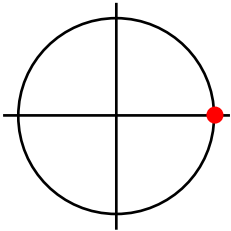
$$\begin{cases} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 0 \\ \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha \\ \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha \end{cases}$$



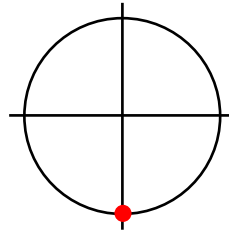
$$\begin{aligned} \sin X &= 0 \\ X &= K\pi \end{aligned}$$



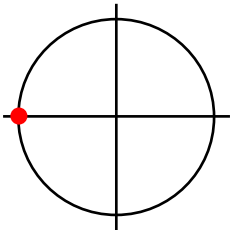
$$\begin{aligned} \sin X &= 1 \\ X &= 2K\pi + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



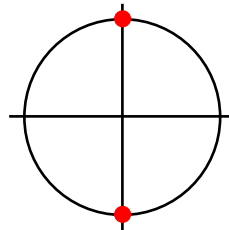
$$\begin{aligned} \cos X &= 1 \\ X &= 2K\pi \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sin X &= -1 \\ X &= 2K\pi - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

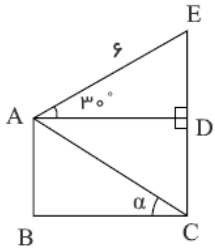


$$\begin{aligned} \cos X &= -1 \\ X &= 2K\pi + \pi \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \cos X &= 0 \\ X &= K\pi + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sin X = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} X = 2k\pi + \alpha \\ X = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \\ \cos X = \cos \alpha \rightarrow \begin{cases} X = 2k\pi + \alpha \\ X = 2k\pi - \alpha \end{cases} \\ \tan X = \tan \alpha \rightarrow \{X = k\pi + \alpha\} \end{cases}$$

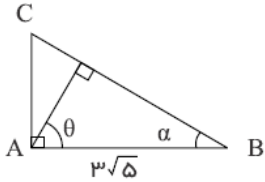


۱- در شکل مقابل چهارضلعی  $ABCD$  مستطیل است. اگر  $\tan \alpha = \frac{5\sqrt{3}}{9}$  باشد، طول پاره خط  $EC$  کدام است؟

- ۱) ۷  
 ۲) ۸  
 ۳) ۹  
 ۴) ۱۰

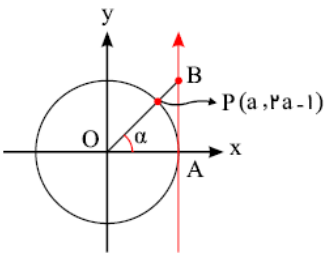
۲- اگر  $30^\circ < x < 25^\circ$  و  $\cos 2x = \frac{2m-1}{2}$ ، آنگاه حدود تغییرات  $m$  کدام فاصله است؟

- ۱)  $(1, \frac{3}{2})$   
 ۲)  $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$   
 ۳)  $(1, \frac{3}{2})$   
 ۴)  $(\frac{1}{2}, \cos 50^\circ)$



۳- در شکل مقابل زاویه  $\theta$  چند درجه است؟ ( $BC = 2\sqrt{15}$ )

- ۱)  $30^\circ$   
 ۲)  $45^\circ$   
 ۳)  $53^\circ$   
 ۴)  $60^\circ$



۴- با توجه به دایره مثلثاتی زیر، مساحت مثلث  $AOB$  چقدر است؟ ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ )

- ۱)  $\frac{2}{3}$   
 ۲)  $\frac{3}{4}$   
 ۳)  $\frac{3}{8}$   
 ۴)  $\frac{1}{2}$

۵- در صورتی که  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  باشد حاصل  $\sqrt{1-2\sin x} \sqrt{1-\sin^2 x}$  برابر است با:

- ۱)  $|\cos x - \sin x|$   
 ۲)  $|\sin x + \cos x|$   
 ۳)  $\sin x + \cos x$   
 ۴)  $-(\sin x + \cos x)$

۶- مقدار  $\sin 65^\circ \sin 140^\circ \sin 155^\circ$  برابر است با:

- ۱)  $\frac{1}{2} \sin 10^\circ$   
 ۲)  $\frac{1}{4} \cos 10^\circ$   
 ۳)  $\frac{1}{4} \sin 10^\circ$   
 ۴)  $\frac{1}{2} \sin 50^\circ$

۷- اگر  $\frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{1}{2}$  باشد آن گاه:

- ۱)  $\tan x = -\frac{4}{3}$   
 ۲)  $\tan x = -4$   
 ۳)  $\tan x = \frac{-3}{4}$   
 ۴)  $\tan x = \frac{3}{4}$

۸- حاصل  $\cot^2 15^\circ - \tan^2 15^\circ$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{8\sqrt{3}}{3}$   
 ۲)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$   
 ۳)  $8\sqrt{3}$   
 ۴)  $4\sqrt{3}$

۹- اگر  $\tan \theta = 0.2$  باشد، مقدار  $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$  کدام است؟

- ① -۲      ②  $\frac{1}{2}$       ③ ۲      ④ ۳

۱۰- اگر  $a \sin x + b \cos x + c = \frac{\sin x \cos x}{\sin x - \cos x + 1}$  حاصل  $a + b + c$  چقدر است؟

- ① صفر      ②  $\frac{1}{2}$       ③  $-\frac{1}{2}$       ④ ۱

۱۱- اگر به ازای هر زاویه حاده  $\theta$ ، تساوی  $2 \cot^2 \theta = \cos \theta \left( \frac{a}{1 - \cos \theta} + \frac{-b}{1 + \cos \theta} \right)$  برقرار باشد حاصل  $a \times b$  چقدر است؟

- ① صفر      ② ۲      ③ ۱      ④ -۲

۱۲- اگر  $\tan(15^\circ) = 2 - \sqrt{3}$  باشد مقدار  $B = \frac{3 \sin 375^\circ + 2 \sin 105^\circ}{\cos 165^\circ}$  چقدر است؟

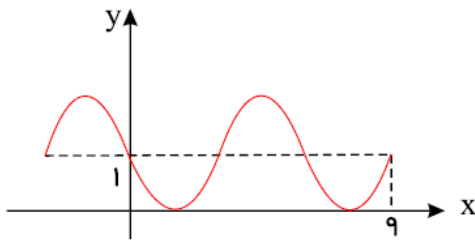
- ①  $3\sqrt{3} + 8$       ②  $3\sqrt{3} - 8$       ③  $-3\sqrt{3} - 8$       ④  $-3\sqrt{3} + 8$

۱۳- اگر  $\frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = \frac{3}{2}$  باشد، آن گاه حاصل  $\sin 2\alpha$  برابر با کدام گزینه است؟

- ①  $\frac{12}{13}$       ②  $-\frac{12}{13}$       ③  $\frac{5}{13}$       ④  $-\frac{5}{13}$

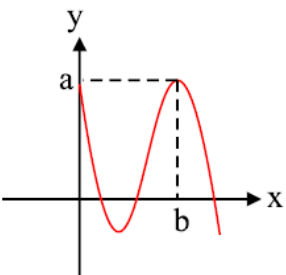
۱۴- نمودار زیر مربوط به تابع  $f(x) = a + \cos\left(-\frac{1}{2} + bx\right)\pi$  می‌باشد. حاصل  $f(29)$  کدام است؟

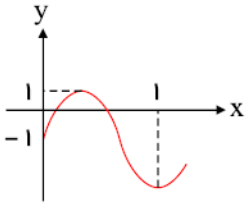
- ①  $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$       ②  $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$       ③  $\frac{1}{2}$       ④  $\frac{3}{2}$



۱۵- اگر نمودار  $y = \cos^2 x - \sin^2 x$  به شکل مقابل باشد، دوتایی  $(a, b)$  کدام گزینه خواهد بود؟

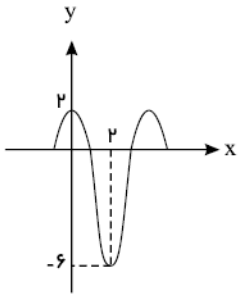
- ①  $(2, 2\pi)$       ②  $(1, 2\pi)$       ③  $(2, \pi)$       ④  $(1, \pi)$





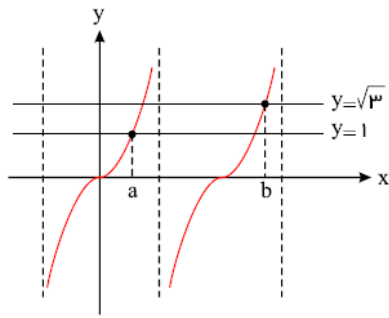
۱۶- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع  $y = a \sin b\pi x - 1$  است. مقدار  $a + b$  کدام می‌تواند باشد؟

- ۱)  $\frac{2}{5}$   
 ۲) ۳  
 ۳)  $\frac{3}{5}$   
 ۴) ۴



۱۷- اگر نمودار زیر مربوط به تابع  $y = a \sin \pi(\frac{1}{2} - bx) + c$  باشد، مقدار تابع به ازای  $x = \frac{7}{3}$  کدام است؟

- ۱)  $-2\sqrt{3} - 2$   
 ۲)  $2\sqrt{3} - 2$   
 ۳)  $-4$   
 ۴)  $-3\sqrt{3}$

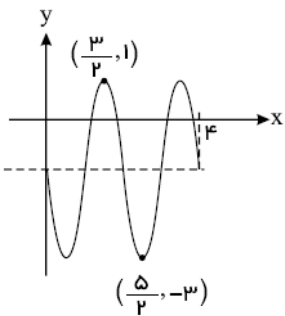


۱۸- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع  $y = \tan x$  را نشان می‌دهد. حاصل  $b - a$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{\pi}{12}$   
 ۲)  $\frac{5\pi}{12}$   
 ۳)  $\frac{7\pi}{12}$   
 ۴)  $\frac{13\pi}{12}$

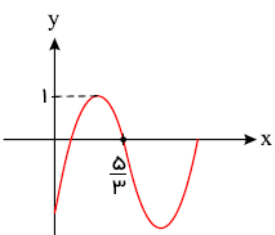
۱۹- اگر تابع  $f(x) = 5 \sin 3(\frac{\pi}{4}x - c)$  به ازای  $x = \frac{1}{4}$  ماکسیمم شود، طول نقطهٔ مینیمم آن، کدام می‌تواند باشد؟ (c، عدد ثابت است.)

- ۱)  $-\frac{5}{6}$   
 ۲)  $\frac{7}{6}$   
 ۳)  $\frac{11}{6}$   
 ۴)  $\frac{4}{3}$



۲۰- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = a \cos \pi(\frac{3}{4} + bx) + c$  است. حاصل  $abc$  کدام است؟

- ۱) ۱  
 ۲) ۲  
 ۳) -۱  
 ۴) -۲



۲۱- اگر قسمتی از نمودار  $f(x) = a \sin(b\pi x) - 1$  به شکل زیر باشد، مقدار  $b$  کدام گزینه می‌تواند باشد؟

- ۱) ۲  
 ۲)  $-\frac{1}{2}$   
 ۳)  $\frac{3}{2}$   
 ۴)  $-\frac{1}{2}$

۲۲- تعداد جواب‌های معادله  $(\sin x + \cos x)^2 = \cos 4x$  در بازه  $[0, \pi]$  کدام است؟

- ۱) ۵      ۲) ۷      ۳) ۳      ۴) ۴

۲۳- یکی از جواب‌های معادله  $\frac{\sin 2x}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 0$  مثلثاتی به کدام صورت است؟

- ۱)  $\frac{\pi}{5}$       ۲)  $\frac{\pi}{2}$       ۳)  $\frac{\pi}{6}$       ۴)  $-\frac{\pi}{4}$

۲۴- جواب کلی معادله  $\frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$  مثلثاتی به کدام صورت است؟

- ۱)  $x = k\pi + \frac{\pi}{3}$       ۲)  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$       ۳)  $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$       ۴)  $x = k\pi + \frac{5\pi}{6}$

۲۵- معادله  $(3 \sin x - 1)(3 \cos x - 2\sqrt{2}) = 0$  در فاصله  $0 \leq x \leq \pi$  چند ریشه‌ی متمایز دارد؟

- ۱) دو ریشه      ۲) سه ریشه      ۳) چهار ریشه      ۴) ریشه ندارد.

۲۶- جواب کلی معادله  $\tan \pi x \tan 2\pi x = 1$  کدام است؟

- ۱)  $x = \frac{k}{3} + \frac{1}{6}$       ۲)  $x = \frac{k}{3} - \frac{1}{6}$       ۳)  $x = k - \frac{1}{6}$       ۴)  $x = k + \frac{1}{2}$

۲۷- معادله  $\frac{\tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2}}{\cos x \cos 2x} = 8$  چند جواب در فاصله  $[0, \pi]$  دارد؟

- ۱) صفر      ۲) ۱      ۳) ۲      ۴) ۳

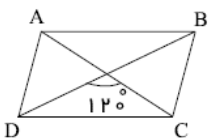
۲۸- معادله  $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$  در فاصله  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

- ۱) هیچ      ۲) ۱      ۳) ۲      ۴) ۴

۲۹- مجموع جواب‌های متمایز معادله  $\cos 2x + \cos^2 x + 4 \sin x = 3$  در بازه  $[0, \pi]$  کدام است؟

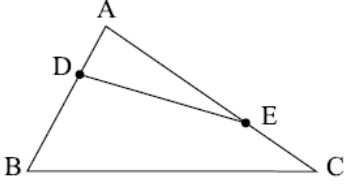
- ۱)  $\frac{3\pi}{2}$       ۲)  $2\pi$       ۳)  $\frac{5\pi}{4}$       ۴)  $\pi$

۳۰- در متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  اندازه‌ی قطرهای آن برابر ۶ و ۱۲ و زاویه‌ی بین دو قطر  $120^\circ$  است. مساحت مثلث  $ACD$  کدام است؟



- ۱)  $18\sqrt{3}$       ۲)  $9\sqrt{3}$       ۳) ۱۸      ۴) ۹

۳۱- در شکل مقابل  $3AD = AB$  و  $3EC = AC$ ، مساحت مثلث  $ADE$  چه نسبتی از مساحت مثلث  $ABC$  است؟



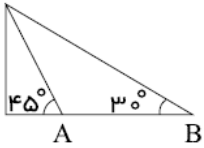
$\frac{1}{3}$  (۴)

$\frac{4}{9}$  (۳)

$\frac{2}{9}$  (۲)

$\frac{1}{9}$  (۱)

۳۲- از نوک پرچمی دو کابل در نقاط مشخص شده و در یک طرف دیگر به زمین متصل شده اند. اگر ارتفاع تیر  $2\sqrt{2}$  متر باشد فاصله ی دو نقطه کدام است؟



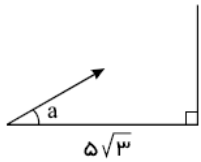
$\sqrt{6} + \sqrt{2}$  (۲)

$2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$  (۱)

$2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$  (۴)

$2(\sqrt{6} + 2\sqrt{2})$  (۳)

۳۳- مطابق شکل زیر، گلوله ای در فاصله  $5\sqrt{3}$  متری از یک دیوار با سرعت  $10 \frac{m}{s}$  و با زاویه حاده  $\alpha$  نسبت به سطح افقی پرتاب می شود. می دانیم مسافت افقی طی شده ( $d$ ) بر حسب سرعت پرتاب گلوله ( $v$ ) و زاویه پرتاب ( $\alpha$ ) از رابطه  $d = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$  به دست می آید. حدود  $\alpha$  کدام باشد تا گلوله قبل از رسیدن به زمین به دیوار برخورد کند؟



$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$  (۲)

$\frac{\pi}{12} < \alpha < \frac{\pi}{6}$  (۱)

$\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$  (۴)

$\frac{\pi}{8} < \alpha < \frac{\pi}{4}$  (۳)