

**توان‌های حقیقی:** اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی مثبت و مخالف  $1$  و  $x$  و  $y$  دو عدد حقیقی باشند، داریم:

$$۱) a^0 = 1$$

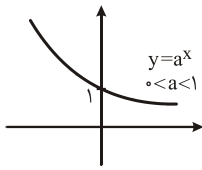
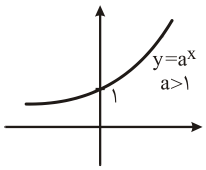
$$۲) a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$۳) a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$۴) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$۵) (ab)^x = a^x \cdot b^x$$

$$۶) (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$



**تابع نمایی:** هر تابع با ضابطه  $f(x) = a^x$  که در آن  $a$  یک عدد حقیقی مثبت و مخالف  $1$  باشد، تابع نمایی نام دارد.

**نکته:** اگر  $a > 1$  باشد، تابع صعودی و اگر  $0 < a < 1$  باشد، تابع نزولی است.

**نکته:** نمودار تابع، محور  $y$ ها را در نقطه  $(0, 1)$  قطع می‌کند و با محور  $x$ ها برخوردی ندارد.

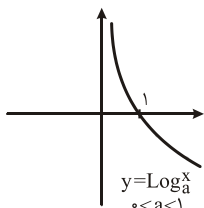
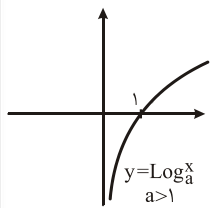
۲- نمودار توابع با ضابطه‌های  $y = a^x$  و  $y = a^{-x}$  ( $a > 0$  و  $a \neq 1$ ) نسبت به محور  $y$ ها قرینه‌اند.

**معادلات نمایی:** هر معادله به صورت  $a^u = b^v$  ( $a, b > 0$  و  $a, b \neq 1$ ) یک معادله نمایی است. اگر بتوان پایه دو طرف را یکسان کرد، آن‌گاه توان‌ها برابر هم قرار می‌گیرند.

**مثال:** معادله  $9^{3x+1} = 27^{-2x+1}$  را حل کنید.

$$\begin{cases} 9^{3x+1} = (3^2)^{3x+1} = 3^{6x+2} \\ 27^{-2x+1} = (3^3)^{-2x+1} = 3^{-6x+3} \end{cases} \Rightarrow 3^{6x+2} = 3^{-6x+3} \Rightarrow 6x+2 = -6x+3 \Rightarrow x = \frac{1}{12}$$

**حل:**



**تابع لگاریتمی:** وارون تابع نمایی با ضابطه  $f(x) = a^x$  را به صورت  $f^{-1}(x) = \text{Log}_a^x$  نشان می‌دهیم و آن را لگاریتم  $x$  در مبنای  $a$  می‌نامیم.

**نکته:** نمودار تابع، محور  $x$ ها را در نقطه  $(1, 0)$  قطع می‌کند و با محور  $y$ ها برخوردی ندارد.

**دامنه توابع لگاریتمی:** دامنه تابع  $f(x) = \text{Log}_{h(x)}^{g(x)}$  از حل نامعادلات روبه‌رو به دست می‌آید:

$$\begin{cases} ۱) g(x) > 0 \\ ۲) h(x) > 0 \\ ۳) h(x) \neq 1 \end{cases}$$

**مثال:** دامنه تابع  $f(x) = \text{Log}_{(x+1)}^{(x-2)}$  را به دست آورید.

$$\begin{cases} ۱) x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ ۲) x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow D_f = (2, +\infty) \\ ۳) x+1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 \end{cases} \quad \text{حل:}$$

ویژگی‌های لگاریتمی:

$$۱) \text{Log}_a^1 = 0$$

$$۲) \text{Log}_a^a = 1$$

$$۳) \text{Log}_a^x = b \Rightarrow a^b = x$$

$$۴) \text{Log}_a^{x^m} = m \text{Log}_a^x$$

$$۵) \text{Log}_{a^n}^x = \frac{1}{n} \text{Log}_a^x$$

$$۶) \text{Log}_a^x + \text{Log}_a^y = \text{Log}_a^{x \cdot y}$$

$$۷) \text{Log}_a^x - \text{Log}_a^y = \text{Log}_a^{\frac{x}{y}}$$

$$۸) \text{Log}_b^a = \frac{\text{Log}_c^a}{\text{Log}_c^b}$$

مثال: اگر  $\text{Log}^2 = 0/3$  و  $\text{Log}^3 = 0/48$ ، مقدار تقریبی  $\text{Log}^{0/75}$  کدام است؟

$$\text{حل: } 0/75 = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{Log}^{0/75} = \text{Log}^{\frac{3}{4}} = \text{Log}^3 - \text{Log}^4 = \text{Log}^3 - \text{Log}^{2^2} = 0/48 - 2 \times 0/3 = -0/12$$

معادلات لگاریتمی: اگر تساوی  $\text{Log}_a^x = \text{Log}_a^y$  برقرار باشد، می‌توان نتیجه گرفت که  $x = y$   
مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$\text{Log}_7^{(x+1)} + \text{Log}_7^{(x+4)} = 2$$

حل:

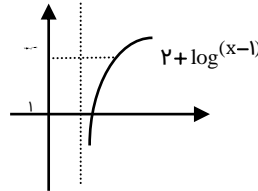
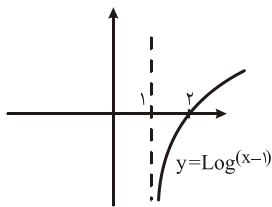
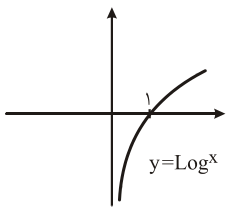
$$\Rightarrow \text{Log}_7^{(x+1)(x+4)} = 2 \Rightarrow (x+1)(x+4) = 7^2 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 49 \Rightarrow x^2 + 5x - 45 = 0 \Rightarrow x(x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$$

مقدار  $x = -5$  قابل قبول نیست زیرا عبارت جلوی لگاریتم را منفی می‌کند.

مثال: نمودار تابع  $y = 2 + \text{Log}^{(x-1)}$  را رسم کنید.

- مقادیر  $x$  منهای یک شدند، پس ما یک واحد به سمت راست می‌رویم.

- تابع لگاریتمی با عدد ۲ جمع شده است، پس ۲ واحد به سمت بالا می‌رویم.



کاربرد تابع لگاریتمی: مقیاس ریشتر، مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین لرزه است که میزان انرژی آزاد شده زلزله را نشان می‌دهد. اگر بزرگی زلزله‌ای برابر  $M$  و انرژی آزاد شده برابر  $E$  در واحد (Erg) باشد داریم:

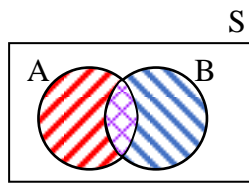
$$\text{Log}^E = 11/8 + 1/5M$$

دنباله حسابی

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n-1)d \\ d = \frac{a_m - a_n}{m - n} \\ a, b, c \Rightarrow a + c = 2b \end{cases}$$

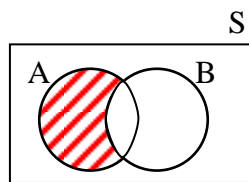
دنباله هندسی

$$\begin{cases} a_n = a_1 \times r^{n-1} \\ r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n} \\ a, b, c \Rightarrow ac = b^2 \end{cases}$$



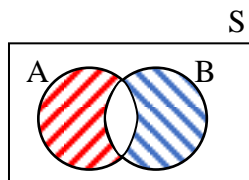
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

هر دو  
لااقل



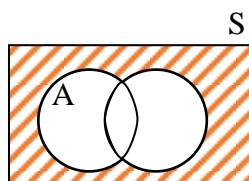
$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

OK-No

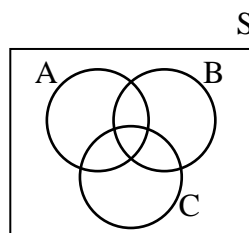


$$n(A \Delta B) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$$

فقط یک رشته



$$n(A \cup B)' = n(S) - n(A \cup B)$$



$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - n(A \cap B) \\ &\quad - n(A \cap C) \\ &\quad - n(B \cap C) \\ &\quad + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$



۱- اگر  $\log 25 = A$ ، حاصل  $\log(1 + \sqrt{3}) + \frac{1}{2} \log(4 - 2\sqrt{3})$  کدام است؟

- ①  $1 - \frac{A}{2}$       ②  $\frac{1-A}{2}$       ③  $1 - 2A$       ④  $1 + 2A$

۲- معادله  $\log_9^{x^2-2x+1} + \log_3^{x+1} = 1$  چند ریشه دارد؟

- ① صفر      ② ۱      ③ ۲      ④ ۳

۳- اگر  $\log 125 = 9k$  باشد، مقدار  $\log \sqrt[3]{0.32}$  بر حسب  $k$  کدام است؟

- ①  $1 - 5k$       ②  $\frac{7}{3} - 5k$       ③  $3 - 3k$       ④  $\frac{1}{4}$

۴- اگر  $\begin{cases} \log_x^x + \log_y^y = 2 \\ x^2 + y^2 = 46 \end{cases}$  مقدار لگاریتم  $\sqrt{x+y}$  در پایه ۸ چقدر است؟

- ①  $\frac{1}{2}$       ②  $\frac{1}{4}$       ③ ۲      ④ ۴

۵- اگر  $\log_{16}^6 = a$ ، حاصل  $\log_{16}^{64}$  کدام است؟

- ①  $\frac{6}{4a+1}$       ②  $\frac{4}{6a+3}$       ③  $\frac{6}{2a+3}$       ④  $\frac{8}{4a+7}$

۶- دامنه‌ی تعریف تابع  $f(x) = \log_p^{ax+b}$  بازه  $(\frac{1}{p}, +\infty)$  است. اگر  $f(1) = 2$ ، آن‌گاه مقدار  $f(3)$  کدام است؟

- ①  $\frac{5}{3}$       ② ۶      ③ ۳      ④ ۴

۷- مجموع ریشه‌های معادله  $4^x - 2^{x+2} + 15 = 0$  کدام است؟

- ①  $\log 2$       ②  $\log 5$       ③  $\log_2^1$       ④  $\log_2^{15}$

۸- از حل دستگاه معادلات  $\begin{cases} 3^{x-y} \times 9^{x+y} = 1 \\ \log y = \log x + \log 9 \end{cases}$  مقدار  $\log_p^{y+1}$  کدام است؟

- ①  $\frac{3}{2}$       ② ۲      ③ ۳      ④  $\frac{5}{2}$

۹- معادله  $\log x + \log(x-1) - \log(x-2) = \log 6$  چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

- ① ۱      ② ۲      ③ ۳      ④ صفر

۱۰- از دستگاه معادلات  $\begin{cases} \log(x^2 + 4y^2) = 2 \log \sqrt{2} + \log 23 \\ \log x + \log y = 2 \log 3 - \log 2 \end{cases}$  حاصل لگاریتم  $x + 2y$  در مبنای ۱۶ کدام است؟

- ①  $\frac{1}{5}$       ②  $\frac{1}{25}$       ③  $\frac{1}{75}$       ④  $\frac{1}{5}$

۱۱- اگر  $9^a = 27\sqrt{3}$  و  $\log \sqrt{b} - \log(2-a) = 1$ ، مقدار  $b$  است؟

- ①  $\frac{6}{25}$       ②  $\frac{4}{5}$       ③  $\frac{2}{5}$       ④ ۲۵

۱۲- حاصل ضرب جواب‌های معادله‌ی  $4 = \log_8^x - 9 \log_8^x$  کدام است؟

- ① ۸      ②  $\frac{1}{8}$       ③  $\frac{1}{4}$       ④ ۴

۱۳- اگر  $f(x) = \log_3^{(x-1)}$ ، آن‌گاه دامنه‌ی تعریف تابع  $y = \sqrt{4 - f^{-1}(x)}$  شامل چند عدد طبیعی است؟

- ① صفر      ② ۱      ③ ۲      ④ ۳

۱۴- اگر حاصل عبارت  $A = 2^{\frac{(\log_2^x - \log_2^x)}{\sqrt{2}}}$  برابر با یک باشد، آن‌گاه مقدار  $\log_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{x}}$  کدام است؟

- ①  $-\frac{1}{5}$       ②  $-\frac{4}{3}$       ③  $-\frac{1}{2}$       ④  $-\frac{3}{7}$

۱۵- نمودار دو تابع با معادله‌های  $y = \log(x^2 - 1)$  و  $y = 1 + \log(x + 1)$  یکدیگر را در چند نقطه قطع می‌کنند؟

- ① صفر      ② ۱      ③ ۲      ④ ۳

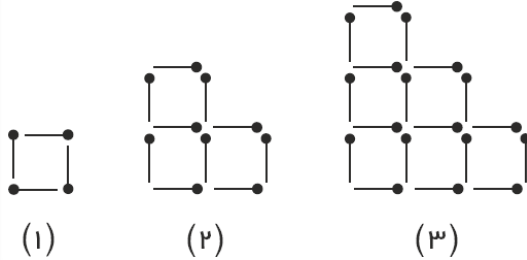
۱۶- هرگاه  $\log_8^{25x^2} + \log_x^{25} = 7$  باشد، آن‌گاه  $\log_{16}^{(x^2+3)}$  کدام می‌تواند باشد؟

- ①  $\frac{3}{2}$       ②  $\frac{3}{4}$       ③  $\frac{4}{3}$       ④  $\frac{2}{3}$

۱۷- در دنباله‌ی حسابی  $a_n$  با قدرنسبت ۳، رابطه‌ی  $a_8^2 + a_7^2 = a_6^2 + a_9^2$  برقرار است. حاصل  $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$  کدام است؟

- ①  $4/25$       ②  $4/5$       ③  $4/75$       ④ ۴

۱۸- با تعدادی چوب کبریت مطابق الگوی زیر اشکالی را می‌سازیم. تعداد چوب کبریت‌های استفاده شده در مرحله‌ی هفتم کدام است؟



- ① ۵۳  
② ۵۴  
③ ۶۹  
④ ۷۰

۱۹- اگر  $A = B \cap C$ ، حاصل  $(A - B) \cup (B - C)$  کدام است؟

- ① A      ② B      ③  $B - A$       ④  $C - A$

۲۰- اگر  $A \subseteq B \subseteq C'$  باشد و مجموعه‌های A, B, C به ترتیب دارای ۳, ۶, ۱۲ و ۳۰ عضو باشند حاصل  $n(((A \cup B) - C)')$  کدام است؟ (مجموعه مرجع است.)

- ① ۲۴      ② ۱۸      ③ ۱۲      ④ ۱۰

۲۱- در یک پرسش و پاسخ پیرامون علاقمندی به رشته‌ی تجربی و ریاضی از میان ۱۶۰ نفر، ۸۰ نفر اعلام کردند که به هر دو رشته‌ی ریاضی و تجربی علاقمند هستند. ۱۵ نفر علاقمندی خود را فقط به رشته‌ی ریاضی اعلام کردند. ۲۰ نفر هم گفتند که هیچ‌کدام از این دو رشته علاقه ندارند. چند نفر فقط به رشته‌ی تجربی علاقمند هستند؟

- ① ۴۵      ② ۸۰      ③ ۳۵      ④ ۱۲۵



۲۲- یک دوره جشنواره‌ی فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در حال برگزاری است که در بین آن‌ها ۷ فیلم پویانمایی و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به طوری که ۳ فیلم پویانمایی با مضمون طنز می‌باشند. تعداد کل فیلم‌هایی که غیرپویانمایی و غیرطنز هستند، کدام است؟

- ۹ (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴)

۲۳- اگر جملات پنجم و هفتم و دهم یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند. قدرنسبت این دنباله‌ی هندسی کدام است؟

- ۱ (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{4}{3}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

۲۴- در دو دنباله‌ی حسابی  $\{7, 10, 13, \dots\}$  و  $\{1.5, 9, \dots\}$  چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

- ۱ (۱) ۷۴ (۲) ۷۵ (۳) ۷۶ (۴) ۷۷

۲۵- دنباله‌ی حسابی  $150, 144, 138, \dots$  چند جمله‌ی مثبت دارد؟

- ۱ (۱) ۲۶ (۲) ۲۵ (۳) ۲۴ (۴) ۲۷

۲۶- اجتماع دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های  $(A - B)$  و  $(B - A)$  به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هر یک از مجموعه‌های  $A$  و  $B$ ، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه‌ی اشتراک آن‌ها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه‌ی جدید، کدام است؟

- ۱ (۱) ۲۲ (۲) ۲۳ (۳) ۲۴ (۴) ۲۶

۲۷- اگر مجموعه‌های  $A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in N \right\}$  و  $B = \left\{ \frac{x}{8} \mid x \in N \right\}$  مفروض باشند، کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

- ۱ (۱)  $A - B$  (۲)  $B - A$  (۳)  $A \cap B$  (۴)  $A \cup B$

۲۸- اگر  $A$  مجموعه‌ی اعداد طبیعی که بر ۶ بخش پذیرند،  $B$  مجموعه‌ی اعداد طبیعی دو رقمی کمتر از ۴۰ که بخش پذیر بر ۳ باشند. مجموعه‌ی  $B - A$  چند عضو دارد؟

- ۱ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۲۹- در دنباله‌ی اعداد  $a_1 = 1$  و  $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ، جمله‌ی دهم، کدام است؟

- ۱ (۱) ۹۷۹ (۲) ۹۸۷ (۳) ۱۰۱۵ (۴) ۱۰۲۳

۳۰- در یک دنباله‌ی عددی، مجموع چهار جمله‌ی اول ۱۵ و مجموع پنج جمله‌ی بعدی آن ۳۰ می‌باشد. جمله‌ی یازدهم این دنباله کدام است؟

- ۱ (۱)  $7/5$  (۲) ۸ (۳)  $8/5$  (۴) ۹