

تابع: به رابطه‌ای تابع گفته می‌شود که به ازای هر x (روی دامنه) دقیقاً یک $f(x)$ دریافت کنیم.

توابع گویا: هر تابعی به شکل $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم، که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ ، چندجمله‌ای هستند و

چندجمله‌ای $Q(x)$ صفر نیست. مثل $f(x) = \frac{2x}{x+4}$

دامنه توابع گویا: از سال‌های گذشته می‌دانیم که مخرج هیچ کسری نمی‌تواند صفر باشد، پس اعدادی که مخرج را صفر می‌کنند، عضو دامنه نیستند: {ریشه‌های مخرج} $Df = R - \{ \dots \}$

مثال: دامنه تابع $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$ را به دست آورید.

حل:

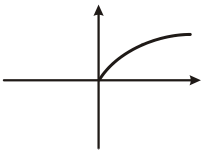
$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{x-1+x}{x(x-1)} \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow Df = R - \{0, 1\}$$

تساوی دو تابع: دو تابع f و g را برابر نامیم، هرگاه:

(الف) دامنه توابع قبل از ساده کردن با هم برابر باشند.

(ب) ضابطه ۲ تابع بعد از ساده کردن با هم برابر باشند.

مثال: ۲ تابع $f(x) = \frac{3x}{x}$ و $g(x) = 3$ با هم برابر نیستند زیرا دامنه تابع f برابر است با $R - \{0\}$ ولی دامنه تابع g برابر است با R .



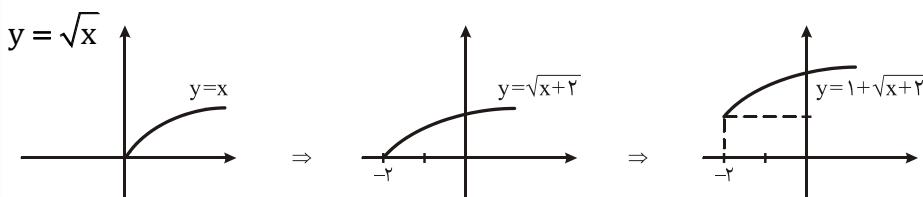
توابع رادیکالی: هر تابعی به شکل $f(x) = \sqrt{P(x)}$ را یک تابع رادیکالی می‌گوییم که در آن، $P(x)$ منفی نیست.

رسم توابع رادیکالی: نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به صورت مقابل می‌باشد.

۱- اگر x با عددی مثل a ($a > 0$) جمع شود، نمودار به اندازه a به سمت چپ و اگر x از عدد مثل a ($a > 0$) کم شود، نمودار به اندازه a به سمت راست منتقل می‌شود.

۲- اگر y با عدد مثل b ($b > 0$) جمع شود، نمودار به اندازه b به سمت بالا و اگر y از عدد مثل b ($b > 0$) کم شود، نمودار به اندازه b به سمت پایین منتقل می‌شود.

مثال: نمودار تابع $y = 1 + \sqrt{x+2}$ کدام است؟



توابع جزء صحیح: تابع جزء صحیح به هر عدد صحیح به خود همان عدد را نسبت می‌دهد و هر عدد غیرصحیح را به سمت پایین رند می‌کند. $[x] = a \Leftrightarrow a \leq x < a+1$

مثال:

۱) $[5] = 5$

۲) $[4/5] = 4$

۳) $[-1/5] = -2$

نکته: $[x \pm n] = [x] \pm n$

مثال: مجموعه جواب معادله $[x+1] + 2[x] = 7$ کدام است؟

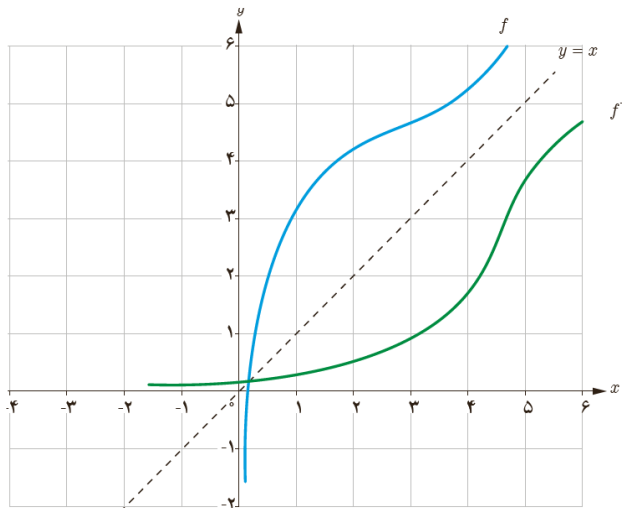
حل: $[x+1] + 2[x] = 7 \Rightarrow [x] + 1 + 2[x] = 7 \Rightarrow 3[x] = 6 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow \boxed{2 \leq x < 3}$

وارون یک تابع:

اگر در تابع f که به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب است، جای مؤلفه‌ها را عوض کنیم، مجموعه جدیدی از زوج مرتب به دست می‌آید که به آن وارون تابع f می‌گوییم و آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم.

مثال: وارون تابع $f = \{(1, 2), (3, 4)\}$ برابر است با $f^{-1} = \{(2, 1), (4, 3)\}$

نکته: نمودار تابع f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ قرینه یکدیگرند.



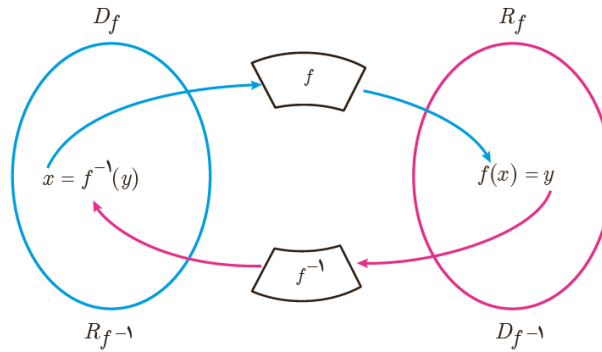
به دست آوردن ضابطه وارون یک تابع:

کافی است که ابتدا x را برحسب y حساب کنیم و در نهایت به جای y از نماد x و به جای x از $f^{-1}(x)$ استفاده کنیم.

مثال: ضابطه وارون تابع $f(x) = 2x - 1$ کدام است؟

حل: $y = 2x - 1 \Rightarrow 2x = y + 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$

نکته:



اگر f تابعی وارون پذیر و f^{-1} وارون آن باشد، همواره داریم:

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad ; \quad x \in D_{f^{-1}}$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad ; \quad x \in D_f$$

تابع یک به یک: به تابعی که در زوج مرتب متفاوت خود، مؤلفه‌های دوم تکراری نداشته باشد، تابع یک به یک می‌گویند.
مثال: اگر تابع $f = \{(-۲, ۲), (m, ۳), (-۱, ۳), (۲m, a)\}$ یک به یک باشد، a را به دست آورید.

$$\begin{cases} (-۱, ۳) \in f \\ (m, ۳) \in f \end{cases} \Rightarrow m = -۱ \Rightarrow f = \{(-۲, ۲), (-۱, ۳), (-۲, a)\} \Rightarrow a = ۲$$

حل:

اعمال روی توابع: دو تابع f و g با دامنه‌های D_f و D_g را در نظر می‌گیریم:

۱) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

و $D_{f+g} = D_f \cap D_g$

۲) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

و $D_{f-g} = D_f \cap D_g$

۳) $(f \cdot g)(x) = f(x) \times g(x)$

و $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$

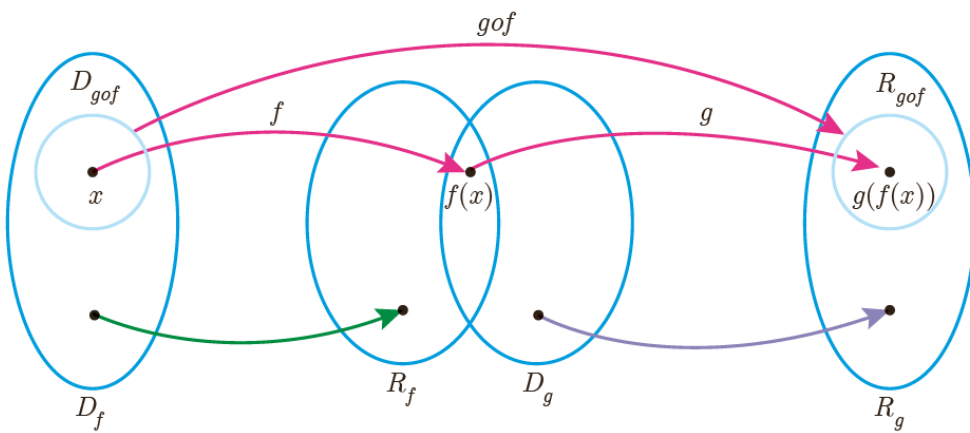
۴) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

و $D_{\frac{f}{g}} = \{D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\}$

و به همین ترتیب در مورد دامنه تابع مرکب هم حرف میزنیم:

دامنه تابع مرکب:

دامنه تابع مرکب $g \circ f$ مجموعه x هایی است که هم زمان در دو شرط زیر صدق کنند:
۱- x در دامنه f قرار داشته باشد.
۲- $f(x)$ در دامنه g قرار داشته باشد.



$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

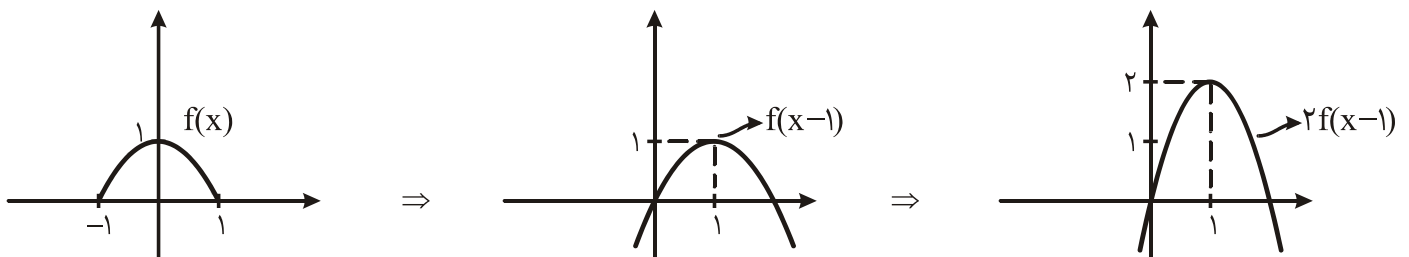
رسم نمودار $kf(x)$ از روی $f(x)$:

برای رسم نمودار تابع با ضابطه $kf(x)$ کافی است، عرض هر نقطه از نمودار تابع $f(x)$ را، k برابر کنیم.

رسم نمودار $f(kx)$ از روی $f(x)$:

برای رسم نمودار تابع با ضابطه $f(kx)$ کافی است، طول هر نقطه از نمودار تابع $f(x)$ را، $\frac{1}{k}$ برابر کنیم.

مثال: براساس نمودار تابع $f(x)$ ، نمودار تابع $2f(x-1)$ را رسم کنید.



رسم نمودار $-f(x)$ \Leftarrow کافی است نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم تا نمودار $-f(x)$ به دست آید.
رسم نمودار $f(-x)$ \Leftarrow کافی است نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم تا نمودار $f(-x)$ به دست آید.

رسم نمودار $|f|$:

برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت‌هایی که نمودار f زیر محور x هاست، قرینه نمودار f را نسبت به محور x ها رسم کنیم.

رسم نمودار $f(|x|)$:

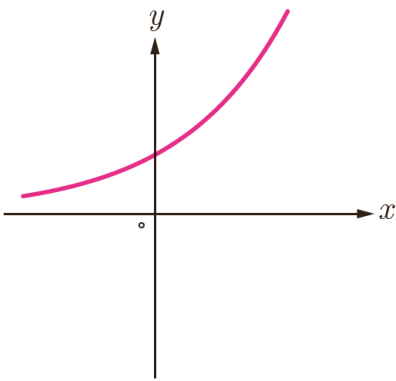
کافی است نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت‌هایی که نمودار سمت چپ محور y است نمودار را حذف کنیم و سمت راست را به سمت چپ قرینه کنیم.

تابع یکنوا: تابعی که یا صعود کامل و یا نزول کامل باشد.

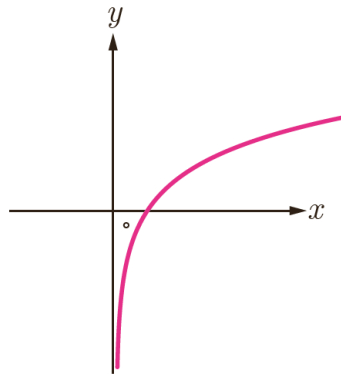
تابع صعودی: هر چه x پیش‌روی می‌کند، y هم پیش‌روی دارد. (موافق عمل می‌کند) مشتق آن همواره مثبت است.

تابع نزولی: هر چه x پیش‌روی می‌کند، y پَس‌روی دارد. (مخالف عمل می‌کند) مشتق آن همواره منفی است.

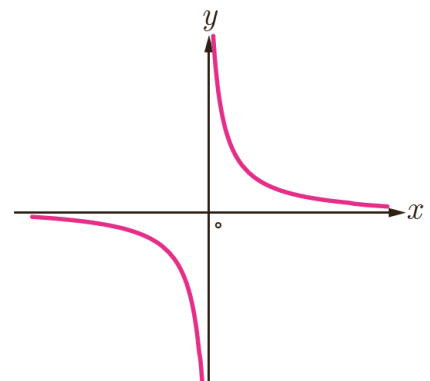
نکته: کلمهٔ اکیداً را موقعی اضافه می‌کنیم که تابع قسمت افقی نداشته باشد. (پاره‌خط افقی نداشته باشد)



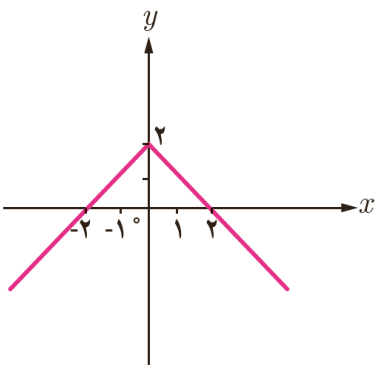
صعودی



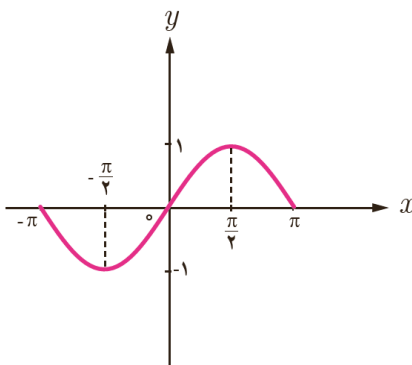
صعودی



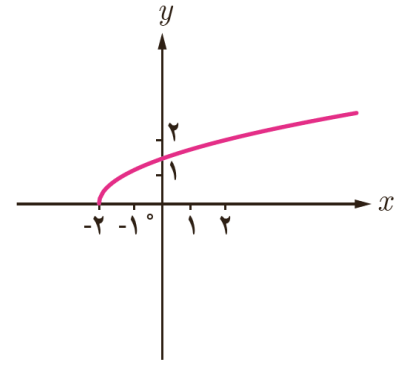
نه صعودی نه نزولی



نه صعودی نه نزولی



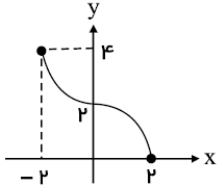
نه صعودی نه نزولی



صعودی

۱- اگر تابع $y = g(x)$ از مبدأ بگذرد و $f(x) = \frac{2x^2 + ax + b}{g(x) - 16}$ یک تابع ثابت با دامنه‌ی $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ باشد، حاصل $\frac{f(b)}{g(a) - 2}$ کدام است؟

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{32}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ تعریف نشده



۲- اگر نمودار تابع f به صورت شکل مقابل باشد، دامنه‌ی تابع $f \circ f$ شامل چند عدد صحیح خواهد بود؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۳- اگر $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{4-x}$ باشد، برد تابع $g(x) = f \circ f^{-1}(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ① ۵ ② ۴ ③ ۳ ④ بی‌شمار

۴- دو تابع $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 6), (4, 7)\}$ و $g(x) = x + \sqrt{x}$ مفروض‌اند. به ازای چند مقدار a ، $f^{-1}(g(3a)) = 3$ می‌باشد؟

- ① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

۵- مجموعه‌ی طول نقاط مشترک نمودار توابع $f(x) = \sqrt[3]{4-x^3}$ و $f^{-1}(x)$ چند عضو دارد؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ این مجموعه نامتناهی است.

۶- دامنه‌ی تابع $g(x) = f(2x-1)$ بازه $[-1, 3]$ است. دامنه‌ی تابع $h(x) = f(3x+2)$ کدام است؟

- ① $[0, 2]$ ② $[0, 8]$ ③ $[-\frac{5}{3}, 2]$ ④ $[-\frac{5}{3}, 1]$

۷- اگر f تابعی اکیداً صعودی و $f(1) = 0$ باشد، دامنه‌ی تابع $g(x) = \sqrt{\frac{x-4}{f(3-x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ① صفر ② ۲ ③ ۳ ④ بی‌شمار

۸- محل برخورد وارون تابع $f(x) = 2x - |x| + 3$ با محور y ها از نیمساز ربع اول و سوم چقدر فاصله دارد؟

- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$

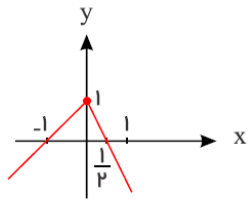
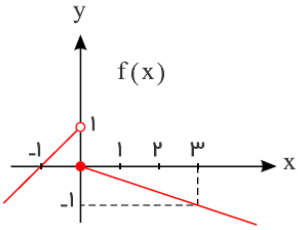
۹- بزرگ‌ترین بازه برای k که در آن تابع نمایی $y = \left(\frac{5-k}{1-3k}\right)^x$ همواره اکیداً صعودی باشد، کدام است؟

- ① $(-1, \frac{1}{3})$ ② $(-2, \frac{1}{3})$ ③ $(-3, \frac{1}{3})$ ④ $(-4, \frac{1}{3})$

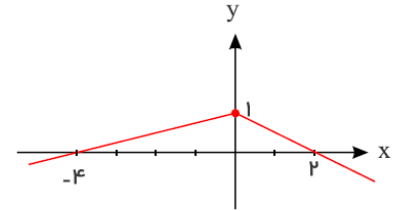
۱۰- باقی‌مانده تقسیم عبارت $p(x) = x^3 - x^2 + kx + 4$ بر عبارت $x - 2$ برابر صفر است، حاصل جمع صفرهای تابع p کدام است؟

- ① -2 ② 2 ③ 1 ④ 3

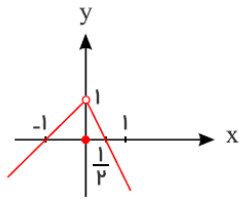
۱۱- نمودار تابع f به صورت روبه‌رو است، اگر $g(x) = \begin{cases} f(-x) & ; x > 0 \\ f(\frac{x}{2}) & ; x \leq 0 \end{cases}$ باشد، نمودار $g(2x)$ کدام است



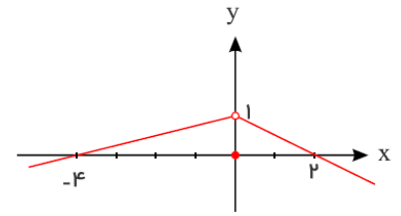
①



②



③



④

۱۲- اگر $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 24x - 32$ ، نمودار تابع $|f(x)|$ در بازه $[a, +\infty)$ اکیداً نزولی است، حداقل مقدار a کدام است؟

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$

۱۳- اگر باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x - 1$ و $x + 1$ به ترتیب ۳ و -2 باشد، k کدام باشد تا $f(x) = p(x+1) - 2p(x+3) + x^2 - 3kx$ بر $x + 2$ بخش پذیر باشد؟

- ① $\frac{2}{3}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $-\frac{3}{2}$

۱۴- در تجزیه عبارت $x^6 - 64$ به فرم $(x+2)p(x)$ ، اگر A مجموع ضرایب منفی و B مجموع ضرایب مثبت $p(x)$ باشد، $2B - A$ کدام است؟

- ① 42 ② 62 ③ 74 ④ 84

$-\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

$-\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

۱۴- در تجزیه عبارت $x^6 - 64$ به فرم $(x+2)p(x)$ ، اگر A مجموع ضرایب منفی و B مجموع ضرایب مثبت $p(x)$ باشد، $2B - A$ کدام است؟

۸۴ (۴)

۷۴ (۳)

۶۲ (۲)

۴۲ (۱)

۱۵- اگر f تابعی یک به یک، $f(-2) = \frac{5}{3}$ و $f(x) = 2 - 3f(5x - 1)$ باشد، حاصل $g^{-1}(-3)$ کدام است؟

$-\frac{1}{5}$ (۴)

$\frac{1}{5}$ (۳)

$-\frac{3}{5}$ (۲)

$\frac{3}{5}$ (۱)

۱۶- اگر $f(x) = x(x+4)$ و $f(g(x+1)) = (x-1)(x-5)$ باشد، ضابطه $g(x)$ کدام می تواند باشد؟

$-x + 2$ (۴)

$-x$ (۳)

$x - 4$ (۲)

$x - 5$ (۱)

۱۷- اگر $(fog)(x) = 2g(x) + 8$ و $(gof)(x) = x^2$ باشد، آنگاه مقدار $g(4)$ کدام است؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)

۱۸- اگر دامنه تابع $f(x) = y_1$ بازه $[1, 4]$ و دامنه تابع $g(x) = y_2$ بازه $(2, 9)$ باشد، دامنه تابع $h(x) = 2f(x^2) - g(3 - 2x)$ کدام بازه است؟

\emptyset (۴)

$(-2, -1]$ (۳)

$[1, 2)$ (۲)

$(-3, \frac{1}{2})$ (۱)

۱۹- تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$ در سه نقطه محور طول ها را قطع می کند. اگر حاصل ضرب طول این نقاط $+3$ و $f(2) = 15$ باشد، a کدام است؟

-1 (۴)

۳ (۳)

-3 (۲)

۱ (۱)

۲۰- اگر f در مجموعه اعداد حقیقی اکیداً نزولی باشد، دامنه تعریف تابع $y = \sqrt{f(|x|) - f(2)}$ کدام است؟

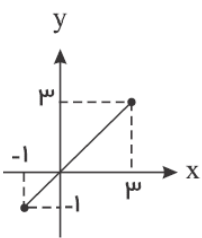
$[-3, 2]$ (۴)

$(-\infty, 0]$ (۳)

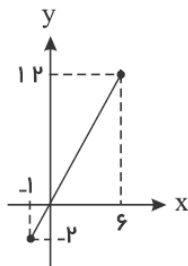
$[-2, 2]$ (۲)

$[2, +\infty)$ (۱)

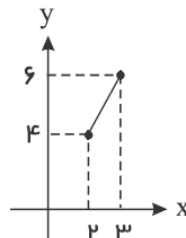
۲۱- f تابعی خطی با دامنه $[-1, 3]$ است که از دو نقطه $(-1, 2)$ و $(1, 4)$ می گذرد. نمودار تابع $g(x) = f(x) + f^{-1}(x)$ کدام است؟



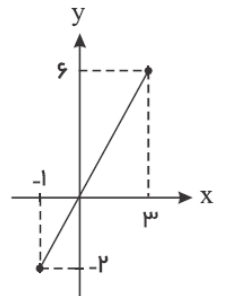
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

۲۲- تابع $f(x) = |x - 1| - |x + 3|$ در بازه $[a, b]$ یک به یک بوده و $b - a$ حداکثر مقدار ممکن است. ضابطه وارون آن در این بازه کدام است؟

$$f^{-1}(x) = -\frac{x}{2} - 1; -3 \leq x \leq 1 \quad \text{Ⓐ}$$

$$f^{-1}(x) = -\frac{x}{2} - 1; -4 \leq x \leq 4 \quad \text{Ⓐ}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - 1; -3 \leq x \leq 1 \quad \text{Ⓒ}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - 1; -4 \leq x \leq 4 \quad \text{Ⓑ}$$

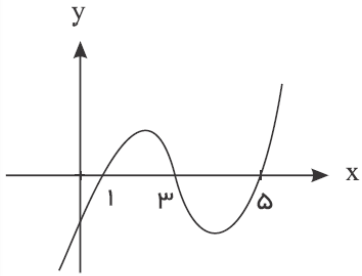
۲۳- اگر $f(x) = 4 - \sqrt{x - 3}$ باشد، طول نمودار رسم شده تابع $g(x) = f \circ f^{-1}(x) + f^{-1} \circ f(x)$ برابر کدام گزینه است؟

$$\sqrt{5} \quad \text{Ⓒ}$$

$$2 \quad \text{Ⓑ}$$

$$\sqrt{3} \quad \text{Ⓓ}$$

$$\sqrt{2} \quad \text{Ⓐ}$$



۲۴- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، دامنه $y = \frac{4}{\sqrt{(x^2 - 5x + 4)f(x)}}$ کدام است؟

$$(-\infty, 1) \quad \text{Ⓓ}$$

$$(4, +\infty) \quad \text{Ⓐ}$$

$$(3, 4) \cup (5, +\infty) \quad \text{Ⓒ}$$

$$(1, 3) \cup (5, +\infty) \quad \text{Ⓑ}$$

۲۵- حدود m برای آن که تابع $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & ; x \leq 1 \\ mx + 5 & ; x > 1 \end{cases}$ یک به یک باشد، کدام است؟

$$m < 0 \quad \text{Ⓒ}$$

$$m \leq -1 \quad \text{Ⓑ}$$

$$m > 0 \quad \text{Ⓓ}$$

$$m \geq -1 \quad \text{Ⓐ}$$

۲۶- تابع f یک به یک بوده و نمودار آن محور عرض ها را در نقطه ای به عرض ۳ قطع می کند. اگر $g(x) = 2f^{-1}(5 - x) + 3$ ، آنگاه $g^{-1}(3)$ کدام است؟

$$2 \quad \text{Ⓒ}$$

$$-3 \quad \text{Ⓑ}$$

$$3 \quad \text{Ⓓ}$$

$$-2 \quad \text{Ⓐ}$$

۲۷- اگر $f = \{(0, -1), (1, 2), (-2, 3), (3, 1), (2, 5)\}$ و $g = \{(1, -3), (3, 2), (4, 1)\}$ باشد، آنگاه مجموع اعضای برد تابع $(g \circ f^{-1})^{-1}$ کدام است؟

$$4 \quad \text{Ⓒ}$$

$$3 \quad \text{Ⓑ}$$

$$2 \quad \text{Ⓓ}$$

$$1 \quad \text{Ⓐ}$$

۲۸- ضابطه ی وارون تابع $f(x) = 2^{\left(\frac{1}{\log_2 x}\right)}$ کدام است؟

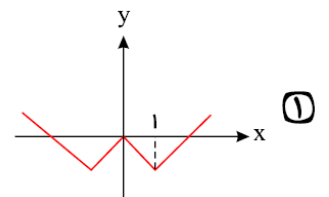
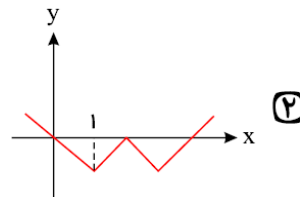
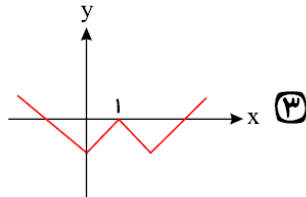
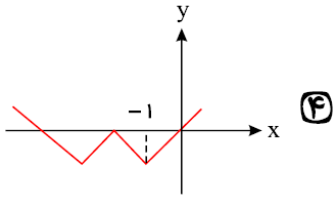
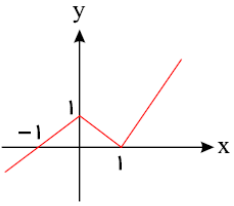
$$-\frac{1}{f(x)} \quad \text{Ⓒ}$$

$$-f(x) \quad \text{Ⓑ}$$

$$\frac{1}{f(x)} \quad \text{Ⓓ}$$

$$f(x) \quad \text{Ⓐ}$$

۲۹- نمودار تابع f به صورت مقابل است نمودار تابع $|f(-x+2)|-1$ کدام است؟



۳۰- اگر $f(x) = 2^x$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x)}$ به کدام صورت است؟

(A) $(-\infty, -1] \cup (0, 1]$

(B) $[-1, 0) \cup [1, +\infty)$

(C) $[-1, 0) \cup (0, 1]$

(D) $\mathbb{R} - (-1, 1)$

۳۱- اگر $f(x) = x - [x]$ آنگاه برد تابع $g(x) = f(2x-3) - 2f(x)$ کدام می باشد؟

(A) $\{0, 1\}$

(B) $\{-1, 0\}$

(C) $[0, 1]$

(D) $[-1, 0]$

۳۲- اگر $f(x) = x + |x|$ و $g(x) = |x+1| + 1$ ؛ آنگاه برد تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ، کدام است؟

(A) $[1, +\infty)$

(B) $[0, +\infty)$

(C) $[0, 2)$

(D) $[0, 1)$