



بازه ها، معادله، نامعادله و تعیین علامت / بازه ها

1 به ازای چه مقادیری از m نقطه $x = 2m$ در بازه $(-3m + 1, m - 4)$ قرار دارد؟

$$-\frac{1}{5} \leq m < 4 \quad (4)$$

$$-4 \leq m < -\frac{1}{5} \quad (3)$$

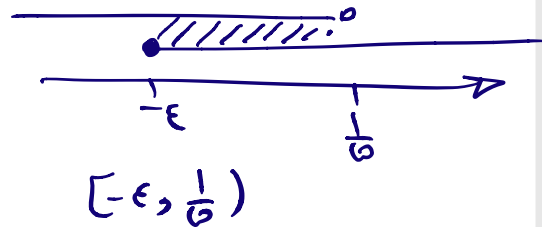
$$\frac{1}{5} < m \leq 4 \quad (2)$$

$$-4 \leq m < \frac{1}{5} \quad (1) \checkmark$$

$$m - 4 < 2m < -3m + 1$$

$$2m < -3m + 1 \rightarrow 5m < 1 \rightarrow m < \frac{1}{5}$$

$$m - 4 < 2m \rightarrow m > -4$$





بازه ها، معادله، نامعادله و تعیین علامت / معادله

معادله $\frac{1}{x+1} = \frac{1-2x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2-x+1}$ چند ریشه دارد؟ ۲

(۱) صفر

فرض $n = x$

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1-2n}{(n+1)(n^2-n+1)} + \frac{2}{n^2-n+1}$$

خرج نرک

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1-2n + 2(n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}$$

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1-2n + 2n + 2}{(n+1)(n^2-n+1)}$$

$$1 = \frac{2}{n^2-n+1} \rightarrow n^2-n+1 = 2$$

$$n^2-n-1 = 0 \rightarrow (n-2)(n+1) = 0$$

$n = 2$ ✓
 $n = -1$ ✗

مقادیر مثبت و منفی



بازه ها، معادله، نامعادله و تعیین علامت / معادله

a کدام باشد تا $x = 4$ جواب معادله $\frac{x-2}{5x} + \frac{4}{15x} = \frac{1}{a}$ باشد؟

۳

$$-\frac{1}{6} \quad (4)$$

$$-6 \quad (3)$$

$$\frac{1}{6} \quad (2)$$

۶ (✓)

$$\frac{x-2}{5x} + \frac{4}{15x} = \frac{1}{a} \quad \xrightarrow{x=4}$$

$$\frac{\cancel{x}-2}{5 \times \cancel{x}} + \frac{\cancel{4}}{15 \times \cancel{x}} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{a} \quad \rightarrow$$

$$\frac{3+2}{30} = \frac{1}{a} \quad \rightarrow \quad \frac{5}{30} = \frac{1}{a} \quad \rightarrow a = \frac{30}{5} = 6$$



بازه ها، معادله، نامعادله و تعیین علامت / معادله

۴

معادله $\sqrt{4x-3} = 0$ از نظر تعداد جواب‌ها چگونه است؟

(۱) یک جواب دارد.

(۲) دو جواب هم علامت دارد.

(۴) جواب ندارد. ✓

(۳) دو جواب با علامت مختلف دارد.

مطابق کنند ← معادله را در هر دو طرف
مطابق کنند ← در هر دو طرف ۲ را سازند
یک کینه جواب دارد معادله

صرف نمکند

$$\sqrt{4x-3} = 2-4x \xrightarrow{\text{در هر دو طرف ۲}} 4x-3 = 4 + 16x^2 - 16x$$

$$\rightarrow 16x^2 - 12x + 7 = 0$$

$\rightarrow x=1 \rightarrow 2-4 = -2 \neq 0$
 $\rightarrow x = \frac{7}{16} \rightarrow 2 - 4 \times \frac{7}{16} = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4} < 0$



بازه ها، معادله، نامعادله و تعیین علامت / نامعادله و تعیین علامت

مجموعه جواب نامعادله $(x^2 - x + 1)(x^2 - 4) \geq 0$ کدام است؟

۵

۴ .

۳ $\mathbb{R} - [-2, 2]$

۲ $\mathbb{R} - (-2, 2)$

۱ $[-2, 2]$ ✓

$$4 - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 4$$

$$\rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$\rightarrow x^2 - x + 1$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

منفی $x^2 < 0$ هرگز نیست



بازه ها، معادله، نامعادله و تعیین علامت / نامعادله و تعیین علامت

۶ جواب نامعادله $x - 1 > \frac{x^3 + x^2 - 5}{x^2 + x + 1}$ کدام است؟

(۴) $(-2, 2)$

(۳) $[-2, 2]$

(۲) $\mathbb{R} - (-2, 2)$

(۱) $\mathbb{R} - [-2, 2]$ ✓

هر دو ان نامعادله برعکس تبدیل می شود ← هر عبارت صادر برعکس می شود!

$$\frac{x^3 + x^2 - 5}{x^2 + x + 1} - (x - 1) > 0 \rightarrow \frac{x^3 + x^2 - 5 - (x - 1)(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} > 0$$

$$\rightarrow \frac{x^3 + x^2 - 5 - (x^3 - 1)}{x^2 + x + 1} > 0$$

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 + x + 1} > 0$$

$$\rightarrow x^2 - 4 > 0 \rightarrow x^2 > 4$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

$$\begin{cases} x < -2 \\ x > 2 \end{cases}$$

مجموعه جواب



بازه ها، معادله، نامعادله و تعیین علامت / نامعادله و تعیین علامت

مجموعه جواب نامعادله $\frac{2\sqrt{x}+4}{4\sqrt{x}+3} > 1$ کدام است؟ ۷

$(0, 1)$ (۴) ✓

$(0, 1)$ (۳)

$(-\infty, 1)$ (۲)

$(-\infty, 1)$ (۱)

$$\frac{2\sqrt{x} + 4}{4\sqrt{x} + 3} > 1$$

$$2\sqrt{x} + 4 > 4\sqrt{x} + 3$$

→

$$2\sqrt{x} + 4 > 4\sqrt{x} + 3$$

عوارضت

$$1 > \sqrt{x} \rightarrow \sqrt{x} < 1$$

$$\sqrt{x}$$

$$x \geq 0$$

$$x < 1$$

جامع



به ازای کدام مقدار m نقطهٔ مینیمم تابع $y = 2x^2 + 6x + m$ در ناحیهٔ سوم مختصات قرار دارد؟ ۸

$m > \frac{15}{2}$ (۴)
 $m < \frac{15}{2}$ (۳)
 $m < \frac{9}{2}$ (۲) ✓
 $m > \frac{9}{2}$ (۱)

$$-\frac{b}{2a} < 0 \rightarrow -\frac{3}{2} < 0 \quad \checkmark$$

$$-\frac{\Delta}{4a} < 0 \rightarrow -\frac{\Delta}{8} < 0 \rightarrow \Delta > 0$$

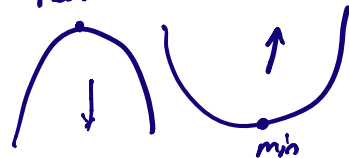
$$\rightarrow 2x - \frac{\Delta}{4} > 0 \rightarrow 2x > \frac{\Delta}{4} \rightarrow m < \frac{15}{2}$$

$$m < \frac{9}{2}$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$s \mid -\frac{b}{2a}$$

$$\max \quad -\frac{\Delta}{4a}$$





تابع و معادله درجه دوم / تعداد ریشه ها

به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع $y = (m - 1)x^2 + \sqrt{3}x + m$ ، همواره در زیر محور x ها است؟

۹

$m > \frac{3}{2}$ (۴)

$1 < m < \frac{3}{2}$ (۳)

$-\frac{1}{2} < m < 1$ (۲)

$m < -\frac{1}{2}$ (۱) ✓

$m < 1$ → $m < 1$

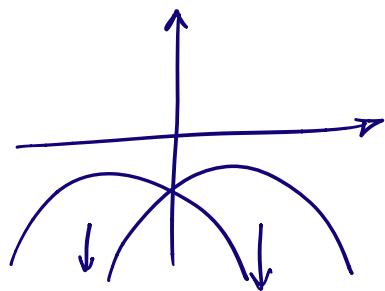
$\Delta < 0$, $a < 0$

همواره منفی

$\Delta < 0$ → $\sqrt{3}^2 - 4(m-1)m < 0$

$\Delta < 0$, $a > 0$

همواره مثبت



→ $3 - 4m^2 + 4m < 0$ → $4m^2 - 4m - 3 > 0$

→ $\Delta = 16 - 4(4)(-3) = 72$ → $m = \frac{4 \pm \sqrt{72}}{8} = \left\langle \begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{matrix} \right\rangle$





تابع و معادله درجه دوم / تعداد ریشه ها

به ازای چه مقادیری از a معادله $(x^2 + 2ax + 1)(x^2 - 1) = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است؟

$a < 1$ (1) $a = \pm 1$ (2) $-1 < a < 1$ (3) $-1 \leq a \leq 1$ (4)

۱۰

$x^2 + 2ax + 1 = 0$

باید ریشه تکراری داشته باشد

$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

$\Delta < 0 \rightarrow 4a^2 - 4(1)(1) < 0 \rightarrow 4a^2 < 4 \rightarrow a^2 < 1 \rightarrow -1 < a < 1$

$x = 1 \rightarrow 1 + 2a + 1 = 0 \rightarrow 2a = -2 \rightarrow a = -1$

$x = -1 \rightarrow 1 - 2a + 1 = 0 \rightarrow 2a = 2 \rightarrow a = 1$

$[-1, 1]$



تابع و معادله درجه دوم / جمع و ضرب ریشه ها

مجموع ریشه‌های معادله $x^2 + (2m - 3)x + 4m + 1 = 0$ برابر ۷ است. حاصل ضرب این ریشه‌ها کدام است؟

۱۱

۵ (۴)

۵ (۳)

۷ (۲) ✓

۷ (۱)

$$-b/a = \sum \rightarrow -\frac{2m-3}{1} = \sum$$

$$\rightarrow 2m-3 = -7 \rightarrow 2m = 3-7 = -4$$

$$\rightarrow m = -2$$

$$c/a = \frac{4m+1}{1} = 4m+1 = -8+1 = -7$$

$\Delta \gamma$

\downarrow
 $\sum \pm \sqrt{\Delta}$

$$x_1 + x_2 = \sum = -b/a$$

$$x_1 x_2 = p = c/a$$



تابع و معادله درجه دوم / جمع و ضرب ریشه ها

اگر بین ریشه‌های معادله $x^2 + \Delta x + 2m + 1 = 0$ رابطه $x' + 2x'' = -8$ برقرار باشد مقدار m کدام است؟ x' و x'' ریشه‌های معادله‌اند

۱۲

$\frac{7}{2}$ (۴)

$\frac{5}{2}$ (۳) ✓

$\frac{3}{2}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

~~$x' + 2x'' = -8$~~
 ~~$x' + x'' = -5$~~ $\rightarrow x' = -2 \rightarrow x'' = -2 \rightarrow x'x'' = 4$

$\frac{2m+1}{1} = 7 \rightarrow 2m+1 = 7 \rightarrow 2m = 6 \rightarrow m = \frac{3}{1}$



تابع و معادله درجه دوم / تشکیل معادله درجه دوم

تجربی ۹۴

ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کمتر است؟

۱۳

$x^2 + 5x + 2 = 0$ (۴) $x^2 - 5x + 2 = 0$ (۳) $x^2 + 3x + 1 = 0$ (۲) $x^2 - 3x + 1 = 0$ (۱)

$2x^2 - 3x - 1 = 0$ → ریشه‌ها $\alpha, \beta \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{3}{2} \\ \alpha\beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$

① ریشه‌ها α, β

$\frac{1}{\alpha} - 1$ و $\frac{1}{\beta} - 1 \rightarrow S = \frac{1}{\alpha} - 1 + \frac{1}{\beta} - 1$

$= \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} - 2 = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} - 2 = -3 - 2 = -5$

② ریشه‌ها α
 $k(x - \alpha)(x - \beta) = 0$

③ ریشه‌ها α
 $k(x - \alpha)^2 = 0$

④ ریشه‌ها α, β و ضریب p
 $k(x^2 - Sx + p) = 0$

$x^2 + 5x + 2 = 0$



تابع و معادله درجه دوم / علامت ریشه ها

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + 12$ محور x ها را در دو نقطه به

۱۴

ریاضی ۹۵

طولهای منفی قطع می کند؟

هیچ مقدار m

هر مقدار m

$-1 < m < 2$

$m > 2$ (۱)

$$\Delta > 0 \rightarrow \cancel{4(m+1)^2} - \cancel{4(12)(m-2)} > 0 \rightarrow m^2 + 2m + 1 - 12m + 24 > 0$$

$$\rightarrow m^2 - 10m + 25 > 0 \rightarrow (m - 5)^2 > 0 \rightarrow \boxed{m \neq 5}$$

$$S < 0 \rightarrow \frac{2(m+1)}{m-2} < 0 \rightarrow -1 < m < 2$$

$$P > 0 \rightarrow \frac{12}{m-2} > 0 \rightarrow m - 2 > 0 \rightarrow \boxed{m > 2}$$

ریشه های منفی

$\Delta > 0$
 $S < 0$
 $P > 0$



تابع و معادله درجه دوم / علامت ریشه ها

به ازای چه مقادیری از m نمودار سهمی $x^2 - 2mx + (2m + 3) = 0$ فقط از ناحیه سوم نمی گذرد؟

۱۵

$m > 3$ (۴ ✓)

$m > -\frac{3}{2}$ (۳)

$m > 0$ (۲) یا $m < -1$ یا $m > 3$ (۱)

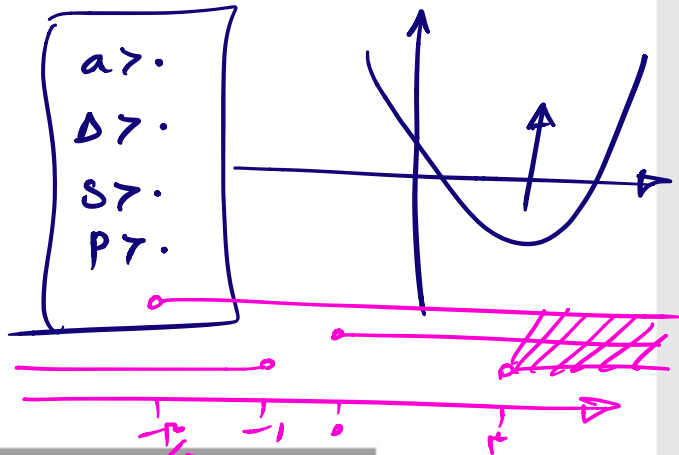
۱۷۰ ✓

$x^2 - 2mx + (2m + 3) > 0 \rightarrow m^2 - 2m - 3 > 0$

$\rightarrow (m - 3)(m + 1) > 0 \rightarrow \begin{cases} m > 3 \\ -m < -1 \end{cases}$

$2m > 0 \rightarrow m > 0$

$\frac{2m + 3}{1} > 0 \rightarrow 2m > -3 \rightarrow m > -\frac{3}{2}$





۱۶

اگر معادله $mx^2 - 4x^2 + m - 3 = 0$ دارای چهار ریشه حقیقی متمایز باشد، حدود m کدام است؟

$3 < m < 4$ (۴)

$-1 < m < 4$ (۳)

$m > 3$ (۲)

$1 < m < 3$ (۱)

$mx^2 - 4x^2 + m - 3 = 0 \rightarrow$ متمایز متباین

$\Delta > 0 \quad \delta > 0 \quad p > 0$

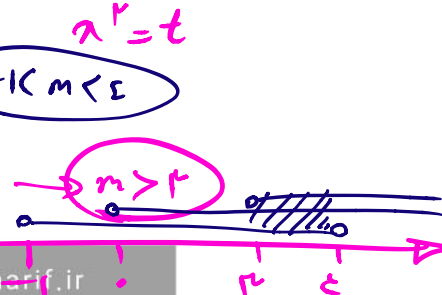
$4 - 4(m)(m-3) > 0 \rightarrow 4 - m^2 + 12m > 0$

$m^2 - 12m - 4 < 0 \rightarrow (m-4)(m+1) < 0 \rightarrow -1 < m < 4$

$\frac{3}{m} > 0 \rightarrow m > 0$

$\frac{m-3}{m} > 0 \rightarrow m-3 > 0 \rightarrow m > 3$

معادله درجه دوم





تابع و معادله درجه دوم / معادلات قابل تبدیل به درجه دوم

تجربی ۹۰

$$ax^2 + bx = t$$

$$t^2 - 18t + 72 = 0 \rightarrow \Delta = 18^2 - 4(1)(72) = 324 - 288 = 36$$

$$t = \frac{18 \pm 6}{2} = \begin{cases} 12 \\ 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x = 12 \\ x^2 + x = 6 \end{cases}$$

$$x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow (x+4)(x-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow (-2)$$

مجموع ریشه‌های حقیقی معادله $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ کدام است؟
 ۴ (۴) ۲ (۳) -۲ (۲) ✓ -۴ (۱)

۱۷



هرگاه $3x - x^2 \geq 0$ حداقل تابع $f(x) = |2x + 1| + |x - 4|$ از حداکثر آن چقدر کم تر است؟

۱۸

۶ (۴)

۳ (۳)

۵ (۲)

۲ (۱)

بین درجه ۰

$$3x - x^2 \geq 0 \rightarrow x(3-x) \geq 0$$

$$0 \leq x \leq 3$$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$0 \leq x \leq 3 \rightarrow 0 \leq 2x \leq 6 \rightarrow 1 \leq 2x+1 \leq 7 \rightarrow |2x+1| = 2x+1$

$0 \leq x \leq 3 \rightarrow -4 \leq x-4 \leq -1 \rightarrow |x-4| = 4-x$

$$f(x) = 2x+1 + 4-x = x+5$$

$0 \leq x \leq 3 \rightarrow$ $\begin{matrix} \text{min} \\ \circ \end{matrix} \leq x+5 \leq \begin{matrix} \text{max} \\ \circ \end{matrix}$



مجموع ریشه‌های معادله $||x - 2| - 3| = 4$ کدام است؟

۱۹

-۶ (۴)

۴ (۳) ✓

۶ (۲)

-۴ (۱)

$$||x - 2| - 3| = 4 \rightarrow \begin{cases} |x - 2| - 3 = 4 \rightarrow |x - 2| = 7 \\ |x - 2| - 3 = -4 \rightarrow |x - 2| = -1 \end{cases}$$

$|f(x)| = a$
 $\downarrow a \geq 0$
 $f(x) = \pm a$

$$|x - 2| = 7 \rightarrow \begin{cases} x - 2 = 7 \rightarrow x = 9 \\ x - 2 = -7 \rightarrow x = -5 \end{cases} \rightarrow 9 + (-5) = 4$$



مجموع ریشه‌های معادله $|2x| - |x^2 - 3x| = 0$ برابر کدام است؟

۲۰

۴ (۶-)

۳ (۵-)

۲ (۶)

۵ (۱)

$$|2n| = |n^2 - 3n| \xrightarrow{|f|=|g|} f = \pm g$$

$$2n - 3n = n^2 \rightarrow n^2 - n = 0 \rightarrow n(n-1) = 0 \begin{cases} n=1 \\ n=0 \end{cases}$$

$$2n - 3n = -n^2 \rightarrow n^2 - n = 0 \rightarrow n(n-1) = 0 \begin{cases} n=1 \\ n=0 \end{cases}$$

$$0 + 1 + 0 = 1$$



۲۱ اگر بازه (a, b) مجموعه جواب نامعادله $\left| \frac{x}{1+|x|} \right| < \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $b - a$ کدام است؟

$$\left| \frac{x}{1+|x|} \right| < \frac{1}{2} \rightarrow \frac{|x|}{1+|x|} < \frac{1}{2}$$

۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)
۲ (۳) ✓

$$\frac{|x|}{1+|x|} < \frac{1}{2} \rightarrow |x| < \frac{1}{2}(1+|x|)$$

$$\rightarrow |x| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|x| \rightarrow \frac{1}{2}|x| < \frac{1}{2} \rightarrow |x| < 1$$

$$\Rightarrow -1 < x < 1$$

$$\left| f(x) \right| < a$$

$$\xrightarrow{a > 0} -a < f(x) < a$$

$$\left| f(x) \right| > a$$

$$\xrightarrow{a > 0} \begin{cases} f(x) > a \\ f(x) < -a \end{cases}$$



خارج ۹۵

مجموعه جواب نامعادله $|x^2 + 1| > |x - 2| - 2x + 1$ ، به صورت کدام بازه هاست؟

۲۲

(۱, ۲) (۴) ✓

(-۱, ۲) (۳)

(-۱, ۱) (۲)

(-۲, ۱) (۱)

همین روش در حل معادلات دیگر، قدمه‌ها طایفه نیز آید.

$x \geq 2$

$|x - 2| = x - 2$

$x^2 + 1 - (x - 2) > x^2 + 1 \rightarrow x^2 - x - 2 < 0$

$x < 2$

$|x - 2| = 2 - x$

$(x - 2)(x + 1) < 0 \rightarrow -1 < x < 2$

$x^2 + 1 - (2 - x) > x^2 + 1 \rightarrow x^2 - 2x + 2 < 0$

$(x - 1)(x - 2) < 0$

$1 < x < 2$



نامعادله $\left| \frac{2x-3}{x+2} \right| < 1$ معادل کدام نامعادله است؟ ۲۳

$$|3x - 7| < 7 \quad (4)$$

$$|3x - 8| < 7 \quad (3)$$

$$|2x - 3| < 5 \quad (2)$$

$$|x - 3| < 4 \quad (1)$$

$$\frac{|2n - 3|}{|n + 2|} < 1$$

~~$$|n + 2| < |n + 2|$$~~

$$-7 < 3n - 8 < 7$$

$$1 < 3n < 15$$

$$|2n - 3| < |n + 2|$$

$$-5 < 2n - 3 < 5$$

$$-2 < n < 4$$

$$-1 < n < 4$$

$$-2 < n - 3 < 4$$

$$-1 < n < 7$$

$$|f| < |g|$$

برای ۲۳

$$\varepsilon n^2 + 9 - 12n < n^2 + \varepsilon + \varepsilon n \rightarrow 2n^2 - 12n + 0 < \cdot$$

$$\Delta = 108 - 4(2)(0) = 108 \rightarrow \frac{12 \pm 12}{2}$$

$$\frac{1}{2} < n < 10$$

$$= < \frac{5^2}{1/3}$$



سنجش ۹۵

مجموعه جواب نامعادله $|2x - 5| + 2|x + 1| < 6$ کدام بازه است؟

۲۴

\emptyset (۴)

$(1, \frac{5}{2})$ (۳)

$(-1, 3)$ (۲)

$(-1, \frac{5}{2})$ (۱)

Handwritten solution for the inequality $|2x - 5| + 2|x + 1| < 6$.

Case 1: $x < -1$

$$5 - 2x + 2(-x - 1) < 6 \rightarrow 5 - 2x - 2x - 2 < 6 \rightarrow 3 - 4x < 6 \rightarrow -4x < 3 \rightarrow x > -\frac{3}{4}$$

Since $x < -1$ and $x > -\frac{3}{4}$, there is no solution in this interval.

Case 2: $x \geq -1$

$$5 - 2x + 2(x + 1) < 6 \rightarrow 5 - 2x + 2x + 2 < 6 \rightarrow 7 < 6$$

This is a contradiction, so no solution in this interval.

Case 3: $x > 0$

$$2x - 5 + 2(x + 1) < 6 \rightarrow 2x - 5 + 2x + 2 < 6 \rightarrow 4x - 3 < 6 \rightarrow 4x < 9 \rightarrow x < \frac{9}{4}$$

Since $x > 0$ and $x < \frac{9}{4}$, the solution is $(0, \frac{9}{4})$.

Number line diagram showing critical points at $x = -1$ and $x = \frac{5}{2}$.





۲۵

نمودار تابع $y = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2$ را ۴ واحد به طرف X های منفی و یک واحد به طرف Y های مثبت انتقال می دهیم. نمودار جدید

و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع اند؟

تجربی ۹۳

-۲ (۴)

-۲/۵ (۳)

-۳ (۲)

-۳/۵ (۱)

$$y = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2 \xrightarrow{n \rightarrow n+2} \left| \frac{1}{2}(n+2) \right| - 2 \rightarrow \left| \frac{1}{2}(n+2) \right| - \underbrace{2+1}_{-1}$$

$$\left| \frac{1}{2}(n+2) \right| - 1 = \left| \frac{1}{2}n \right| - 2 \rightarrow |n+2| - 2 = |n| - 2$$

$$\rightarrow |n+2| - |n| = -2$$

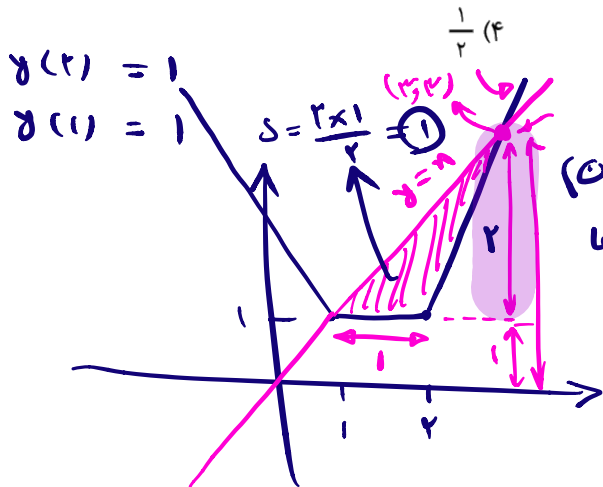
$0, 0 - 2, 0 = -2 \neq -2$
 $1 - 3 = -2$



۲۶

۱ (۱)

مساحت ناحیه بین منحنی $y = |x - 2| + |x - 1|$ و خط $y = x$ برابر است با:



- ① رسم کردن منحنی
- ② در نظر گرفتن نقاط گزیده
- ③ گزیده شدن + دیواره‌ها

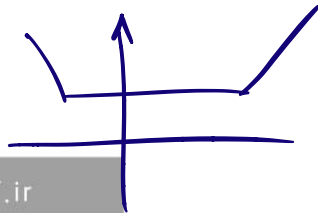
$$y = |n - 2| + |n - 1|$$

$$y = 2n - 3$$

$$y = n$$

نمونه سوال

$$y = |n - a| + |n - b|$$



$$2n - 3 = n$$

$$\rightarrow n = 3$$



اگر $a = 121/48$ و $b = 1/12$ ، آن گاه حاصل $[\log a] + [\log b]$ کدام است؟

۲۷

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) ۳

(۱) ۲

$$\log 121/48$$

$$\hookrightarrow [\log 121/48] = 2$$

$$\log 1/12$$

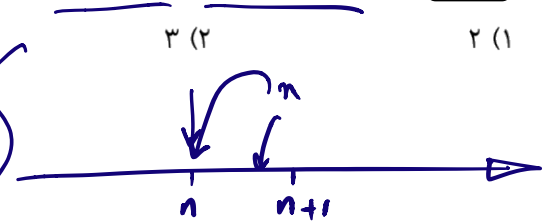
$$[1 - 1/12] = -1$$

$$10^{-2} < 121/48 < 10^{-1}$$

$$2 < \log 121/48 < 3$$

$$10^{-1} < 1/12 < 10^0$$

$$-1 < \log 1/12 < 0$$



$$[n] = n$$

$$[n] = n$$



۲۸

اگر $|2x| \leq |x+3|$ ، آن گاه حاصل $p = [2x+5]$ کدام عدد نمی تواند باشد؟

۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

۸ (۲)

۳ (۱)

توان بود $|2n| \leq |n+3| \rightarrow 4n^2 \leq n^2 + 6n + 9 \rightarrow 3n^2 - 6n - 9 \leq 0$

$\rightarrow n^2 - 2n - 3 \leq 0 \rightarrow (n-3)(n+1) \leq 0 \rightarrow -1 \leq n \leq 3$

$-2 \leq 2n \leq 2 \rightarrow 4 \leq 2n+5 \leq 11 \rightarrow [2n+5] = 4, 5, \dots, 11$



برد تابع $y = 2x - 6 \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$ کدام است؟

۲۹

$[0, 1)$ (۴)

$[0, 6)$ (۳) ✓

$[0, 2)$ (۲)

$[0, 3)$ (۱)

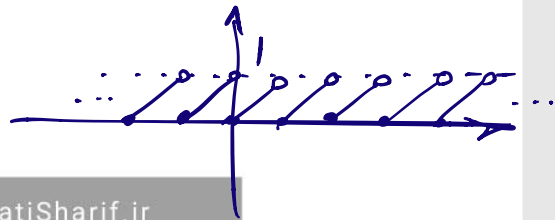
$$2n - 6 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor = 6 \left(\frac{n}{3} - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \right)$$

$\rightarrow 0 \leq \frac{n}{3} - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor < 1$
 $\rightarrow 0 \leq \frac{n}{3} - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor < 1$

$$y = n - [n]$$

$$y(3,7) = 2,7 - \left\lfloor \frac{3,7}{3} \right\rfloor = 0,7$$

$$R = [0, 1) \leftarrow 0 \leq n - [n] < 1$$





مجموع جواب‌های معادله $x - [x] = 0.3$ که در بازه $(-2, 2)$ قرار دارند، کدام است؟

۳۰

-0.8 (۴) ✓

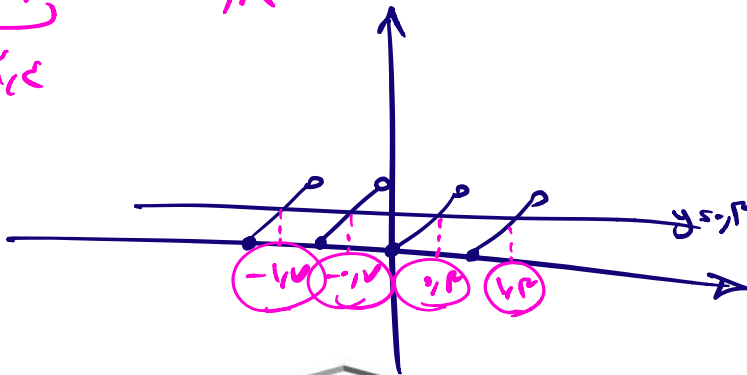
$1/2$ (۳)

0.8 (۲)

(۱) صفر

$$\underbrace{0.3 + 1.3}_{1.2} - \underbrace{0.7 - 1.7}_{-2.0} = -0.8$$

فراوانی؟



$(0, 1) \rightarrow 0.3$

$(1, 2) \rightarrow 1.3$

$(-1, 0) \rightarrow -0.7$

$(-2, -1) \rightarrow -1.7$



اگر $[x + 2[x]] = 4$ ، مقدار x کدام است؟

۳۱

(۴) معادله جواب ندارد.

(۳) $1 \leq x < 2$

(۲) $0 \leq x < 1$

(۱) $\frac{4}{3} \leq x < \frac{5}{3}$

$$[n + 2[n]] = 4 \rightarrow [n] + 2[n] = 4$$

$$\rightarrow 3[n] = 4 \rightarrow [n] = \frac{4}{3}$$

عدد صحیح

عدد صحیح از عبارت تابع میسر

$$[n + n] = [n] + n$$

$$n \in \mathbb{Z}$$



معادله $3x^2 - 4x = \frac{1}{\underbrace{|x| + |-x|}}$ دارای چند ریشه حقیقی است؟

۳۲

(۴) بی شمار

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

$n \in \mathbb{Z} \rightarrow$ صحیح، نادر

$$[n] + [-n] = \begin{cases} 0 & n \in \mathbb{Z} \\ -1 & n \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$n \notin \mathbb{Z} \rightarrow$

$3n^2 - 4n = -1 \rightarrow 3n^2 - 4n + 1 = 0$

$n = 1$

$n = 1/3$



اگر $[x + y] = [x] + [y]$ ، آن گاه حاصل $x + y - ([x] + [y])$ کدام عدد می تواند باشد؟

۳۳

۰./۳ (۴)

۱/۱ (۳)

۰./۲ (۲)

۱/۲ (۱)

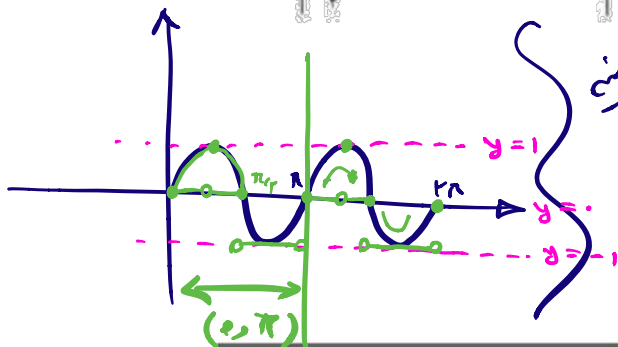
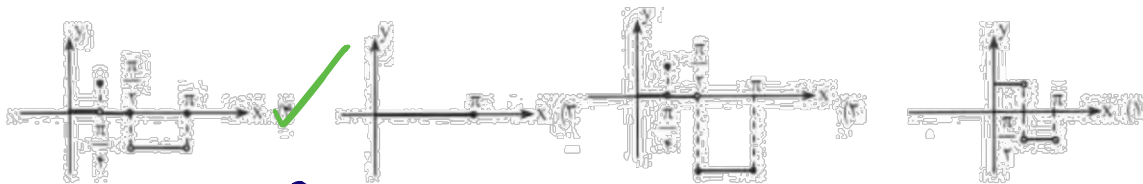
$$0 \leq x - [x] + y - [y] < 1$$

$$[x + y] = [x] + [y]$$

$$1 \leq x - [x] + y - [y] < 2 \rightarrow [x + y] = [x] + [y] + 1$$

۳۴

نمایش هندسی تابع $y = \sin 2x$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟



$f(x)$ خطوط $y = k$ را رسم کنید
 و مقدار x را برای $y = k$ تعیین کنید
 \downarrow
 $[f(x)]$



دو چرخه سواری دور یک پیست دو چرخه سواری به شعاع ۱ کیلومتر رکاب می‌زنند. اگر او 60° چرخیده باشد تقریباً چه مسافتی را

۳۵

کتاب درسی

طی کرده است؟ $(\pi \sim 3/14)$

۱۰۵۰ (۲)

۹۵۵ (۱)

۷۲۰ (۴)

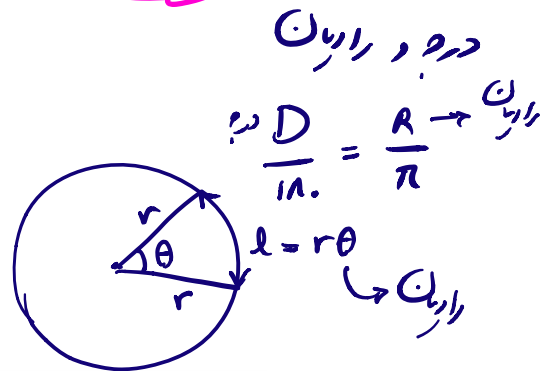
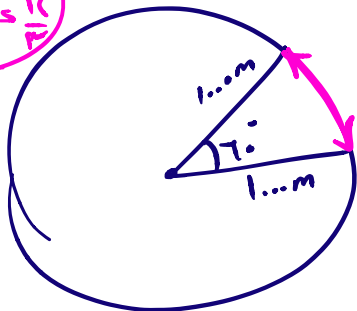
۸۳۰ (۳)

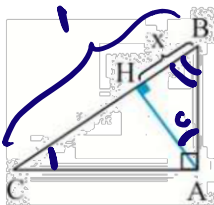
$$\frac{\pi \cdot R}{180} = \frac{R}{n} \rightarrow R = \frac{\pi R}{\frac{180}{n}}$$

$$l = r\theta = 1000 \times \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1000 \times 3,14}{3}$$

$$= \frac{3140}{3} \approx 1050$$





در مثلث ABC اگر طول وتر برابر ۱ باشد، مقدار x کدام است؟

۳۶

$$\triangle AHB: \sin C = \frac{x}{AB}$$

$$\triangle ABC: \sin C = \frac{AB}{1}$$

$$\sqrt{\sin C} \quad (2)$$

$$\sin C \quad (4)$$

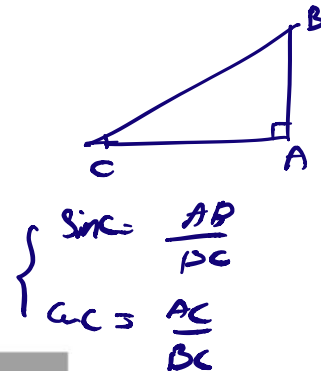
$$\sin^2 B \quad (1)$$

$$\sin^2 C \quad (3) \quad \checkmark$$

$$\sin^2 C = \frac{x}{AB} \times \frac{AB}{1}$$

$$x = \sin^2 C$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan C = \frac{AB}{AC} \\ \cot C = \frac{AC}{AB} \end{array} \right.$$





۳۷

اگر $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$ آنگاه $\sin 2x$ در کدام بازه تغییر خواهد کرد؟

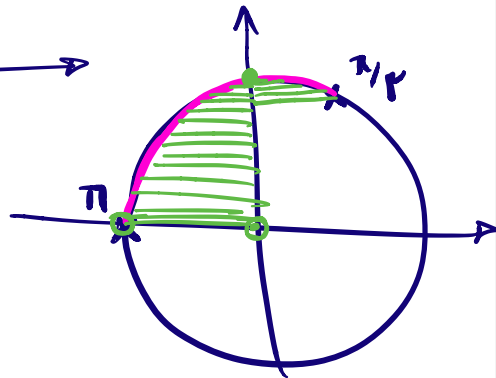
- (۱) $0 < \sin 2x < \frac{1}{2}$ (۲) $0 < \sin 2x < 1$ (۳) $0 < \sin 2x \leq 1$ (۴) $-\frac{1}{2} < \sin 2x < 0$

$$\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{\pi}{2}$$

(Note: The handwritten expression is $\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{\pi}{2}$, which is a typo for $\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{3\pi}{4}$ based on the diagram. A green arrow points down from the second $\frac{\pi}{2}$ to $\frac{3\pi}{4}$.)



$$\frac{\pi}{2} < 2x < \pi$$





۳۸

چند تا از نامساوی‌های زیر صحیح هستند؟

$\tan 20^\circ > \tan 10^\circ$ (ج ✓)

$\sin 160^\circ > \sin 15^\circ$ (ب ✓)

$\sin 3 > \sin 2$ (الف ✓)

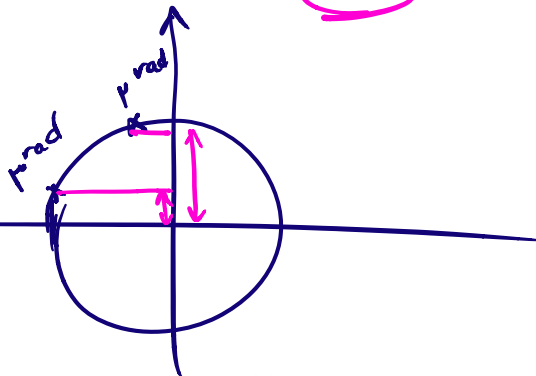
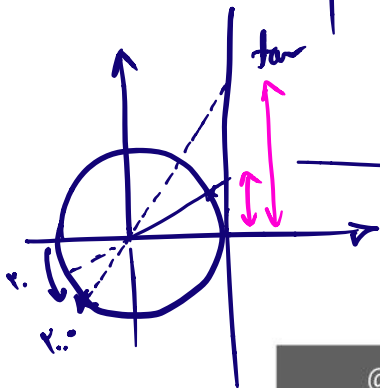
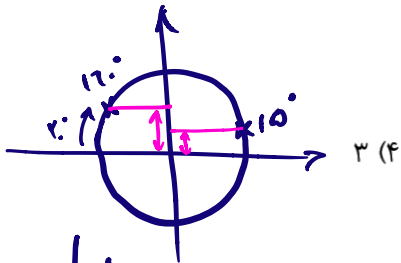
۲ (۳)

۱ (۲)

(۱) صفر

رایج

توجه!
 $1 \text{ rad} = 57.3^\circ$
 $2 \text{ rad} = 114^\circ$
 $3 \text{ rad} = 171^\circ$





مثلثات / نسبت های $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$

تجربی ۹۴

حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ با فرض $\tan 15^\circ = \frac{1}{2}$ ، کدام است؟

۳۹

$$\frac{16}{9} \quad (۴)$$

$$\frac{9}{16} \quad (۳)$$

$$-\frac{9}{16} \quad (۲)$$

$$-\frac{16}{9} \quad (۱)$$

$$\begin{aligned} \cos 285^\circ &= \cos (270^\circ + 15^\circ) = \cos \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) \\ &= +\sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 255^\circ &= \sin (270^\circ - 15^\circ) = \sin \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) \\ &= -\cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 525^\circ &= \sin (540^\circ - 15^\circ) = \sin \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) \\ &= +\sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\sin 10^\circ + \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ - \cos 10^\circ} = \\ &\frac{\frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} + 1}{\frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} - 1} = \frac{0,171 + 1}{0,171 - 1} = \frac{1,171}{-0,829} = -1,412 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 105^\circ &= \sin (90^\circ + 15^\circ) = \\ \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) &= +\cos \alpha \end{aligned}$$



مثلاث / نسبت های $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$

حاصل $\sin(\frac{1384\pi}{4}) + \sin(\frac{1385\pi}{4}) + \sin(\frac{1389\pi}{4})$ کدام است؟

F₀

(1) صفر

$$\sin(\cancel{2k\pi}) + \sin(\cancel{2k\pi} + \frac{\pi}{2}) + \sin(\cancel{2k\pi} + \frac{5\pi}{2})$$

$-\sqrt{2}$ (4)
 $\sqrt{2}$ (3)
 1 (2)

$$= 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$$

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

از عبارات زوج $2k\pi$ صرف نظر کنید

$$\begin{array}{r|l} 1382 & 2 \\ \hline 12 & 324 \\ \hline 18 & \\ \hline 4 & \\ \hline 22 & \\ \hline 24 & \\ \hline \end{array}$$

F₀



آزاد ۸۹

اگر $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$ حاصل $\sin^2 x + \cos^2 x$ چقدر است؟

F1

$$\frac{1}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{۴} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{۲} \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$\rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2$$

$$\rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2(\sin \alpha \cos \alpha)$$

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)$$

$$(-\sqrt{2})^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 1 - 2\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$



مثلثات / روابط جمع و تفریق دو کمان

حاصل $\tan 35^\circ + \tan 20^\circ$ کدام است؟

۴۲

$$\frac{1}{\sin 20^\circ} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{\sin 35^\circ} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{\cos 20^\circ} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{\cos 35^\circ} \quad (۱)$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} + \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\sin 30^\circ \cos 20^\circ + \cos 30^\circ \sin 20^\circ}{\cos 30^\circ \cos 20^\circ}$$

$$\frac{\sin(30^\circ + 20^\circ)}{\cos 30^\circ \cos 20^\circ} = \frac{\cancel{\sin 30^\circ} \cos 20^\circ + \cancel{\cos 30^\circ} \sin 20^\circ}{\cos 30^\circ \cos 20^\circ} = \frac{1}{\cos 20^\circ}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$



مثلثات / روابط جمع و تفریق دو کمان

اگر $\tan(x+y) = \frac{4}{3}$ و $\tan(x-y) = \frac{2}{3}$ باشد، $\tan(2x)$ کدام است؟ ۴۳

$\xrightarrow{\alpha+\beta}$ $\xrightarrow{\beta}$ $\xrightarrow{\alpha}$

$\frac{18}{4}$ \checkmark $\frac{9}{3}$ $\frac{27}{2}$ $\frac{2}{1}$

$$\frac{\alpha+y}{\alpha} + \frac{\alpha-y}{\beta} = \alpha$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan \alpha = \frac{2}{3} \quad \tan \beta = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$



مثلثات / روابط جمع و تفریق دو کمان

حاصل $\tan 40^\circ + \tan 50^\circ + \tan 40^\circ \times \tan 50^\circ$ کدام است؟

۴۴

$$\frac{2\sqrt{3}}{2} (۴)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} (۳)$$

$$\sqrt{3} (۲)$$

۱ (۱)

$$\tan(\epsilon + \delta) = 1 \rightarrow \frac{\tan \epsilon + \tan \delta}{1 - \tan \epsilon \tan \delta} = 1$$

$$\rightarrow \tan \epsilon + \tan \delta = 1 - \tan \epsilon \times \tan \delta$$

$$\tan \epsilon + \tan \delta + \tan \epsilon \times \tan \delta = 1$$



خارج ۹۵

اگر $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$ کدام است؟ **F5**

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\cancel{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cancel{\cos \frac{\alpha}{2}}}{1 + \cancel{2} \cancel{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{-1}{2}$$

-2 (10)

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= \cos^2 \alpha - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = -\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$



۴۶

اگر $\sin 2\alpha = \frac{1}{3}$ باشد حاصل $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$ کدام است؟

$\frac{2}{4}$ (۱)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{11}{12}$ (۴)

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{6}$$

$$1 - 3 (\sin \alpha \cos \alpha)^2 = 1 - 3 \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$



مثلثات / روابط دوبرابر کمان

کتاب درسی

مقدار $x = \frac{\pi}{12}$ به ازای $\cot \frac{x}{r} - \tan \frac{x}{r} - r \tan x$ کدام است؟

FY

$4\sqrt{3}$ (1)

$\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (2)

$2\sqrt{3}$ (3)

$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (4)

$$\cot \frac{\pi}{r} - \tan \frac{\pi}{r} - r \tan \pi$$

$$r \cot \pi$$

$$r(\cot \pi - \tan \pi) = r \cot \pi = r \cot \frac{\pi}{r} = 4\sqrt{3}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{r \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\tan \alpha - \cot \alpha = -r \cot r \alpha$$



معادله $\tan x - \sqrt{3} \cot x = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

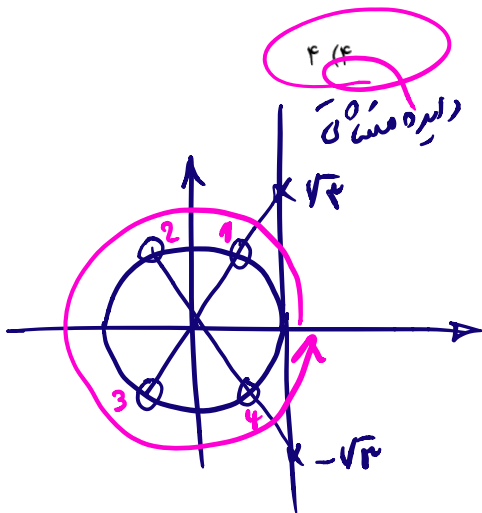
۴۸

(۱) صفر

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)



$$\tan x - \sqrt{3} \cot x = 0$$

$$\tan x = \sqrt{3} \cot x$$

↓

$$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{\tan x}$$

$$\tan^2 x = \sqrt{3}$$

$$\rightarrow \tan x = \pm \sqrt{\sqrt{3}}$$



معادله $6\sin^2 x + 7\sin x + 2 = 0$ در بازه $[\pi, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

۴۹

۱ (۴)

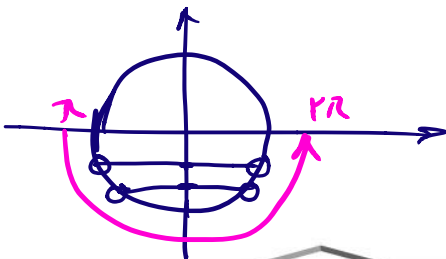
۲ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

$$\sin x = t \rightarrow 7\sin^2 x + 7\sin x + 2 = 0 \rightarrow 7t^2 + 7t + 2 = 0$$

$$\rightarrow \Delta = 49 - 4 \cdot 7 \cdot 2 = 1 \rightarrow t = \frac{-7 \pm 1}{14} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{7} \end{cases}$$





۵۰

تجربی ۹۱

نمودار تابع $y = -4 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right)$ روی بازه $[-1, 1]$ در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟

۴ (۴)

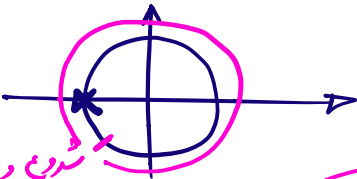
۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\underbrace{-4 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right)}_{-1} = 4 \quad \rightarrow \quad \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right)}_t = -1$$

$$\cos t = -1$$



شروع و پایان

$$-1 \leq \alpha \leq 1 \rightarrow -\pi \leq -3\pi x \leq \pi \rightarrow \pi \leq 3\pi x \leq 2\pi$$

۳ دور = 2π



تجربی ۹۱

جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{2\pi}{3} + x)$ به کدام صورت است؟

۵۱

$$2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (۴)$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{2k\pi}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{k\pi}{3} \quad (۱)$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$$

$$-\cos 2x = -\cos x \rightarrow \cos 2x = \cos x$$

$$\cos 2x - 1 = -\cos x$$

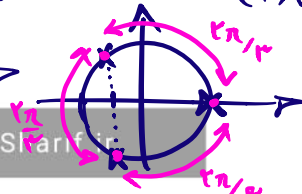
$$\cos 2x - \cos x - 1 = 0 \quad \cos x = t$$

$$2t^2 - t - 1 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 4(-1) = 9$$

$$\rightarrow t = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$$

$$\cos x = 1$$

$$\cos x = -1/2$$



$$\frac{2k\pi}{3} \times k$$

$$2k\pi$$



مجموعه جواب معادله $\frac{\cos 2x + \cos x}{\cos x} = 2$ کدام است؟ ۵۲

$x = 2k\pi + \pi$ (۴)

$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۳)

$x = k\pi$ (۲)

$x = \frac{k\pi}{2}$ (۱)

$\cos 2x + \cos x = 2 \cos x \rightarrow \cos 2x = \cos x$

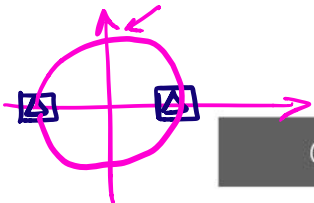
$2k\pi + 2x = k\pi + x \rightarrow x = k\pi$

$2k\pi - 2x = k\pi - x \rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$

مجموعه جواب معادله $\cos 2x = \cos x$

$\sin m = \sin a \rightarrow \begin{cases} m = k\pi + a \\ m = k\pi + \pi - a \end{cases}$

$\cos a = \cos a \rightarrow m = k\pi \pm a$
 $\tan m = \tan a \rightarrow m = k\pi + a$
 $\cot m = \cot a \rightarrow m = k\pi + a$





خارج ۹۲

مجموع تمام جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin 5x + \sin 4x = 1 + \cos \pi$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۵۳

11π (۴)

10π (۳)

9π (۲)

8π (۱)

$$\sin 0 = -\sin \pi \rightarrow \sin 0 = \sin(-\pi)$$

$$0 = k\pi + (-\pi) \rightarrow 0 = k\pi \rightarrow n = \frac{k\pi}{\pi} \rightarrow k \in \mathbb{Z}$$

$$0 = k\pi + \pi - (-\pi) \rightarrow n = k\pi + \pi$$

$$\rightarrow \frac{2\pi + 4\pi + \dots + 18\pi}{4} = \frac{2\pi(1+2+\dots+9)}{4} = 10\pi \rightarrow \pi$$

Handwritten solutions for $n = \frac{k\pi}{\pi}$ where $k \in \mathbb{Z}$:

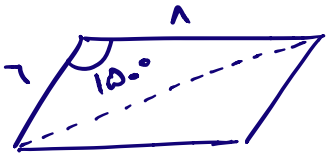
- $0, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}$
- $\frac{8\pi}{9}, \frac{10\pi}{9}, \frac{12\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}$
- $\frac{16\pi}{9}, 2\pi, \frac{18\pi}{9}$

مساحت یک متوازی‌الاضلاع به اضلاع ۶ و ۸ سانتی‌متر که یک زاویه 150° نیز دارد کدام است؟

۵۴

$24\sqrt{3}$ (۴)

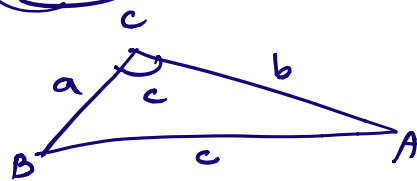
$12\sqrt{3}$ (۳)



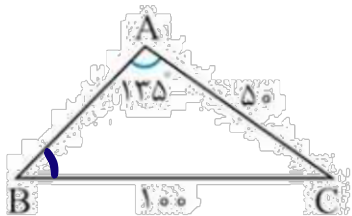
$$\cancel{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \sin 150^\circ} = 24$$

24 (۲)

12 (۱)



$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} \\ &= \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} \\ &= \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} \end{aligned}$$



$$\frac{1}{\sin B} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}$$

$$\rightarrow \sin B = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 B = 1 \rightarrow \frac{1}{14} + \cos^2 B = 1 \rightarrow \cos^2 B = \frac{13}{14}$$

$$\cos B = \pm \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{14}} = \pm \frac{\sqrt{182}}{14}$$

در مثلث مقابل اندازه $\cos \widehat{B}$ چقدر است؟

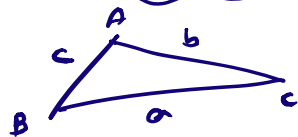
۵۵

$$\frac{\sqrt{14}}{4} \quad (2) \quad \checkmark$$

$$-\frac{\sqrt{14}}{4} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$



قضیه سینوس ها:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



سنجش ۹۵

در مثلثی به طول اضلاع ۵، ۶، ۹ مقدار سینوس بزرگترین زاویه آن کدام است؟

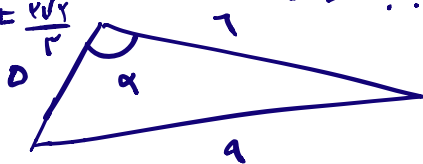
۵۶

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + 1/9 = 1$$

$$\sin^2 \alpha = 8/9$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{8}}{3}$$



لازم بزرگترین ضلع
۳ ← \ominus $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۴✓)

$$\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ (۳)}$$

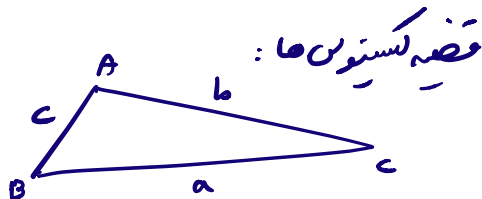
$$\frac{\sqrt{5}}{3} \text{ (۲)}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (۱)}$$

α منفرد

$$9^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos \alpha$$

$$81 = 25 + 36 - 2 \cdot 30 \cdot \cos \alpha \rightarrow 20 = -20 \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = -1/2$$

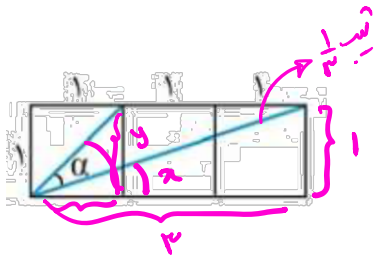


قضیه سینوس ها:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$



در شکل مقابل $\tan \alpha$ چقدر است؟ (شکل شامل ۳ مربع به هم چسبیده است)

۵۷

$$\tan \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\tan \gamma = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{2}{3} \text{ (۲)}$$

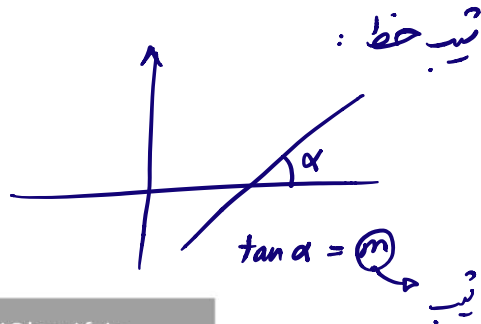
$$\frac{1}{3} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۱)}$$

$$\frac{3}{4} \text{ (۳)}$$

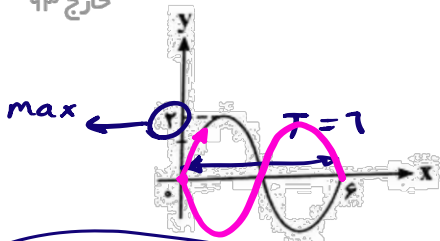
$$\tan \alpha = \tan(\gamma - \nu) = \frac{\tan \gamma - \tan \nu}{1 + \tan \gamma \tan \nu}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{2}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$





خارج ۹۳



شکل روبرو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام است؟

۵۸

$$r + \frac{1}{r} = \frac{r}{r} + \frac{1}{r} = \frac{r+1}{r}$$

$$\frac{5}{3} \quad (2)$$

$$\frac{4}{3} \quad (1)$$

$$\frac{8}{3} \quad (4)$$

$$\frac{7}{3} \quad (3) \checkmark$$

$$|a| = r \rightarrow a = \pm r$$

$$a = r \quad b = \frac{1}{r}$$

$$a = -r \quad b = \frac{1}{r}$$

$$r \sin\left(\frac{r}{r} n\right)$$

$$-r \sin\left(\frac{r}{r} n\right)$$

$$\frac{r}{|r| \cdot |b|} = T \rightarrow |b| = \frac{1}{r}$$

$$b = \pm \frac{1}{r}$$

$$y = a \sin(bn - c) + d$$

$$y = a \cos(bn - c) + d$$

$$|a| + d$$

max

$$-|a| + d$$

min

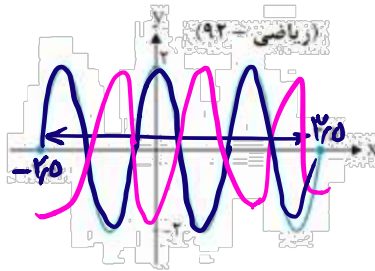
$$\frac{r}{|b|}$$

T

$$a = -r \quad b = \frac{-1}{r}$$

$$-r \sin\left(-\frac{r}{r} n\right)$$

$$r \sin\left(\frac{r}{r} n\right)$$



$$2T = 2,0 - (-2,0) = 4$$

$$T = 2$$

شکل روبرو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin \pi(\frac{1}{p} + bx)$ است. $a \times b$ کدام است؟

۵۹

۲ (۱)

۲/۵ (۲)

۳ (۳)

۳/۵ (۴)

$$a \sin \left(\frac{x}{p} + \pi b x \right) = a \sin \pi b x$$

$$|a| = 2 \rightarrow a = \pm 2 \quad ? \rightarrow a = 2$$

$$\frac{2\pi}{1/\pi b} = 2 \rightarrow |b| = 1 \rightarrow b = \pm 1 \rightarrow b = 1$$

$$a \sin \pi n = a \sin (-\pi n)$$

$$b = \pm 1$$

$$ab = \pm 2$$



۶۰

در تابع f با دامنه R همواره رابطه $f(x-1) = f(x+2)$ برقرار است. کدام گزینه لزوماً دوره تناوب تابع f است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

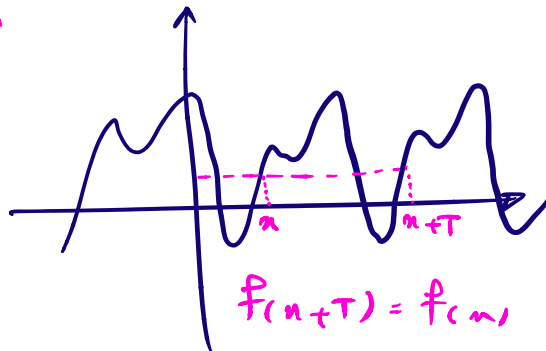
۲ (۲)

۱ (۱)

$$f(\underbrace{n-1}_m) = f(n+2)$$

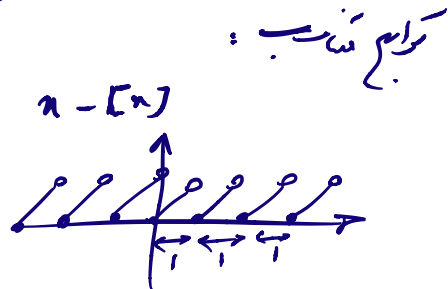
$$f(m) = f(m+3)$$

دوره تناوب $T=3$



$$f(n+T) = f(n)$$

$$f(n+c) = f(n) \rightarrow T=3$$





تابع / شرط تابع شدن

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$$y - 1 = 0 \rightarrow y = 1$$

$$xy = 0 \rightarrow y = 1, 2, 0, -7, \pi, \dots$$

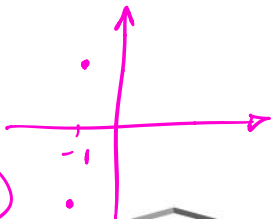
$$|y| + x^2 = 1 \xrightarrow{x=0} |y| = 1 \rightarrow y = \pm 1$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y^2 + 4 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 0$$

$$x = -1$$

$$y = \pm\sqrt{2}$$



کدام یک از روابط زیر یک تابع را مشخص می کند؟

۶۱

$$xy = 0 \quad \checkmark$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y^2 + 5 = 0 \quad \checkmark$$

$$|y| + x^2 = 1 \quad \checkmark$$

$$\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{y - 1} = 0 \quad \checkmark$$

هر رابطه‌ای تابع است

به ازای هر x (مقادیر) y یک مقدار دارد

مسئله: n سال پیش دوای صندلی یکبار

تابع است



اگر $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 9}{x^2 + 2x - 6}$ حاصل $f(\sqrt{2} - 1)$ کدام است؟ ۶۲

$$\frac{-9}{2} \quad (3)$$

$$\frac{-7}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{5}{2} \quad (1)$$

$$\textcircled{-2 \quad (4)}$$

$$a^2 + 2a + 9 = (a+1)^2 + 8 \quad a = \sqrt{2} - 1$$

$$a^2 + 2a - 7 = (a+1)^2 - 7$$

$$a+1 = \sqrt{2} \rightarrow$$

$$\frac{2+8}{2-7}$$

$$= \frac{10}{-5} = -2$$



اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $2f(2x+1) - x^2 f(3) = 2x^2 + 8x - 4$ حاصل $f(\sqrt{5})$ کدام است؟

۶۳

(۱) صفر

$$n=1 \rightarrow 2f(3) - f(3) = 1 + 8 - 4 = 7 \rightarrow f(3) = 7$$

$$2f(2n+1) - n^2 = 2n^2 + 8n - 4 \rightarrow 2f(2n+1) = 4n^2 + 8n - 4$$

$$f(2n+1) = 2n^2 + 4n - 2 \rightarrow f(t) = t^2 - 3$$

$$f(\sqrt{5}) = 5 - 3 = 2$$



۶۴ اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{3x+3}{2x^2+ax+b}$ برابر $\{\pm 1\}$ باشد آنگاه $2a - b$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۱

ریشه در خارج

خرج صند

$$2(n-1)(n+1) = 2n^2 + an + b$$

$(n^2 - 1)$

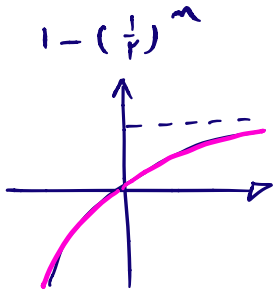
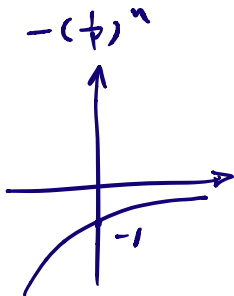
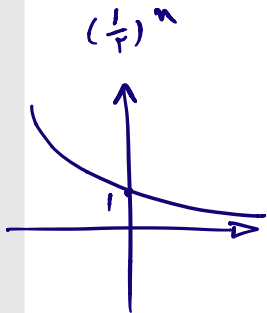
$$2n^2 - 2 = 2an^2 + an + b \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \end{cases} \rightarrow 2a - b = 2(-0) - (-2) = 2$$



ریاضی ۹۳

۶۵ اگر $f(x) = 1 - (\frac{1}{2})^x$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ کدام بازه است؟

- (۱) $[-1, 1]$
- (۲) $(-\infty, 0)$
- (۳) $(-\infty, +\infty)$
- (۴) $(0, +\infty)$



توجه کنید $f(x)$

$x > 0 \rightarrow f(x) < 1$
 $f(x) > 0$

$x < 0 \rightarrow f(x) > 1$
 $f(x) < 0$

توجه کنید



اگر $f(x) = \sqrt{6 - 2^x - 2^{3-x}}$ باشد، دامنه تابع f به صورت $[a, b]$ باشد حاصل $b - a$ کدام بازه است؟

۶۶

$$2 - 2^m - \frac{1}{2^n} \geq 0 \xrightarrow{\frac{5}{2} (4)} \frac{2 \times 2^m - (2^m)^2 - 1}{2^n} \geq 0 \quad \begin{matrix} \frac{2}{2} (3) \\ 2 (2) \end{matrix}$$

$$2 \times 2^m - (2^m)^2 - 1 \geq 0 \xrightarrow{2^m = t} -t^2 + 2t - 1 \geq 0 \rightarrow t^2 - 2t + 1 \leq 0$$

$$(t-1)(t-1) \leq 0 \rightarrow -1 \leq t \leq 1 \rightarrow 2^{-1} \leq 2^m \leq 2^1 \rightarrow 2^{-1} \leq 2^m \leq 2^1$$

$$1 \leq m \leq 2 \rightarrow [1, 2]$$

۱ (۱)



دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{2x - x^2} \log(x - 1)$ کدام است؟

۶۷

$[1, 2)$ (۴)

$(1, 2]$ (۳)

$[1, 2]$ (۲)

$(1, 2)$ (۱)

$$2x - x^2 \geq 0 \rightarrow x(2-x) \geq 0 \rightarrow 0 < x \leq 2$$

$$0 < x \leq 2$$

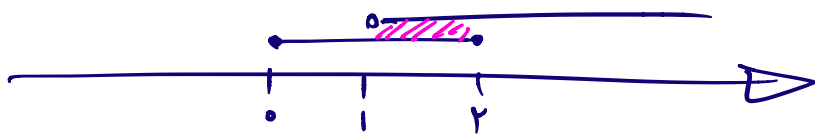
$$\log(x-1)$$



$$x-1 > 0 \rightarrow x > 1$$

$$x > 0 \quad \checkmark$$

$$x \neq 1 \quad \checkmark$$



توابع مرکب:

$$y = \log \begin{matrix} f(x) \\ g(x) \end{matrix}$$

- ① $f(x) > 0$
- ② $g(x) > 0$
- ③ $g(x) \neq 1$





۶۸

چه تعداد از زوج توابع زیر با هم برابرند؟

$x^2 < 2 \rightarrow x^2 > 2$
 $x > 2 \subseteq x < -2$

$x-2 > 0 \rightarrow x > 2$
 $x+2 > 0 \rightarrow x > -2$ } \rightarrow $x > 2$

$f: x(1-x) \geq 0$

$\rightarrow 0 \leq x < 1$

$g: x \geq 0$

$1-x \geq 0 \rightarrow x \leq 1$ } $\rightarrow 0 \leq x \leq 1$

$f: \mathbb{R}$ $g: \frac{|x^2-1|}{x^2+x+1} \rightarrow \Delta \subset \mathbb{R}$

~~$\left\{ \begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x(1-x)} \\ g(x) &= \sqrt{x} \sqrt{1-x} \end{aligned} \right.$ (ب)~~

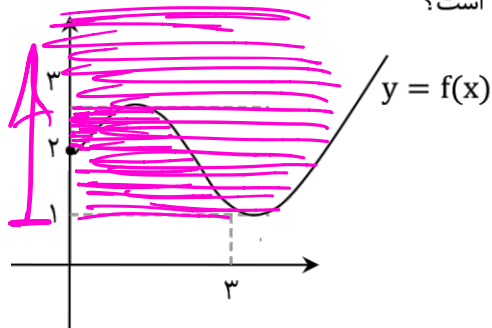
~~$\left\{ \begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2-x} \\ g(x) &= \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} \end{aligned} \right.$ (د)~~

~~$\left\{ \begin{aligned} f(x) &= \log(x^2-4) \\ g(x) &= \log(x-2) + \log(x+2) \end{aligned} \right.$ (الف)~~

$\left\{ \begin{aligned} f(x) &= |x-1| \\ g(x) &= \frac{|x-1|}{x^2+x+1} \end{aligned} \right.$ (ج)

$f: x^2 - x \geq 0 \rightarrow x(x-1) \geq 0 \rightarrow x \leq 0 \cup x \geq 1$

$g: x \geq 0$
 $x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$ } $\rightarrow x \geq 1$



اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، برد تابع $g(x) = \frac{-x}{f(x)+1}$ کدام است؟

۶۹

$[-\frac{2}{3}, 0)$ (۲) ✓ $[\frac{-2}{3}, +\infty)$ (۱)

$[-1, 0)$ (۴) $[-1, +\infty)$ (۳)

$R_f = [1, +\infty) \rightarrow f(x) \geq 1$

$\underbrace{f(x)+1}_{\geq 2} \rightarrow 0 < \frac{1}{f(x)+1} \leq \frac{1}{2}$

$-\frac{2}{3} \leq \frac{-x}{f(x)+1} < 0$



دامنه تابع $\frac{f}{g}$ با داشتن $f(x) = \frac{2}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{(x-2)(x-10)}$ چند عدد صحیح را شامل نمی شود؟ ۷۰

$D_f : x - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$

$D_g : (x-2)(x-10) \geq 0 \rightarrow x \leq 2 \text{ or } x \geq 10$

$g \neq 0 \rightarrow (x-2)(x-10) \neq 0$



$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$f/g, f \cdot g, f - g, f + g$

$f \cdot g = \dots$ و f

رابطه: $D_{f \cdot g}, D_{f+g}, D_{f-g} = D_f \cap D_g$

$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{n | g(n) = 0\}$



ریاضی ۹۳ و مشابه خارج ۹۵

اگر $g(x) = 2x - 3$ و $(f \circ g)(x) = 4(x^2 - 4x + 5)$ باشند تابع $f(x)$ کدام است؟

۶۱

$$x^2 - 2x + 3 \quad (۴)$$

$$x^2 - 2x + 5 \quad (۳)$$

$$x^2 - 4x + 5 \quad (۲)$$

$$x^2 - 4x + 3 \quad (۱)$$

$$4x^2 - 14x + 1 = f(2x - 3)$$

$$2x - 3 = t \rightarrow 2x = t + 3 \rightarrow x = \frac{t+3}{2}$$

$$f(t) = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t+3}{2}\right) + 1 \rightarrow 4\left(\frac{t^2+6t+9}{4}\right) - 7t - 21 + 1$$

$$t^2 + 6t + 9 - 7t - 21 + 1$$

$$t^2 - t + 0$$



اگر تابع $f = \{(1, 2), (3, 5), (2, m^2 - 7)\}$ اکیداً صعودی باشد، محدوده m کدام است؟

۷۲

$$3 < |m| < 2\sqrt{3} \quad (4)$$

$$|m| > 2\sqrt{3} \quad (3)$$

$$m < -\sqrt{2} \quad (2)$$

$$m > \sqrt{2} \quad (1)$$

$$(1, 2), (2, m^2 - 7), (3, 5)$$

زیر

$$2 < m^2 - 7 < 5$$

$$9 < m^2 < 12 \rightarrow 3 < |m| < 2\sqrt{3}$$

اکیداً صعودی
 $a_2 > a_1 \rightarrow f(a_2) > f(a_1)$
 اکیداً نزولی
 $a_2 > a_1 \rightarrow f(a_2) < f(a_1)$
 صعودی
 $a_2 > a_1 \rightarrow f(a_2) \geq f(a_1)$
 نزولی
 $a_2 > a_1 \rightarrow f(a_2) \leq f(a_1)$

تابع $y = x|x - 2|$ در کدام بازه زیر نزولی است؟

۷۳

$[1, 2]$ (۴)

$(-\infty, 0]$ (۳)

$[2, +\infty)$ (۲)

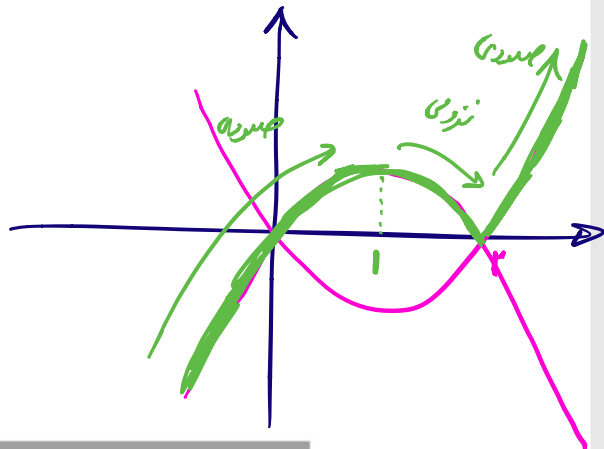
$[0, 2]$ (۱)

$$f(x) = x|x - 2| =$$

$$\begin{cases} x(x - 2) \\ -x(x - 2) \end{cases}$$

$$x \geq 2$$

$$x < 2$$





آزاد ۸۳

$$n - \sqrt{n} = \sqrt{n} (\sqrt{n} - 1) = y = 0$$

$$\sqrt{n} = 0 \rightarrow n = 0 \quad \checkmark$$

$$\sqrt{n} - 1 = 0 \rightarrow n = 1 \quad \checkmark$$

$$y = |n| - 1 = 0 \rightarrow |n| = 1 \rightarrow n = \pm 1$$

$$x^2 + mx - a^2x + b = b = 0$$

$$x(m^2 + m - a^2) = 0$$

$$\Delta = 1 + 4a^2$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad (2)$$

$$y = |x| \quad (4)$$

کدام تابع، یک به یک است؟

۷۴

$$y = x^2 + x - a^2x + b \quad (1)$$

$$y = x - \sqrt{x} \quad (3)$$

تابع یک به یک: تابعی که برای هر دو عدد مختلف، مقادیرش هم متفاوت باشد.

فرد مقادیرش دارد.

$$f = \{ (2, 1), (5, 1), (7, 2) \}$$

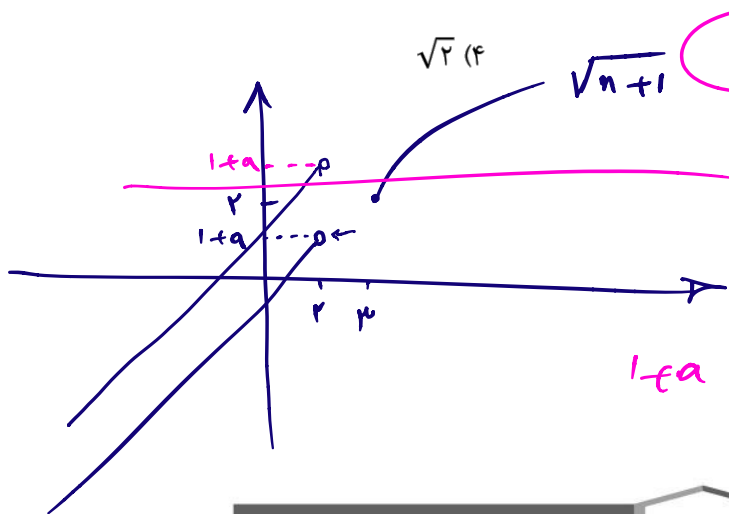
میل رفتن: شامل نزول و صعود است. در این مثال، در ۲ و ۵ میل رفتن داریم.



تابع / تابع یک به یک

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & x \geq 3 \\ \frac{1}{2}x + a & x < 2 \end{cases}$ یک به یک است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۷۵



تابع یک به یک است که هر حرفی موازی هم در آن است
صداقت در یک نقطه قطع کند.

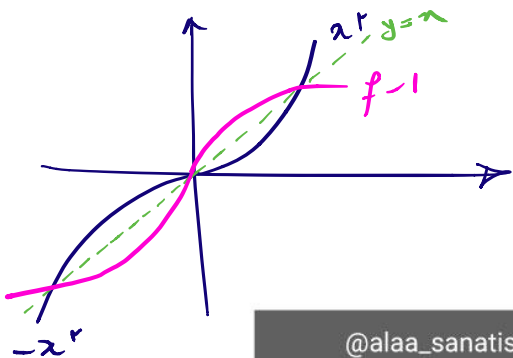
$$1+a \leq 2 \rightarrow a \leq 1$$



تجربی ۹۵

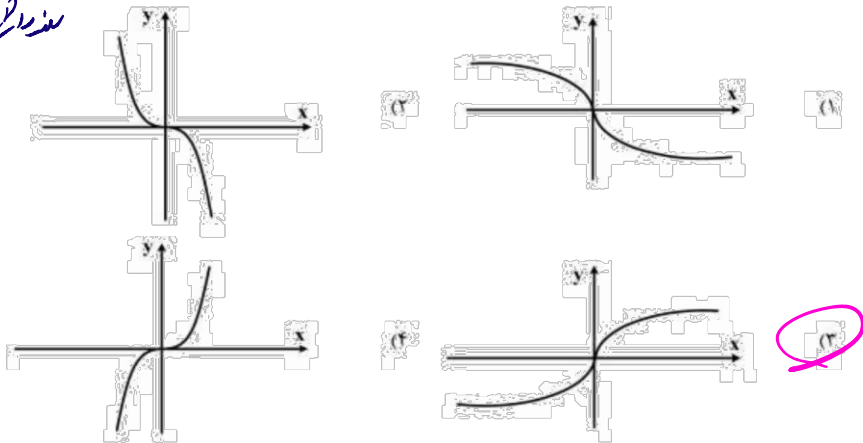
مضامین تابع f ، f^{-1} نسبت به $y = x$ متناظر اند

$$f(x) = x/|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$



اگر $f(x) = x|x|$ باشد، نمودار تابع $f^{-1}(x)$ کدام است؟

۷۶





خارج ۹۵

تابع با ضابطه $f(x) = |x^3|$ با دامنه \mathbb{R} چگونه است؟

۷۷

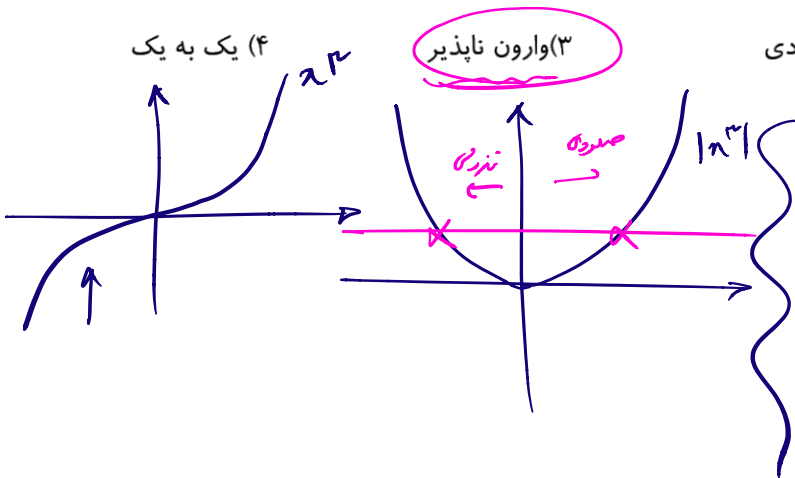
(۲) صعودی

(۱) نزولی

(۴) یک به یک

(۳) وارون ناپذیر

$$y = |x^3|$$



گراف وارون پذیری یک به یک بودن
دارد نه نام است.



۷۸

اگر ضابطه تابع f ، $f(x) = x^2 - x + 1$ باشد، نمودار f^{-1} الزاماً از کدام نقطه می‌گذرد؟

$(-1, 0)$ (۱) $(0, -1)$ (۲) $(1, 0)$ (۳) $(0, 1)$ (۴)

$(a, b) \in f \leftarrow f(a) = b$
 $(b, a) \in f^{-1} \leftarrow f^{-1}(b) = a$

$(-1, 0) \in f^{-1} \rightarrow (0, -1) \in f$
 $f(0) = 1$

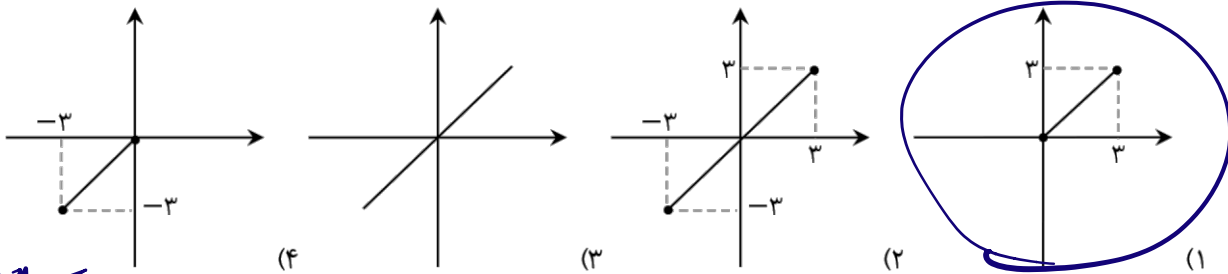
$(0, -1) \in f^{-1} \rightarrow (-1, 0) \in f$
 $f(-1) = 1 + 1 + 1 = 3$

$(1, 0) \in f^{-1} \rightarrow (0, 1) \in f$
 $f(0) = 0 - 0 + 1 = 1$



اگر $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ باشد، آنگاه نمودار تابع $y = f \circ f^{-1}(x)$ به کدام صورت است؟

۷۹



$(f \circ f^{-1})(x) = x$

$D: D_{f^{-1}} = R_f = [0, 3]$

$\sqrt{9 - x^2}$

$0 \leq 9 - x^2 \leq 9 \rightarrow -3 \leq x \leq 3$

$D_{f^{-1}} \leftarrow (f \circ f^{-1})(x) = x$

$D_f \leftarrow (f^{-1} \circ f)(x) = x$



تابع وارون تابع $y = x^2 - 2x$ وقتی $x \leq 1$ است؟

۸۰

$y = 1 - \sqrt{x-1}$ (۴)
 $y = 1 + \sqrt{x-1}$ (۳)
 $y = 1 + \sqrt{x+1}$ (۲)
 $y = 1 - \sqrt{x+1}$ (۱)

$$y = x^2 - 2x \rightarrow y + 1 = x^2 - 2x + 1 \rightarrow y + 1 = (x - 1)^2$$

$$\rightarrow x - 1 = \pm \sqrt{y + 1} \rightarrow x - 1 = -\sqrt{y + 1} \rightarrow x = 1 - \sqrt{y + 1}$$

$x \leq 1 \rightarrow x - 1 \leq 0$.

پس در x عوض کنیم

$$\rightarrow y = 1 - \sqrt{x + 1}$$



فرض کنید g وارون پذیر است و $f(x) = g\left(\frac{3x+4}{5x-2}\right)$ و $g(3) = 2$ مقدار $f^{-1}(2)$ کدام است؟

۸۱

$$f^{-1}(2) = k \rightarrow f(k) = 2 \rightarrow f(k) = g\left(\frac{3k+4}{5k-2}\right) = 2$$

$\frac{13}{12}$ (۴) $\frac{13}{11}$ (۳) $\frac{12}{7}$ (۲) $\frac{12}{13}$ (۱)

$$\frac{3k+4}{5k-2} = 3 \rightarrow 3k+4 = 15k-6 \rightarrow 12k = 10 \rightarrow k = \frac{10}{12}$$



منحنی تابع $f(x) = ax^2 + b$ منحنی معکوسش را در نقطه $A(1, 0)$ قطع کرده است. حاصل $2a + b$ کدام است؟

۸۲

$f(1) = 0$ $f^{-1}(1) = 0$ $f(0) = 1$

$a + b = 0$ $b = 1 \rightarrow a = -1$

$2a + b = 2(-1) + 1 = -1$



نمودار معکوس تابع $x > 2$ $f(x) = x^2 - 4x + 6$ با نمودار خود تابع در نقطه A متقاطع است. فاصله ی A از نیمساز ناحیه دوم و چهارم کدام است؟ ۸۳

سنجش ۹۵

$$x^2 - 4x + 6 = x$$

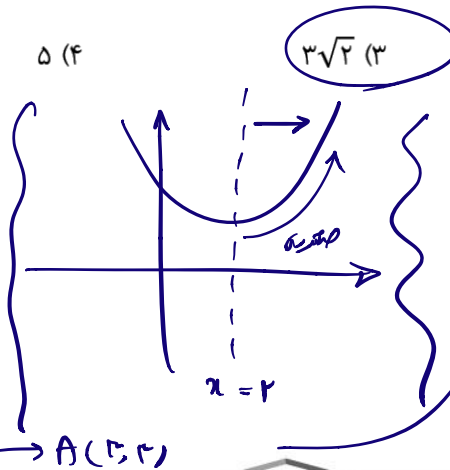
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0$$

$$\begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

$$x=2 \rightarrow y=2 \rightarrow A(2, 2)$$

۵ (۴)



$2\sqrt{3}$ (۲)

$2\sqrt{2}$ (۱)

نقطه: از ربع اول و ربع دوم، ربع سوم و ربع چهارم

$$y = x$$

$$y = -x \rightarrow y + x = 0$$

$$A(2, 2)$$

$$\frac{|2+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$



۸۴

مجموعه جواب نامعادله $3^{-2x+1} < 243$ کدام است؟

$$x < 2 \quad (3)$$

$$x > 2 \quad (3)$$

$$x > -2 \quad (2)$$

$$x < -2 \quad (1)$$

$$(3)^{-2n+1} < (3)^0$$

$$-2n+1 < 0 \rightarrow -2n < -1 \rightarrow n > \frac{1}{2}$$

اسرار

$$a^x < a^y \iff x < y \quad (a > 1)$$

$$a^x < a^y \iff x > y \quad (0 < a < 1)$$

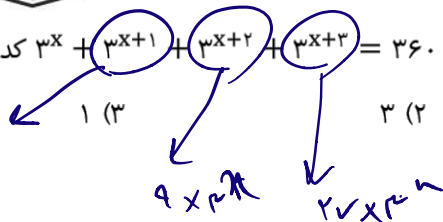


مقدار x از معادله $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 36$ کدام است؟

۸۵

۲ (۱)

$$3^m + 3 \times 3^m + 9 \times 3^m + 27 \times 3^m = 36 \quad 3 \times 3^m$$



$$\rightarrow 3^m (\cancel{1} + \cancel{3} + \cancel{9} + \cancel{27}) = \cancel{36} \cdot 4 \rightarrow 3^m = 9 \rightarrow m = 2$$



نمودار های دو تابع $f(x) = 3^{ax+b}$ و $g(x) = (\frac{1}{9})^x$ در نقطه ای به طول ۱- متقاطع هستند. اگر $f(2) = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار

۸۶

$f^{-1}(27)$ کدام است؟

ریاضی ۹۵

$$f(-1) = g(-1) \rightarrow 3^{-a+b} = (\frac{1}{9})^{-1} = 9 \rightarrow 3^{-a+b} = 3^2 \rightarrow -a+b=2$$

$$f(2) = \frac{1}{3} \rightarrow 3^{2a+b} = 3^{-1} \rightarrow 2a+b=-1$$

$$\begin{aligned} -a+b &= 2 \\ 2a+b &= -1 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} 3a &= -3 \rightarrow a = -1 \\ b &= 1 \end{aligned} \rightarrow f(x) = 3^{-x+1}$$

$$f^{-1}(27) = k \rightarrow f(k) = 27 \rightarrow 3^{-k+1} = 27 \rightarrow -k+1 = 3 \rightarrow -k = 2 \rightarrow k = -2$$



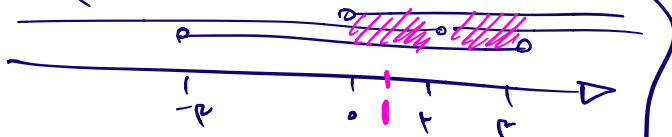
تابع نمایی و لگاریتمی / دامنه تابع لگاریتم

چند عدد صحیح در دامنه تابع $y = \log_{\frac{x}{2}}(9-x^2)$ وجود دارد؟

۸۷

$$9 - x^2 > 0 \rightarrow x^2 < 9 \rightarrow -3 < x < 3$$

$$\frac{x}{2} > 0 \rightarrow x > 0$$



$$\frac{x}{2} \neq 1 \rightarrow x \neq 2$$

$$\log_{\frac{x}{2}} f(x)$$

$$f(x) > 0$$

$$g(x) > 0$$

$$g(x) \neq 1$$

دامنه تابع لگاریتمی

۱ (۱)



دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\log_{1/5} \log_5(2x-1)}$ کدام است؟

۸۸

$(1, +\infty)$ (۴)

$(1, +\infty)$ (۳)

$[1, 3]$ (۲)

$[1, 3]$ (۱)

$$2x-1 > 0 \rightarrow 2x > 1 \rightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$\log_5(2x-1) > 0 \rightarrow (2x-1) > 5^0 \rightarrow 2x-1 > 1 \rightarrow 2x > 2 \rightarrow x > 1$$

$$\log_5(\log_5(2x-1)) \geq 0 \rightarrow \log_5(2x-1) \geq 5^0 \rightarrow 2x-1 \geq 5^1 \rightarrow 2x \geq 6 \rightarrow x \geq 3$$



تجربی ۸۷

اگر لگاریتم a در پایه $\sqrt{3}$ برابر $\frac{4}{3}$ باشد، آنگاه لگاریتم $(a^3 + 7)$ در پایه 8 کدام است؟

۸۹

$$\log_{\sqrt{3}} a = \frac{4}{3} \rightarrow a = (\sqrt{3})^{\frac{4}{3}} \rightarrow a^3 = (\sqrt{3}^{\frac{4}{3} \cdot 3}) = (\sqrt{3})^4 = 3^2 = 9$$

$\frac{3}{2}$ (۴) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۱)

$$\log_{\sqrt{8}} a^3 + 7 = \log_{\sqrt{8}} 19 = \log_{\sqrt{8}} 19 = \log_{\sqrt{8}} 19 = \frac{\log 19}{\log \sqrt{8}} = \frac{\log 19}{\frac{1}{2} \log 8} = \frac{2 \log 19}{\log 8}$$



تابع نمایی و لگاریتمی / ویژگی های لگاریتم

اگر $\log_3 2 = a$ باشد، $\log_{3^6} 12$ کدام است؟

۹۰

$$\log_{3^6} 12 = \frac{\log 12}{\log 3^6} = \frac{\log 2^2 \times 3}{\log 3^2 \times 3^2} = \frac{\log 2^2 + \log 3}{\log 3^2 + \log 3^2}$$

$$\frac{2\log 2 + \log 3}{2\log 3 + 2\log 3} = \frac{2\left(\frac{\log 2}{\log 3}\right) + 1}{2\left(\frac{\log 3}{\log 3}\right) + 2} = \frac{2a + 1}{2a + 2}$$

$$\frac{2a+1}{2a+2} \quad (2)$$

$$\frac{2a+1}{2a+2} \quad (1)$$

$$\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$$

$$\log_a b = \log a + \log b$$

$$m \log_b a = \log_b a^m$$



اگر $\log_a^b = \frac{2}{3}$ باشد، آن گاه $\log_{\sqrt{b}}^{ab^2}$ کدام است؟

۹۱

۹ (۱)

$$\log \frac{ab^2}{\sqrt{b}} = \log ab^2 - \log b^{1/2} = 2 \log ab^2 - \log b^{1/2}$$

$$= 2 (\log a + \log b^2) - \log b^{1/2} = 2 (\log a + 2 \log b) - \log b^{1/2}$$

$$= 2 \log a + 4 \log b - \log b^{1/2} = 2 \log a + 4 \log b - \frac{1}{2} \log b$$

$$= 2 \log a + \frac{7}{2} \log b$$

$$2 \left(\frac{3}{2} + 3 \right) = 2 \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \right) = 6$$

دوری:

$$\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$



ریاضی ۸۴

مقدار $\log_8 x$ کدام است؟

از معادله $\log(2x-1) + \log(x+3) = \log 30 - \log 2$

۹۲

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$-\frac{1}{2}$ (۱)

$\log(2n-1)(n+3)$

$= \log \frac{10}{2} = \log 5$

نکته: جواب دومین گزینه در این تست

جواب صحیح است زیرا در این تست

$(2n-1)(n+3) = 10 \rightarrow 2n^2 + 7n - n - 3 = 10 \rightarrow 2n^2 + 6n - 13 = 0$

$\Delta = 36 - 4 \cdot 2 \cdot (-13) = 129$

$n = \frac{-6 \pm \sqrt{129}}{4}$

$n = \begin{cases} -9/2 \\ 2 \end{cases}$

$\log_8 8 = \log_8 8 = \log_8 8 = \log_8 8 = \frac{1}{3}$



۹۳

از معادله $5^{\log x} + x^{\log 5} = 50$ مقدار $\log \sqrt{x}$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$5^{\log 5} + 5^{\log 5} = 50 \rightarrow 2 \times 5^{\log 5} = 50$$

$$5^{\log 5} = 25 \rightarrow \log 5 = 2 \rightarrow n = 1.2 = 1.2$$

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

$$\log \frac{5}{\sqrt{5}} = \log \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \log \frac{1}{5} = \frac{1}{2} \log 5^{-1} = \frac{1}{2} \times (-1) = -\frac{1}{2}$$

$$5^{\log 5} = 5^{\log 5}$$

س
و
ر
ت



خرج ۹۳

از تساوی $\log_x(3x+8) = 2 - \log_x(x-6)$ مقدار لگاریتم x در پایه x کدام است؟

۹۴

$$\log_m(3m+8) + \log_m(m-6) = 2 \rightarrow \log_m(3m+8)(m-6) = 2$$

$\frac{2}{2} (3)$ $\frac{2}{2} (2)$ $\frac{1}{2} (1)$

$$(3m+8)(m-6) = m^2 \rightarrow 3m^2 - 18m + 8m - 48 = m^2$$

$$\rightarrow 2m^2 - 10m - 48 = 0 \rightarrow m^2 - 5m - 24 = 0 \rightarrow (m-8)(m+3) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} m=8 \\ m=-3 \end{cases}$$

$\log_8^8 = \log_{2^3}^2 = \frac{3}{2} \log_2^2 = \frac{3}{2}$



۹۵

از دو معادله $4^x + 2^x = 72$ و $\log(x+1) + \log(2y+x^2) = 2$ مقدار y کدام است؟

۷ (۴)

۷/۵ (۳)

۸ (۲)

۸/۵ (۱)

$$4^m + 2^m = 72 \xrightarrow{2^m = t} t^2 + t = 72 \rightarrow t^2 + t - 72 = 0 \rightarrow (t+9)(t-8) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} t = -9 \rightarrow 2^m = -9 \quad \text{✗} \\ t = 8 \rightarrow 2^m = 8 \rightarrow m = 3 \end{cases}$$

$$\log^4 + \log(2y+9)$$

$$= 2 \rightarrow \log$$

$$4(2y+9)$$

$$= 2 \rightarrow$$

$$4(2y+9) = 10^2 = 100$$

$$2y+9 = 100 \rightarrow 2y = 91$$



مجموع جوابهای معادله ی $\log_3(9^x + 2) = x + 1$ کدام است؟

۹۶

$\log_3 4(3)$

۶ (۲)

۳ (۱)

$9^x + 2 = 3^{x+1}$
 $\xrightarrow{3^x = t}$
 3×3^x

$t^2 + 2 = 3t \rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0$

$(t-1)(t-2) = 0$
 $t=1 \rightarrow 3^x = 1 \rightarrow x = 0$

$t=2 \rightarrow 3^x = 2 \rightarrow x = \log_3 2$



مجموع ریشه‌های معادله $(e^x - 5)(2e^x - 7) = 0$ کدام است؟

۹۷

$$\ln \frac{35}{8} \quad (۴)$$

$$\ln \frac{35}{4} \quad (۳)$$

$$\ln \frac{35}{2} \quad (۲)$$

$$\ln 35 \quad (۱)$$

$$e^x - 5 = 0 \rightarrow e^x = 5 \rightarrow x = 1 \text{ و } e^5 = \ln 5$$

$$2e^x - 7 = 0 \rightarrow 2e^x = 7 \rightarrow e^x = \frac{7}{2} \rightarrow x = \log_e \frac{7}{2} = \ln \frac{7}{2}$$

$$\ln 5 + \ln \frac{7}{2} = \ln 5 \times \frac{7}{2} = \ln \frac{35}{2}$$



مجموعه جواب نامعادله $\log_2(2x - 1) > -2$ کدام است؟

۹۸

$$x > \frac{5}{8} \quad (1)$$

نشان دهید:

$$\log_a^x < \log_a^y \xrightarrow{a > 1} x < y$$

$$\xrightarrow{0 < a < 1} x > y$$

اشتباه باران

$$\log_2(2x-1) > \log_2 \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow 2x-1 > \frac{1}{4} \rightarrow 2x > \frac{5}{4}$$

$$\rightarrow x > \frac{5}{8}$$

$$2x-1 > \frac{1}{4} \rightarrow x > \frac{5}{8}$$



کارایی کارگر عادی، در کارخانه‌ای پس از t ماه، روزانه به تعداد $f(t) = 90 - 40 \cdot e^{-0.2t}$ واحد است. پس از چند ماه تجربه کاری، روزانه ۷۰ واحد را کامل می‌کند؟ $(\ln 2 = 0.693)$

۹۹

تجربی ۹۴

$v.$ ←

۶۸ (۴)

۵۱ (۳)

۳۴ (۲)

۱۷ (۱)

$$70 = 90 - 40 \cdot e^{-0.2t} \rightarrow 40 \cdot e^{-0.2t} = 20 \rightarrow e^{-0.2t} = \frac{1}{2}$$

$$f_{0.2t} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \rightarrow 0.2t = 0.693 \rightarrow t = \frac{0.693}{0.2} = \frac{\ln 2}{-0.2} = \frac{\ln 2}{2}$$

۳۴



۱۰۰

در یک کشت نمونه‌ای با کتری‌ها، تعداد باکتری‌ها در زمان t دقیقه پس از شروع، از مدل $V(t) = Be^{kt}$ پیروی می‌کند. اگر پس از ۳ دقیقه تعداد باکتری‌ها دو برابر شود، با این روند در پایان دقیقه ۱۲ تعداد آن‌ها چند برابر تعداد شروع آزمایش

تجربی ۸۹

می‌شود؟

$$\frac{V(3)}{V(0)} = 2 \rightarrow V(3) = 2V(0)$$

۱۶ (۴)

$$\cancel{B}e^{3k} = 2\cancel{B} \rightarrow e^{3k} = 2$$

$$\frac{V(12)}{V(0)} = \frac{\cancel{B}e^{12k}}{\cancel{B}} = e^{12k} = (e^{3k})^4 = 2^4 = 16$$

۸ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

فشاری
تعداد در
تعداد در

$V(t) = Be^{kt}$

تعداد در



۱۰۱

میزان سرمایه گذاری شخصی در بانک پس از ۸ سال e برابر شده است. اگر این شخص در بانک ۶ میلیون تومان پول داشته

باشد، پس از چند سال پول او ۵۴ میلیون تومان خواهد شد؟ $(\ln 3 = 1/1)$

۱۹/۱ (۴)

۱۸/۴ (۳)

۱۷/۶ (۲)

۱۶/۳ (۱)

$$P(n) = e^P \rightarrow P e^{ni} = P e$$

$$e^{ni} = e \rightarrow ni = 1 \rightarrow i = \frac{1}{n}$$

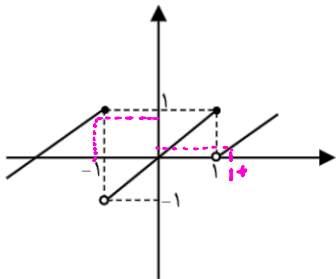
$$P(t) = 54 = 9 \times e^{\frac{1}{8}t} \rightarrow e^{\frac{t}{8}} = 9$$

$$\frac{t}{8} = \ln 9 = 2 \ln 3 = 2,2 \rightarrow t = 8 \times 2,2 = 17,6 \approx 17,6$$

فزون سرمایه‌نندازه در باند

$$P(t) = P e^{it}$$

سودمند
سودمند
۲٪ = ۰,۰۲



با توجه به نمودار حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} f(-x)$ کدام است؟

۱۰۲

-۱ (۱) ✓

۰ (۲)

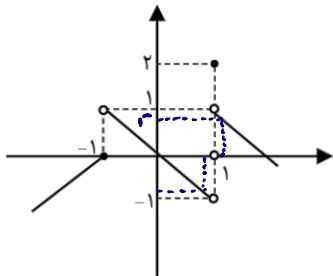
۱ (۳)

۲ (۴)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(-x) \rightarrow -1$$

$$1(0) - 1 = -1$$

$$x > 1 \rightarrow -x < -1$$



با توجه به شکل زیر حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f \circ f(x)$ کدام است؟

۱۰۳

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} f(f(t)) = -1$$

$$t \rightarrow 1^+$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t)$$

$$t \rightarrow 1^-$$

۱ (۱)

-۱ (۲) ✓

۲ (۴)

صفر (۴)



حد در \mathbb{R} دارد. مقدار $a - b$ کدام است؟
تابع $f(x) = \begin{cases} 2ax + b & |x| > 1 \\ x^2 + ax & |x| \leq 1 \end{cases}$

۱۰۴

-۲ (۴)

-۱ (۳) ✓

۱ (۲)

(۱) صفر

$$2a + b = 1 + a \rightarrow a + b = 1$$

$$1 - a = -2a + b \rightarrow -a + b = 1$$

$$\rightarrow 2b = 2 \rightarrow b = 1 \rightarrow a = 0$$

$$a - b = 0 - 1 = -1$$

$$f(n) = \begin{cases} 2an + b \\ n^2 + an \\ 2an + b \end{cases}$$





۱۰۵

اگر تابع f در نقطه $x = 1$ حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)-1}{f(x)+1} = 1$ ، آن گاه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳) ✓

-۲ (۲)

-۳ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (2f(x) - 1) = 2l - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + 1) = l + 1$$

$$\frac{2l - 1}{l + 1} = 1$$

$$\rightarrow 2l - 1 = l + 1$$

$$l = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f+g) = \lim_{x \rightarrow a} f + \lim_{x \rightarrow a} g$$



اگر به ازای هر x رابطه $|f(x) - 2| \leq (x + 1)^2$ برقرار باشد، آنگاه حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + 2}{f(x) - 1}$ کدام است؟

۱۰۶

-۴ (۴)

۴ (۳) ✓

۱ (۲)

-۱ (۱)

$$|f(n) - 2| \leq (n + 1)^2$$

$$\underbrace{-(n + 1)^2} \leq \underbrace{f(n) - 2} \leq \underbrace{(n + 1)^2}$$

↓
۰

↓
۰

↓
۰

$$\lim_{n \rightarrow -1} (f(n) - 2) = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow -1} f(n) = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow -1} \frac{f(n) + 2}{f(n) - 1} = \frac{2 + 2}{2 - 1} = \frac{4}{1} = 4$$



ریاضی ۹۵

حد عبارت $[\sin(x - \frac{\pi}{3})] \cos^3 x + [\tan^2 x]$ وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$ کدام است؟

۱۰۷

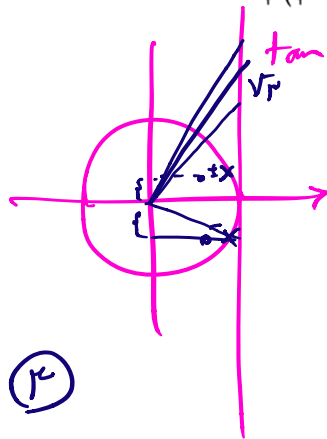
(۴) حد ندارد

۳ (۳) ✓

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow \pi/3^+} f(x) = \underbrace{[\sin(\cdot^+)]}_{\cdot^+} \underbrace{\cos^3 \pi}_{-1} + \underbrace{[\tan^2(\pi/3^+)]}_{(\sqrt{3}^+)^2} = 4$$

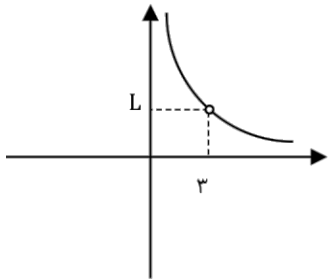


$$\lim_{x \rightarrow \pi/3^-} f(x) = \underbrace{[\sin \cdot^-]}_{\cdot^-} \underbrace{\cos^3 \pi}_{-1} + \underbrace{[\tan^2 \pi/3^-]}_{(\sqrt{3}^-)^2} = 1 + 1 = 2$$



۱۰۸

شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{x^2 - a}{x^2 - 5x + 6}$ را نشان می‌دهد. حاصل $\frac{L}{a}$ کدام است؟



$$9 - 15 + 6 = 0$$

$$9 - a = 0 \rightarrow a = 9$$

$$\frac{L}{a} = \frac{7}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{7}{1} = 7$$

نکته: نکته تفاهت ← ریشه مشترک صورت و مخرج آ
مقدار حد تابع به ریشه صورت در صورت

۱ (۱)

$\frac{2}{3}$ (۲) ✓

$\frac{3}{2}$ (۳)

۲ (۴)



۱۰۹

حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - [x^3]}{x^2 - [x^2]}$ وقتی $x \rightarrow 2^+$ ، کدام است؟

۲ (۱)

۳ (۲) ✓

-۲ (۳)

-۳ (۴)

$$\begin{aligned} x \rightarrow 2^+ &\rightarrow x^3 \rightarrow 8^+ \rightarrow [x^3] = 8 \\ &\rightarrow x^2 \rightarrow 4^+ \rightarrow [x^2] = 4 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2}{2x} = \frac{12}{4} = 3$$

رفع ابهام در از حد صحت با برابر است
اول کسیر قدر صحت برابر است را
مقتدر می کنیم.



اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a+rx}-1}{(1+rx)^{\frac{1}{r}}-1} = b$ مقدار $a+b$ کدوم است؟ $(a, b \in \mathbb{R})$

۱۱۰

$\frac{7}{6}$ (۴)

$\frac{9}{8}$ (۳)

$\frac{13}{12}$ (۲) ✓

$\frac{5}{4}$ (۱)

$\sqrt{a}-1=0 \rightarrow \sqrt{a}=1 \rightarrow a=1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+rn}-1}{(1+rn)^{\frac{1}{r}}-1} \stackrel{H}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{r}{2\sqrt{1+rn}}}{\frac{1}{r}(1+rn)^{\frac{1}{r}-1} \times r} = \frac{\frac{r}{2}}{\frac{1}{r} \times r} = \frac{1}{r} = b$$

صورت عدد نزده
صورت = $\pm \infty$

$\frac{1}{r} = b$



خارج ۹۵

اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه b کدام است؟

۱۱۱

۲ (۴)

۱ (۳)

۱ (۲) ✓

۲ (۱)

$$2a + b = 0 \rightarrow 2a = -b \rightarrow a = -\frac{b}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{-\frac{b}{2}x + b} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}}{-\frac{b}{2}}$$

$x \rightarrow 2$

$$= \frac{1 - \frac{3}{2}}{-\frac{b}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{b}{2}} = \frac{-1}{2b} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -1$$

$$2 - \sqrt{4} = 0$$

$$\frac{\text{صفر}}{\text{عدد غیر صفر}} = 0$$



ریاضی ۹۳

حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ کدام است؟

$-\frac{3}{4}$ (۲) ✓

۱۱۲

$-\frac{3}{2}$ (۱)

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{(1 - \frac{n^2}{2})^2 - (1 - \frac{n^2}{2})^{1/2}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1 + 2(-\frac{n^2}{2}) - (1 + \frac{1}{2}(-\frac{n^2}{2}))}{n^2}$$

سه هم‌اندر هم:

$\sin n \sim n - \frac{n^3}{6}$

$\rightarrow \cos n \sim 1 - \frac{n^2}{2}$

$\tan n \sim n + \frac{n^3}{3}$

$(1+n)^n \sim 1 + nn$ (هم‌اندر هم)

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{-n^2 + \frac{1}{2}n^2}{n^2} = \frac{-\frac{1}{2}n^2}{n^2} = -\frac{1}{2}$$



۱۱۳

حد کسر $\frac{2\sqrt{x} - \sqrt{\sin 4x}}{x^2\sqrt{x}}$ وقتی $x \rightarrow 0^+$ کدام است؟

$\frac{16}{3}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱) ✓

$\frac{64}{3}$ (۴)

$\frac{1}{6}$ (۳)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n} - \sqrt{4n - \frac{(4n)^2}{2}}}{n^2\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n} - \sqrt{4n \left(1 - \frac{16n^2}{2}\right)}}{n^2\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n} - 2\sqrt{n} \sqrt{1 - \frac{16n^2}{2}}}{n^2\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 2 \left(1 - \frac{16n^2}{2}\right)^{1/2}}{n^2}$$

$\sin n \sim n - \frac{n^3}{6}$
 $\sin 4n \sim 4n - \frac{(4n)^3}{6}$
 $2 - 2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{16n^2}{2}\right)\right)$

$\frac{1}{3}$



۱۱۴

مقادیر a و b برای آن که داشته باشیم: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2 - ax + b} = +\infty$ کدام است؟

$-a = b = -4$ (۴)

$a = b = 4$ (۳) ✓

$a = b = -2$ (۲)

$a = -b = 2$ (۱)

$\lim \frac{0^+}{0^+} = +\infty$

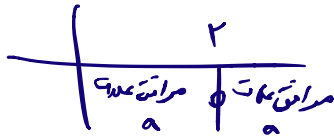
خرج داران را بر مضاعف ۲ بواره

$x^2 - ax + b = (x-2)^2$

$x^2 - ax + b = x^2 - \varepsilon x + \varepsilon$

$a = \varepsilon$

$b = \varepsilon$



$\lim_{n \rightarrow a} \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{\text{عدد نرینر}}{\text{صفر}}$

صفر صفر

تقریب

صفر صفر



حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} (9 - x^2) \cot\left(\frac{\pi x}{3}\right)$ کدام است؟

۱۱۵

$$\lim (9 - x^2) \times \frac{1}{\tan \frac{\pi x}{3}} \stackrel{(4)}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{\tan \frac{\pi x}{3}} \stackrel{(3)}{=} \frac{\frac{2}{\pi}}{\frac{18}{\pi}} \stackrel{(2)}{=} -\frac{18}{\pi} \quad (1) \checkmark$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2x}{\frac{\pi}{3} (1 + \tan^2 \frac{\pi x}{3})} = \frac{-6}{\frac{\pi}{3}} = -\frac{18}{\pi}$$

Handwritten notes and diagrams:
 - A circle around the final answer $-\frac{18}{\pi}$.
 - A diagram showing the limit process: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9-x^2}{\tan \frac{\pi x}{3}} \rightarrow \frac{0}{0}$ (circled) $\rightarrow \frac{1}{\frac{0}{18}} \rightarrow \frac{18}{0}$.



تجربی ۹۳

حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{2x^2 + 5x + 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right)$ کدام است؟

۱۱۶

$$\frac{5}{12} \quad (3) \quad \checkmark$$

$$-\frac{5}{12} \quad (2)$$

$$-\frac{7}{12} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow -2} \frac{3}{(n+2)(2n+1)} - \frac{4}{(n+2)(n-2)}$$

$$\lim_{n \rightarrow -2} \frac{3n - 7 - 4(2n+1)}{(n+2)(n-2)(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow -2} \frac{-8n - 11}{(n+2)(n-2)(2n+1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow -2} \frac{-8(-2) - 11}{(-2+2)(-2-2)(-4+1)} = \frac{5}{(-4)(-4)(-3)} = \frac{5}{12}$$

$$n \rightarrow -2$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow -2} \frac{-8n - 11}{(n+2)(n-2)(2n+1)} \\ \lim_{n \rightarrow -2} \frac{-8n - 11}{(n+2)(n-2)(2n+1)} \\ \lim_{n \rightarrow -2} \frac{-8n - 11}{(n+2)(n-2)(2n+1)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \infty - \infty \\ \text{فرض نکن} \end{array}$$



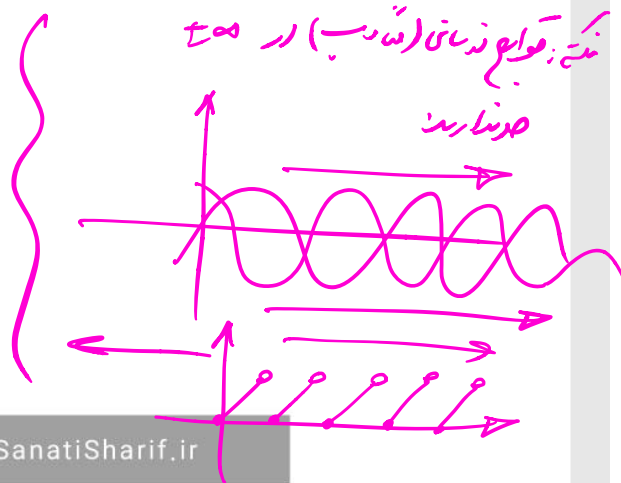
۱۱۷

حد عبارت $\frac{1}{x^2} (1 - x^2 \lfloor \frac{1}{x^2} \rfloor)$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟ $\lfloor \cdot \rfloor$ [نماد جزء صحیح است.]

ریاضی ۹۵

(۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ∞ (۴) حد ندارد.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} - \left\lfloor \frac{1}{n^2} \right\rfloor \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (t - \lfloor t \rfloor)$$





$$\lim_{m \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{-2x+1} + \sqrt{2yx}}$$

Handwritten notes: $m \rightarrow -\infty$, $\sqrt{-x+1}$, \sqrt{x} , $\sqrt{-2x+1}$, $\sqrt{2yx}$

$$\frac{1}{2} \quad (4) \checkmark$$

$$= \lim \frac{\sqrt{-n}}{\sqrt{2n}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

حد تابع $\frac{\sqrt{-x+1} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{-2x+1} + \sqrt[3]{2yx}}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ کدام است؟

۱۱۸

(۳) حد ندارد

(۲) صفر

(۱) $\frac{1}{3}$

$a \rightarrow \pm\infty$

همانند پرچون

$$ax^n + bx^{n-1} + \dots \sim ax^n$$



۱۱۹ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax^{n-6}}$ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ کدام است؟ خارج ۹۴ / مشابه تجربی ۹۵

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax^{n-6}} = \frac{2}{a} \quad (3) \qquad \frac{1}{3} \quad (4) \qquad -\frac{1}{8} \quad (2) \checkmark \qquad -\frac{1}{6} \quad (1) \\
 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax^{n-6}} = \frac{2x}{ax^{n-6}} = \frac{2}{a} = -\frac{1}{2} \\
 & \qquad \qquad \qquad a = -7 \\
 & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{-7x^{-7}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 + \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}}{-7} \\
 & \qquad \qquad \qquad \left(\begin{array}{l} n=1 \\ a=-7 \end{array} \right) \\
 & \qquad \qquad \qquad = \frac{2 + \frac{-5}{2\sqrt{4}}}{-7} = \frac{2 - \frac{5}{4}}{-7} = \frac{\frac{8-5}{4}}{-7} = \frac{\frac{3}{4}}{-7} = -\frac{1}{8}
 \end{aligned}$$



اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + 3x^2 + x - 1}{ax^2 + 3x^2 - 5} = 2$ باشد $a - n$ کدام نمی تواند باشد؟ $(n \in \mathbb{N})$ ۱۲۰

~~$-\frac{1}{2}$ (۴)~~ ~~$-\frac{1}{2}$ (۳)~~ ~~$-\frac{1}{2}$ (۲)~~ ~~$-\frac{1}{2}$ (۱)~~

$n = 4 \rightarrow \frac{a n \epsilon + 3 n \epsilon}{a n \epsilon} = \frac{a + 3}{a} = 2 \rightarrow a + 3 = 2a \rightarrow a = 3$
 $n = 3 \rightarrow \frac{3 n \epsilon}{a n \epsilon} = 2 \rightarrow \frac{3}{a} = 2 \rightarrow a = \frac{3}{2} \rightarrow a - n = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$
 $n = 2 \rightarrow \frac{2 n \epsilon}{a n \epsilon} = 2 \rightarrow \frac{2}{a} = 2 \rightarrow a = 1 \rightarrow a - n = 1 - 2 = -1$
 $n = 1 \rightarrow \frac{1 n \epsilon}{a n \epsilon} = 2 \rightarrow \frac{1}{a} = 2 \rightarrow a = \frac{1}{2} \rightarrow a - n = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

$a - n = 3 - 4 = -1$

$a - n = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$

$a - n = 1 - 2 = -1$

$a - n = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}$ (۴) ✓ ~~$-\frac{1}{2}$ (۳)~~ ~~$-\frac{1}{2}$ (۲)~~ ~~$-\frac{1}{2}$ (۱)~~



اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax + 5 + \sqrt{4x^2 + 2bx + 1}) = 3$ ، حاصل $a + b$ کدام است؟

۱۲۱

۵ (۴)

۶ (۳) ✓

۴ (۲)

۲ (۱)

همانتر نزدیک

$$\sqrt{4x^2 + 2bx + 1} \sim \sqrt{4} \left| x + \frac{2b}{4} \right|$$

همانتر نزدیک

$$\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots} \sim \sqrt[n]{a} \left| x + \frac{b}{na} \right|$$

میزج

$$\sqrt[n]{a} \left| x + \frac{b}{na} \right|$$

میزج

$$\sqrt[n]{a} \left(x + \frac{b}{na} \right)$$

$$2 \left| x + \frac{b}{2} \right| \xrightarrow{x \rightarrow -\infty}$$

$$-2x - \frac{b}{2}$$

$a=2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 5 - 2x - \frac{b}{2}) = 3$$

$$5 - \frac{b}{2} = 3 \rightarrow \frac{b}{2} = 2 \rightarrow b = 4$$



۱۲۲ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) \left[\frac{1}{x-1} \right]$ کدام است؟

۲) صفر

۱) ۲ ✓

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) \left[\frac{1}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \cancel{(x^2 - 1)} \times \frac{1}{\cancel{x-1}}$$

$\frac{1}{2}$ (۴) $+\infty$ (۳)
 $m+1$

$\frac{1}{0^+} = +\infty$ $= 2$

همانند برابرت: $a \rightarrow \pm \infty$
 $[n] \sim n$



حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$ برابر است با:

۱۲۳

صفر (۱) ✓

∞ (۲)

۲ (۳)

e (۴)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = 0$$

مقدارند: $x \rightarrow \pm \infty$

$$x^2 \rightarrow \infty$$

$$e^x \rightarrow \infty$$

مقدارند بزرگتر



حد و پیوستگی / پیوستگی در نقطه

تابع $f(x) = \begin{cases} 2[x] - \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ مفروض است. کدام گزینه وضعیت این تابع را در $x = 1$ نشان می‌دهد؟

۱۲۴

(۴) هیچ نوع پیوستگی ندارد.

(۳) پیوسته ✓

(۲) فقط از چپ پیوسته

(۱) فقط از راست پیوسته

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2[1^+] - \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$$

$$= 2 - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = 2 - 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2[1^-] - \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = 1 + 1 = 2$$

تابع f در $x=a$ پیوسته است

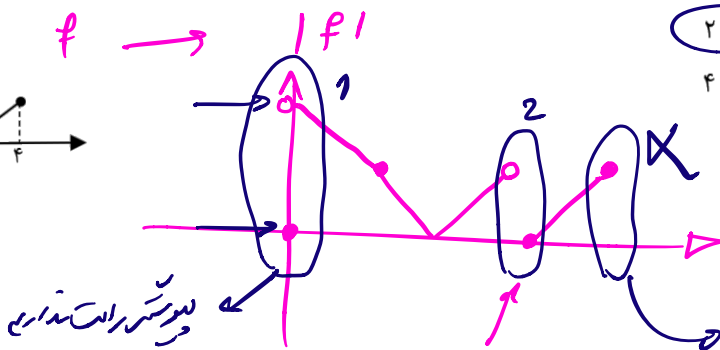
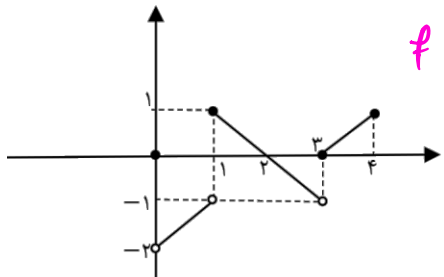
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

پیوسته از راست
پیوسته از چپ



شکل مقابل نمودار تابع $y = f(x)$ است. تابع $y = |f(x)|$ در چند نقطه از بازه $[0, 4]$ ناپیوسته است؟

۱۲۵



۲ (۲) ✓
۴ (۴)

۱ (۱)
۳ (۳)



حد و پیوستگی / پیوستگی در نقطه

تجربی ۹۳

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\tan^2 x}{\cos 2x} & 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ a \cos 3x & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ تابع با ضابطه

در $x = \frac{\pi}{4}$ مقدار a در $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته است؟

۲ (۴) $\sqrt{2}$ (۳) -۱ (۲) $-2\sqrt{2}$ (۱) ✓

۱۲۶

$a \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a$ حد از دست راست

$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1-\tan^2 n}{\cos 2n} \stackrel{H}{=} \lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{-2 \tan n (1+\tan^2 n)}{-2 \sin 2n} = \frac{\cancel{2}(1)(1+1)}{\cancel{2}(1)} = \frac{2}{1} = 2$

$n \rightarrow \frac{\pi}{4}^-$

$n \rightarrow \frac{\pi}{4}^-$

$-\frac{\sqrt{2}}{2} a = 2 \rightarrow a = -\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -2\sqrt{2}$



ریاضی خارج ۹۵

به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \cdot < x < a \\ 1 - \frac{x}{4} & a \leq x \end{cases}$ همواره پیوسته است؟

(۴) هیچ مقدار a ۲ (۲) ✓ ۱ (۱)

۱۲۷

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

$$1 - \frac{a}{\epsilon} = \frac{1}{a} \rightarrow a - \frac{a^2}{\epsilon} = 1 \rightarrow \epsilon a - a^2 = \epsilon$$

$$a^2 - \epsilon a + \epsilon = 0$$

$$(a - \epsilon)^2 = 0 \rightarrow a = \epsilon$$



اگر $f(x) = \frac{[x]}{x+a[2x]}$ در $x = 2$ پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟

۱۲۸

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲) ✓

-۲ (۱)

$$\frac{[2^+]}{2+a[2^+]} = \frac{2}{2+2a} = \frac{1}{1+a}$$

$$\frac{[2^-]}{2+a[2^-]} = \frac{1}{2+a}$$

$$\frac{1}{1+a} = \frac{1}{2+a}$$

$$1+a = 2+a \rightarrow a = -1$$



توابع با ضابطه $f(x) = \left[\frac{3x}{2} \right]$ و $g(x) = \left[\frac{-3x}{2} \right]$ در $x = \frac{4}{3}$ به ترتیب:

۱۲۹

(۲) پیوستگی چپ و پیوستگی راست دارند.

(۴) پیوستگی چپ و پیوستگی چپ دارند.

(۱) پیوستگی راست و پیوستگی چپ دارند.

(۳) پیوستگی راست و پیوستگی راست دارند.

$$\left[-\frac{3}{2} \left(\frac{4}{3} \right) \right] = [-2] = -2$$

$$\left[-\frac{3}{2} \left(\frac{4}{3} \right)^+ \right] = [-2^-] = -2$$

$$\left[-\frac{3}{2} \left(\frac{4}{3} \right)^- \right] = [-2^+] = -2$$

$$\left[\frac{3}{2} \left(\frac{4}{3} \right) \right] = [2] = 2$$

$$\left[\frac{3}{2} \left(\frac{4}{3} \right)^+ \right] = [2^+] = 2$$

$$\left[\frac{3}{2} \left(\frac{4}{3} \right)^- \right] = [2^-] = 1$$



ریاضی ۹۵

تعداد نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطه $f(x) = [x^2]$ در بازه $[-1, 2]$ ، کدام است؟

۱۳۰

۶ (۴)

۵ (۳) ✓

۴ (۲)

۳ (۱)

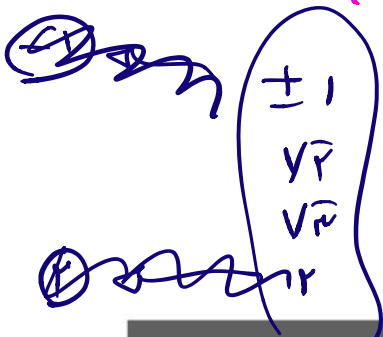
$-1, 2 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 0, 1, 2, 3, 4$

$[1] = 1$

$[1^-] = 0$

$[4] = 4$

$[4^-] = 3$

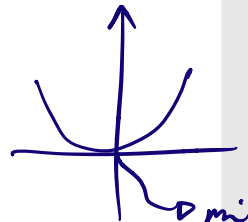


- ~~$x^2 = 0 \rightarrow n = 0$~~
- $x^2 = 1 \rightarrow n = \pm 1$
- $x^2 = 2 \rightarrow n = \sqrt{2}$
- $x^2 = 3 \rightarrow n = \sqrt{3}$
- $x^2 = 4 \rightarrow n = 2$

جمع دارد

$[f(x)]$

ناپیوستگی



$f(x) \in \mathbb{Z} \leftarrow$ این نقطه



جمله های سوم و هشتم یک دنباله حسابی به ترتیب برابر ۱۷ و ۷۲ است. جمله دهم این تصاعد کدام است؟

۱۳۱

۸۶ (۴)

۹۶ (۳)

۸۴ (۲)

۹۴ (۱) ✓

$$a_8 = a_1 + 7d = 17$$

$$a_8 = a_1 + 7d = 72$$

$$\rightarrow 5d = 55 \rightarrow d = 11$$

$$a_1 + \frac{7(11)}{7} = 17 \rightarrow a_1 = -5$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = -5 + \frac{9(11)}{1} = 95$$

دنباله حسابی

$$a_1 \xrightarrow{+d} a_1 + d \xrightarrow{+d} a_1 + 2d \dots$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$



۱۳۲

تصادد حسابی با جمله اول ۶۳ و قدرنسبت -۴ ، چند جمله مثبت دارد؟

۱۸ (۴)

۱۷ (۳)

۱۶ (۲) ✓

۱۵ (۱)

$$7V - \epsilon n > 0 \rightarrow \epsilon n < 7V$$

$$n < \frac{7V}{\epsilon}$$

$$n \in \mathbb{N} \rightarrow$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, 14$$

$$\rightarrow 17, \dots$$

$$a_1 = 7V$$

$$d = -\epsilon$$

$$a_n = 7V + (n-1) \times (-\epsilon)$$

$$= 7V - \epsilon n + \epsilon$$

$$a_n = 7V - \epsilon n$$



۱۳۳

واسطه عددی بین دو عدد $1 + \sqrt{3}$ و $\frac{2}{1-\sqrt{3}}$ کدام است؟

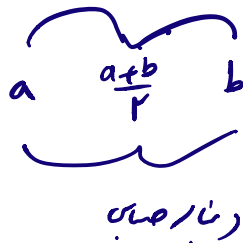
$\frac{1}{2}$ (۳)

$\sqrt{3}$ (۲)

صفر (۱) ✓

$$\frac{2}{1-\sqrt{3}} \times \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{1-3}$$

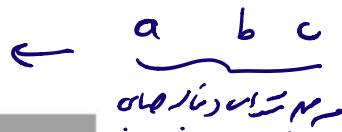
$$\frac{(-1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})}{2} = 0$$



واسطه عددی ← واسطه حسابی

سنتز (۱)

$$b = \frac{a+c}{2}$$





در یک دنباله حسابی $a_2 + a_8 = 32$ باشد، آن گاه $a_2 + a_5 + a_8$ کدام است؟

۱۳۴

۳۲ (۴)

۲۸ (۳)

۴۸ (۲) ✓

۴۰ (۱)

۳۲

۱۴

$$32 + 14 = 46$$

$$a_1 + d + a_1 + 7d = 32$$

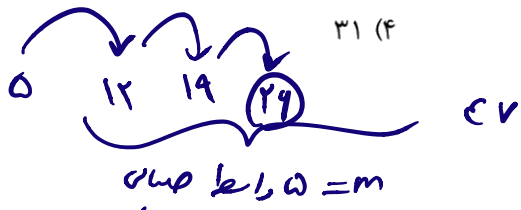
$$2a_1 + 8d = 32$$

$$a_0 = a_1 + 8d = 14$$

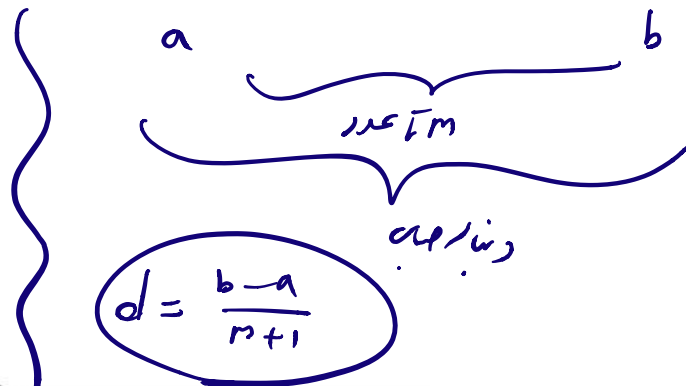


بین دو عدد ۵ و ۴۷ پنج واسطه حسابی درج کرده ایم. جمله سوم درج شده کدام است؟

۱۳۵



$$d = \frac{37 - 0}{5 + 1} = \frac{37}{6} = 6.1667$$



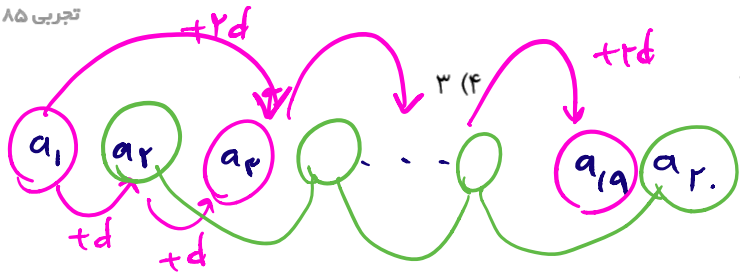


۱۳۶

در بیست جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی عددی، مجموع جملات ردیف فرد، ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج، ۱۵۰ می‌باشد.

جمله‌ی اول کدام است؟

تجربی ۸۵



صفر (۱) ✓

۱ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)

$$\cancel{[ra_1 + 18d] = 135} \quad 27$$

$$\cancel{[ra_1 + 17d] = 150} \quad 3$$

$$2d = 3 \rightarrow d = 1,5$$

$$ra_1 + 18d = 27 \rightarrow ra_1 + 27 = 27$$

۴۰

$\rightarrow a_1 = 0$

$$S_{10} = \frac{1}{2} [2a_1 + (10-1)d] = 135 \leftarrow$$

$$S_{10} = \frac{1}{2} [2(a_1 + d) + (10-1)d] = 150 \leftarrow$$



در یک تصاعد هندسی جمله سوم و هشتم به ترتیب برابر ۱۶۰ و ۵ می باشد. قدرنسبت این تصاعد کدام است؟

۱۳۷

$\frac{1}{2}$ ✓

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۴)

$$a_1 q^2 = 160$$

$$a_1 q^7 = 5$$

$$\rightarrow q^5 = \frac{5}{160} = \frac{1}{32}$$

$$\rightarrow q = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$$

$$a_1 \xrightarrow{\times q} a_1 q \xrightarrow{\times q} a_1 q^2 \xrightarrow{\times q} a_1 q^3 \dots$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$



۱۳۸

در یک دنباله هندسی با چهار جمله، مجموع جمله های اول و آخر برابر ۱۳ و مجموع دو جمله وسط برابر ۴ است. مقدار

سنجش ۹۵

بزرگتر قدر نسبت دنباله کدام است؟

۴ (۴ ✓)

۶ (۳)

۸ (۲)

۲ (۱)

a aq aq^2 aq^3

$$\frac{a + aq^3 = 13}{aq + aq^2 = 4} \rightarrow \frac{a(1+q^3)}{aq(1+q)} = \frac{13}{4} \rightarrow \frac{(1+q)(1-q+q^2)}{q(1+q)} = \frac{13}{4}$$

$$4 - 4q + 4q^2 = 13q \rightarrow 4q^2 - 17q + 4 = 0 \rightarrow \Delta = 289 - 4(4)(4) = 289 - 64 = 225$$

$$q = \frac{17 \pm 15}{8} = \begin{cases} 4 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$



۱۳۹

بین دو عدد ۲ و ۱۶۲ هفت واسطه هندسی درج کرده ایم. جمله سوم درج شده کدام است؟

۱۲ (۴)

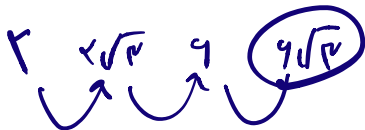
$6\sqrt{3}$ (۳) ✓

۱۸ (۲)

$9\sqrt{3}$ (۱)

$$q^1 = \frac{162}{2} = 81 = 3^4$$

$$q = \pm \sqrt{3}$$



۱۶۲

a b
 {
 im رابطه مشترک

{
 $m+r$ دنباله مشترک

$$q^{m+r} = \frac{b}{a}$$

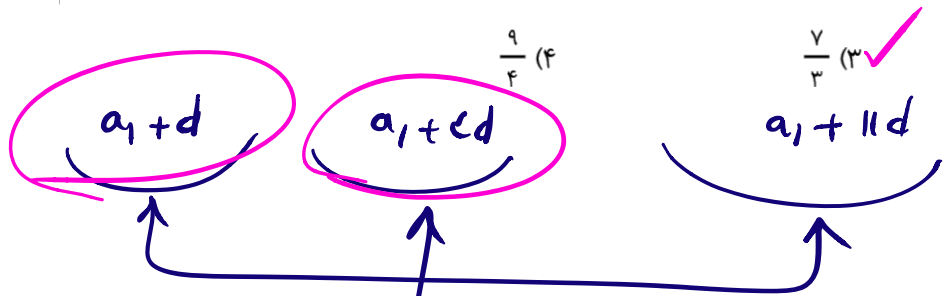


جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی، می توانند سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند. قدرنسبت دنباله

تجربی ۹۲

۱۴۰

هندسی کدام است؟



$\frac{5}{3}$ (۱) $\frac{7}{4}$ (۲) $\frac{7}{3}$ (۳ ✓) $\frac{9}{4}$ (۴)

$$(a_1 + d)(a_1 + 11d) = (a_1 + 4d)^2$$

$$\cancel{a_1^2} + 11d^2 + 11a_1d = \cancel{a_1^2} + 17d^2 + 8a_1d$$

$$5a_1d = 6d^2$$

$$5a_1 = 6d \rightarrow a_1 = \frac{6}{5}d$$

$$\frac{a_1 + 4d}{a_1 + d} = \frac{\frac{6}{5}d + 4d}{\frac{6}{5}d + d} = \frac{\frac{6}{5} + 4}{\frac{6}{5} + 1} = \frac{\frac{26}{5}}{\frac{11}{5}} = \frac{26}{11} = \frac{7}{3}$$



۱۴۱

به ازای یک مقدار x اعداد $x^2 - 2$ و $2x$ و $x^2 + 4$ به ترتیب سه جمله اول از دنباله هندسی نزولی اند. مجموع هفت جمله اول این دنباله، کدام است؟

تجربی ۹۳

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$= \frac{8 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{8 \left(\frac{1}{128} - 1 \right)}{-\frac{1}{2}}$$

$$= 7 \frac{127}{8} = \frac{127}{8}$$

$$\frac{63}{4} \quad (3)$$

$$\frac{125}{16} \quad (2)$$

$$\frac{117}{16} \quad (1)$$

$$n^2 + 4n^2 - 2n^2 - 8 = 5n^2$$

$$\rightarrow (t-4)(t+2) = 0$$

$$= \pm 2$$

$$n = 2 \rightarrow 8, 4, 2, \dots$$

$$n = -2 \rightarrow 8, -2, 2, \dots$$

مغیرکنونوا



ریاضی ۸۲

حاصل $(1 - x + x^2 - \dots + x^8)$ $(1 + x + x^2 + \dots + x^8)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟

۱۴۲

۵۱۶ (۴)

۵۱۲ (۳)

۵۱۱ (۲) ✓

۵۰۷ (۱)

$$\underbrace{1, x, x^2, \dots, x^8}_{S_9}$$

$$S_9 = \frac{1(x^9 - 1)}{x - 1} = \frac{x^9 - 1}{x - 1}$$

$$S'_9 = \frac{1((-x)^9 - 1)}{(-x) - 1}$$

$$\underbrace{1, -x, x^2, -x^3, \dots, x^8}_{S_9}$$

$$\frac{x^9 - 1}{x - 1} \times \frac{-x^9 - 1}{-x - 1} = \frac{x^9 - 1}{x - 1} \times \frac{x^9 + 1}{x + 1} = \frac{x^9 - 1}{x^2 - 1} = \frac{x^9 - 1}{x^2 - 1} = \frac{512 - 1}{1} = 511$$



۱۴۳

تجربی ۹۵

در یک دنباله هندسی نزولی هر جمله آن، نصف مجموع تمام جملات بعدی است. قدر نسبت آن کدام است؟

$$\frac{3}{4} \text{ (۴)}$$

$$\frac{2}{3} \text{ (۳) ✓}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{3} \text{ (۱)}$$

$$(a_1) \left[a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad \dots \right]$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{a_1}{1-q} - a_1 \right)$$

$$1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-q} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - 1 + q}{1-q} \right)$$

دنباله هندسی
 $|q| < 1$
 $-1 < q < 1$

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q}$$

$$1 - 2q = q \rightarrow 3q = 1 \rightarrow q = \frac{1}{3}$$



جملات دنباله $\frac{2}{399}, \frac{2}{3999}, \frac{2}{39999}, \frac{2}{399999}, \dots$ به یک عدد ثابت و گویا بسیار نزدیک می‌شود. جمله دهم دنباله

۱۴۴

ریاضی ۹۴

تفاضل آن‌ها از این عدد ثابت کدام است؟

$$2 \times 10^{-10} \quad (4)$$

$$10^{-9} \quad (3)$$

$$10^{-10} \quad (2)$$

$$10^{-11} \quad (1) \quad \checkmark$$

همین‌ش‌من ← $0,01 = 10^{-2}$

~ ← $0,001 = 10^{-3}$

$2,4$

هم‌رم ← 10^{-11}



دنباله ها / جمله عمومی

۱۴۵

دنباله‌ای با جمله عمومی $a_n = \frac{2n+7}{4n-25}$ چند جمله منفی دارد؟

۹ (۱)

۸ (۲)

۷ (۳)

۶ (۴) ✓

$$\begin{array}{l} \textcircled{2n+7} \\ \textcircled{4n-25} \end{array} \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} \frac{7}{2} \\ \frac{25}{4} \end{array}$$

$$-\frac{7}{2} < n < \frac{25}{4} \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$



دنباله‌ای با جمله عمومی $b_n = -2n^2 - 5n + 33$ چند جمله نامنفی دارد؟

۱۴۶

(۴) بی شمار

(۳) ۵

(۲) ۹

(۱) ۳ ✓

$$-2n^2 - 5n + 33 \geq 0 \rightarrow 2n^2 + 5n - 33 \leq 0 \rightarrow \Delta = 25 - 4(2)(-33)$$

$$n = \frac{-5 \pm 17}{4} = \begin{cases} -11/2 \\ 3 \end{cases} \rightarrow -\frac{11}{2} \leq n \leq 3$$

$$n \in \mathbb{N} \rightarrow n = 1, 2, 3$$

۲۷ + ۲۷
۲۷
= ۲۸



۱۴۷

تجربی ۹۵

در یک دنباله اعداد $a_1 = 1$ و برای هر $n \geq 2$ داریم: $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ، جمله هشتم این دنباله کدام است؟

۲۵۵ (۲)

۲۴۷ (۳)

۱۵۹ (۲)

۱۲۷ (۱)

جمله هشتم؟
جمله نهم؟

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 2(1) + 1 = 3$$

$$a_3 = 2a_2 + 1 = 2(3) + 1 = 7$$

$$a_4 = 2a_3 + 1 = 2(7) + 1 = 15$$

$$a_5 = 2(15) + 1 = 31$$

$$a_6 = 2(31) + 1 = 63$$

$$a_7 = 2(63) + 1 = 127$$

$$a_8 = 2(127) + 1 = 255$$



کدام گزینه درباره دنباله‌ای با جمله عمومی $a_n = \begin{cases} 3^{-n+1} & n > 50 \\ \frac{2n+3}{n-1} & n \leq 50 \end{cases}$ درست است؟

۱۴۸

(۴) واگرا

(۳) همگرا به ۳

(۲) همگرا به صفر ✓

(۱) همگرا به ۲

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{-n+1} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{\infty}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$$

رابطه همگرایی



کدام دنباله همگرا است؟

۱۴۹

$\left\{ \left[1 - \frac{(-1)^n}{n} \right] \right\}$ (۴) $\left\{ \left[2 + \frac{(-1)^n}{n} \right] \right\}$ (۳) $\left\{ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right\}$ (۲) $\{n^{(-1)^{n-1}}\}$ (۱) ✓

... ۲، ۰، ۱، ۰، ۲، ۲، ۱، ۱، ۲، ۰، ۰، ۱، ۰، ۱، ۰، ۱، ۰، ...

زبانه‌ها دور می‌مانند زبانه‌ها دور می‌مانند زبانه‌ها دور می‌مانند

$n^{-1} = \frac{1}{n}$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$



۱۵۰

دنباله‌ای با کدام جمله عمومی، همگرا است؟ [] [نماد جزء صحیح است.]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} = \infty$$

$$v_n = \frac{n^2 - 1}{2n + 1} \quad (۴)$$

$$a_n = \sin \frac{\pi}{n} \quad (۳) \quad \checkmark$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} = \sin 0 = 0$$

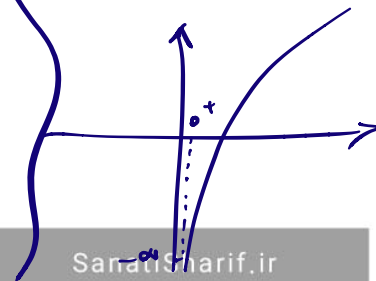
$$b_n = \log \frac{1}{n} \quad (۲)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log \frac{1}{n} = \log 0^+ = -\infty$$

$$u_n = \left[\frac{(-1)^n}{n} \right] \quad (۱)$$



۰، ۱-، ۰، ۱-
زیادتر از ۰





۱۵۱

(۱) صفر

حد دنباله $u_n = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+2}{n+2}$ کدام است؟

$$u_n = \frac{n^2(n+2) - (n+1)(n^2+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{\cancel{n^3} + 2n^2 - \cancel{n^3} - n^2 - 2n - 2}{(n+1)(n+2)} = \frac{\cancel{n^2} - \cancel{2n} - 2}{\cancel{n^2} + \cancel{2n} + 2}$$

①



حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+1} + 3^{n-1}}{4^{n-1} + 3^{n+1}}$ کدام است؟

۱۵۲

(۱) صفر

۸ (۲)

۱۶ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۴)

$$2^{2n+1} = 2 \times 4^n$$

$$3^{n-1} = \frac{1}{3} \times 3^n$$

$$4^{n-1} = \frac{1}{4} \times 4^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 4^n + \frac{1}{3} \times 3^n}{\frac{1}{4} \times 4^n + 3^{n+1}} = \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$$



دنباله $\left\{ \frac{2n-1}{n+1} \right\}$ به کدام عدد همگرا است؟

۱۵۳

۲ (۱)

۱ (۲) ✓

۳ (۳) صفر

۴ (۴) واگرا است.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{2n-1}{n+1} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{2n+2-2}{n+1} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[2 - \frac{2}{n+1} \right]$$

$$= [2] = 1$$



حد دنباله $u_n = n\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ، کدام است؟

۱۵۴

(۱) $\frac{2}{3}$

(۲) صفر ✓

(۳) $\frac{3}{2}$

(۴) موجود نیست.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

Handwritten notes: The term n is circled in pink, and the term $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ is circled in blue. Arrows point from the circled terms to the right, indicating their respective limits as $n \rightarrow +\infty$.



۱۵۵

حد دنباله $\left\{ n^2 \left(\cos \frac{1}{n} - \cos \frac{3}{n} \right) \right\}$ وقتی $n \rightarrow \infty$ کدام است؟

۲ (۳)

۴ (۲) ✓

۸ (۱)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\cos \left(\frac{1}{n} \right) - \cos \frac{3}{n} \right)$$

$\frac{9}{2}$ (۴)

$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$
 $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\cancel{1} - \frac{1}{n^2} - \left(\cancel{1} - \frac{9}{n^2} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{9}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{9}{1} - \frac{1}{1} = \frac{8}{1} = 8$$



۱۵۶

دنباله $\left\{ \frac{3}{\sqrt{n^2-4n+1}} \sin \frac{n\pi}{3} \right\}$ به کدام عدد همگرا است؟

π (۱)

$\frac{\pi}{3}$ (۲)

$\frac{\pi}{6}$ (۳)

صفر (۴) ✓

صفر = کرانه دار \times صفر

صفر

$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0, \dots$

وسه کرانه دار



۱۵۷

کدام دنباله زیر، از بالا کران‌دار است، ولی از پایین کران‌دار نیست؟

$\left\{ \log \frac{1}{n} \right\}$ (۱) ✓

$\left\{ \sin \frac{\pi}{n} \right\}$ (۲)

$\left\{ \cot \frac{\pi}{n} \right\}$ (۳)

$\left\{ \cos \frac{n\pi}{2} \right\}$ (۴)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log \frac{1}{n} = \log 0^+ = -\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{\pi}{n} = \sin(0) = 0$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{n\pi}{2} = \dots$
صحت
... داده‌ها، داده‌ها، داده‌ها...
کران‌دار

دنباله‌ای همگرا باشد → کران‌دار

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cot \frac{\pi}{n} = \cot(0^+) = +\infty$

تعدیل کران‌داری
دنباله‌ها از بالا کران‌دار که صحت + نباشد
سه پاسی کران‌دار که صحت + نباشد
و دنباله‌ای صحت ندارد یعنی نقره‌اند
دارن ← کران‌دار



دنباله $u_n = \frac{1}{n^2+4}$ چگونه است؟

۱۵۸

نزولی (۲) ✓

(۱) صعودی

(۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی

$f' > 0 \rightarrow$ صعودی

$f' < 0 \rightarrow$ نزولی

$$f(n) = \frac{1}{n^2+4} \rightarrow f'(n) = \frac{-2n}{(n^2+4)^2} \rightarrow \text{منفی} < 0$$

↓
رابطه نزولی

$u_{n+1} \geq u_n \rightarrow$ صعودی

$u_{n+1} \leq u_n \rightarrow$ نزولی



آزاد ۸۷

$$: a_n = \frac{3n+1}{2n+1} \quad \text{دنباله}$$

۱۵۹

(۱) نزولی و همگرا است. (۲) صعودی و واگرا است. (۳) صعودی و همگرا است. (۴) ~~نزولی و واگرا است.~~

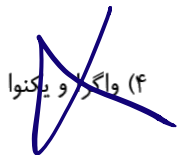
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2}$$

$$n=1 \rightarrow a_1 = \frac{4}{3} = 1,33$$

$$n=2 \rightarrow a_2 = \frac{7}{5} = 1,4$$



دنباله ها / یکنوایی



(۴) واگرا و یکنوا

(۳) همگرا و غیر یکنوا

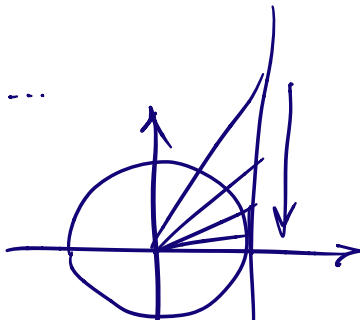
دنباله $u_n = \tan \frac{\pi}{n+2}$ چگونه است؟

۱۶۰

(۱) همگرا و صعودی (۲) همگرا و نزولی ✓

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tan \frac{\pi}{n+2} = \tan(0) = 0$$

$$\tan \frac{\pi}{2}, \tan \frac{\pi}{4}, \tan \frac{\pi}{6}, \dots$$





۱۶۱

دنباله $\left\{ \left[-\frac{1}{n} \right] \right\}$: [] نماد جزء صحیح است.

(۱) اکیداً صعودی است. (۲) اکیداً نزولی است. (۳) هم صعودی و هم نزولی است. (۴) غیریکنوا است.

... -۱ - ۱ - ۱ - ۱ -

نتر دنباله‌ها که هم صعودی، هم نزولی، دنباله‌ها آ



تجربی ۹۴

دنباله‌ای با جمله عمومی $a_n = \frac{7+4^{n-1}}{2+4^n}$ چگونه است؟

۱۶۲

کراندار - نزولی (۴) ✓

کراندار صعودی (۳) ✗

بی کران - نزولی (۲)

بی کران - صعودی (۱) ✗

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7 + 4^{n-1}}{2 + 4^n} = \frac{\frac{1}{4} \times 4^n}{4^n} = \frac{1}{4}$$

$$a_1 = \frac{7+4^0}{2+4^1} = \frac{7}{6} = \frac{7}{6}$$

$$a_2 = \frac{7+4^1}{2+4^2} = \frac{11}{18}$$



ریاضی ۹۵

~~(۴) صعودی - اگر~~

~~(۳) نزولی - همگرا~~

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{2n^2 + 2} = \frac{1}{2}$$

دنباله $\left\{ \frac{n^2 + (-1)^n}{2n^2 + 2} \right\}$ چگونه است؟

۱۶۳

(۱) غیر یکنوا - واگرا
(۲) غیر یکنوا - همگرا

افزاین

$$\frac{4+1}{2(4)+2} = \frac{1}{2}$$

۶/۵

$$\frac{9-1}{2(9)+2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$$



۱۶۴

دنباله $\left\{ \left[\frac{(-1)^n}{n} \right] \right\}$ چگونه است؟

(۱) نزولی - همگرا

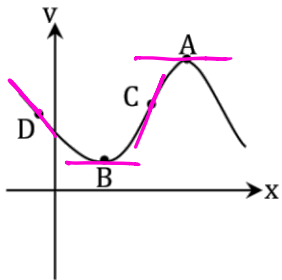
(۲) صعودی - واگرا

(۳) غیر یکنوا - همگرا

(۴) ✓ غیر یکنوا - واگرا

ه وا- ه وه وا- ه وه وا- ه وه وا-
↑ ↑ ↑ ↑

ریاضی خارج ۹۵



در کدام نقطه واقع بر منحنی روبه‌رو، مقدار مشتق بیش‌تر است؟ (منحنی مربوط به یک تابع

۱۶۵

مشتق‌پذیر در \mathbb{R} است.)

- A → ۰
- B → ۰
- C → $m > 0$
- D → $m < 0$

B (۲)

A (۱)

D (۴)

C (۳) ✓

در کتاب درسی یک سوال مشابه داریم که گفته در تابع $y = \sin x$ بیشترین مقدار صعود در کدام نقاط است؟!

مشتق در صورتی مثبت است که منحنی صعود کند



۱۶۶

اگر $f(x) = (x-2)[3x-2]$ ، حاصل $f'_-(2) - f'_+(2)$ کدام است؟

$$f'_-(x) = \lim_{n \rightarrow x^-} \frac{(x-2)[3n-2] - 0}{n-x} = \lim_{n \rightarrow x^-} [3n-2] =$$

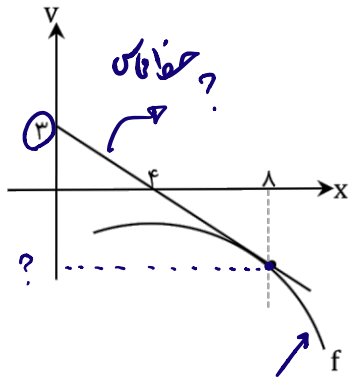
$$[3^- - 2] = [1^-] = 1$$

$$f'_+(x) = \lim_{n \rightarrow x^+} \frac{(x-2)[3n-2] - 0}{n-x} = \lim_{n \rightarrow x^+} [3n-2] = [3^+ - 2] = 1$$

$$f'(a) = \lim_{n \rightarrow a} \frac{f(n) - f(a)}{n-a}$$

$$f'_+(a) = \lim_{n \rightarrow a^+} \frac{f(n) - f(a)}{n-a}$$

$$f'_-(a) = \lim_{n \rightarrow a^-} \frac{f(n) - f(a)}{n-a}$$



با توجه به نمودار حاصل $4f'(1) + f(1)$ کدام است؟

۱۶۷

(۱) صفر

(۲) ۶

(۳) -۶ ✓

(۴) -۴

(0, 3)
(4, 0)

$$m = \frac{3 - 0}{0 - 4} = -\frac{3}{4}$$

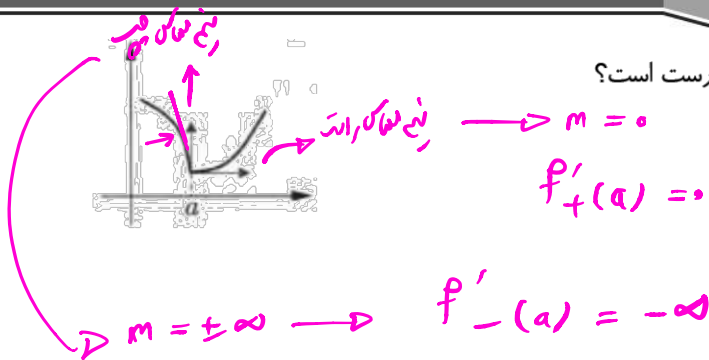
$$y = -\frac{3}{4}x + 3 \rightarrow f'(1) = -\frac{3}{4}$$

$$f(1) = -\frac{3}{4}(1) + 3 = -\frac{3}{4} + 3 = -\frac{3}{4}$$

$$4\left(-\frac{3}{4}\right) + (-3) = -3 - 3 = -6$$

۱۶۸

نمودار تابع f در اطراف $x = a$ به شکل مقابل است. کدام یک درست است؟



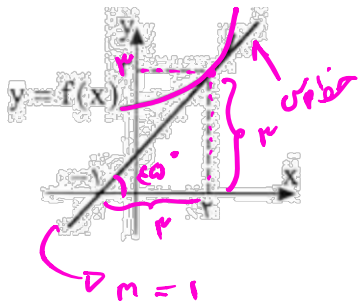
(۱) $f'_-(a) = -\infty, f'_+(a) = 0$ ✓

(۲) $f'_-(a) = +\infty, f'_+(a) = 0$

(۳) $f'_-(a) < 0, f'_+(a) > 0$

(۴) $f'_-(a) = 0, f'_+(a) = -\infty$

مشتق از سمت راست ← شیب منفی صاف است ← شیب صاف از سمت راست
 مشتق از سمت چپ ← شیب منفی بی‌نهایت است ← شیب منفی بی‌نهایت از سمت چپ



قسمتی از نمودار $y = f(x)$ شکل مقابل است. مشتق $\frac{x^2}{f(x)}$ در $x = 2$ کدام است؟

۱۶۹

- $\frac{9}{8}$ (۲)
- $\frac{9}{4}$ (۴)

- $\frac{8}{9}$ (۱) ✓
- $\frac{4}{9}$ (۳)

$$y = \frac{x^2}{f(x)} \rightarrow y' = \frac{2x(f(x)) - f'(x)(x^2)}{f^2(x)}$$

$$\begin{aligned} x=2 \rightarrow y' &= \frac{2f(2) - 2f'(2)}{f^2(2)} & f(2) &= 4 \\ & & f'(2) &= 1 \\ &= \frac{2(4) - 2(1)}{4^2} = \frac{8-2}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$



تجربی ۸۹

اندازه مشتق تابع $y = \frac{1 - \tan 2x}{1 + \tan 2x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{8}$ کدام است؟

۱۷۰

$\frac{1}{2}$ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱) ✓

$$y = \frac{1 - \tan 2\alpha}{1 + \tan 2\alpha} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)$$

$$y' = (-2)(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right))$$

$$y' = (-2)(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)) = -2$$

اگر همیشه از متن کلاس یادداشت‌ها را ساده‌تر و روان‌تر کنید، یادگیری را آسان‌تر می‌کند.

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$$



تجربی ۹۳

مشتق تابع $y = ۲\sin^۲\left(\frac{\pi}{۶} - \frac{x}{۴}\right)$ به ازای $x = \frac{\pi}{۳}$ کدام است؟

۱۷۱

$-\frac{1}{۸}$ (۴)

$-\frac{1}{۴}$ (۳) ✓

$-\frac{1}{۲}$ (۲)

$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ (۱)

$$y = ۲\sin^۲\left(\frac{\pi}{۶} - \frac{x}{۴}\right) \rightarrow y' = -\frac{1}{۲} \cos\left(\frac{\pi}{۶} - \frac{x}{۴}\right) \times \cancel{2} \sin\left(\frac{\pi}{۶} - \frac{x}{۴}\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{۶} - \frac{\pi}{۱۲}\right) \sin\left(\frac{\pi}{۶} - \frac{\pi}{۱۲}\right) = -\frac{1}{۲} \sin\left(\frac{\pi}{۶}\right) = -\frac{1}{۴}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{۲} \sin 2\alpha$$



اگر فرض کنیم $f(x) = (x - \sqrt{x^2 + x})^{99}$ و $g(x) = (x + \sqrt{x^2 + x})^{99}$ باشند آن گاه حاصل عبارت $f'(1)g(1) +$ ۱۷۲

کدام است؟ $g'(1)f(1)$

۱۰۰ (۴)

-۹۹ (۳) ✓

۹۹ (۲)

صفر (۱)

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$$

$$f'(a)g(a) + g'(a)f(a) = (fg)'(a)$$

$$f(x) \cdot g(x) = \underbrace{(x^2 - (x^2 + x))}_{-x}^{99} = -x^{99} \xrightarrow{m=1} -99x^{98}$$



مقدار مشتق تابع $f(x) = |x^2 - 1| + |x^2 - 2| + \dots + |x^2 - 10|$ به ازای $x = \frac{3}{2}$ چقدر است؟

۱۷۳

$\frac{3}{2}$
 -18 (۲)

-30 (۳)

18 (۲)

30 (۱)

$$x^2 - 1 + x^2 - 2 + \dots - x^2 =$$

$$2x^2 - 1x^2 + \dots \rightarrow -7x^2 + \dots \rightarrow -12x \quad n = \frac{3}{2}$$

$$-12x \cdot \frac{3}{2} = -18$$



اگر $f(x) = \sqrt{2 \sin(\pi x^2)}$ حاصل $f'(\frac{1}{\sqrt{9}})$ کدام است؟

۱۷۴

$$f'(x) = 2\pi x \times \frac{1}{\sqrt{2 \sin \pi x^2}} \xrightarrow{x = \frac{1}{\sqrt{9}}} f'(\frac{1}{\sqrt{9}}) =$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{9}} \times \sin \frac{\pi}{9} \times \frac{1}{\sqrt{2 \sin \frac{\pi}{9}}} = \frac{\cancel{2\pi} \times \cancel{\sqrt{9}}}{\cancel{\sqrt{9}} \times \cancel{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$



مقدار مشتق $f(\sqrt{1-3x})$ به ازای $x = -1$ کدام است؟

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -\frac{2}{3}$$

۱۷۵

۲ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳) ✓

$-\frac{1}{2}$ (۲)

-۲ (۱)

$$y = f(\sqrt{1-3x})$$

$$y' = -3x \frac{1}{\sqrt{1-3x}} \times f'(\sqrt{1-3x})$$

$$f'(x) = -\frac{2}{3x}$$

$$f'(a) = \lim_{n \rightarrow a} \frac{f(n) - f(a)}{n - a}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$x = -1 \rightarrow$

$$y' = \frac{-2}{\sqrt{1-3(-1)}} f'(-1) = -\frac{2}{2} f'(-1)$$

$$= -\frac{2}{2} \left(-\frac{2}{3(-1)}\right) = \frac{1}{3}$$



مشتق / تعریف مشتق $2n-2 \rightarrow -1$

۱۷۶

اگر $x \geq 1$ $f(x) = x^2 - 3x$
 اگر $x < 1$ $f(x) = x^2 - 3$

کدام است؟ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h^2) - f(1+h^2)}{h^2}$ حاصل

۶ (۴) -۷ (۳) ۴ (۲) -۵ (۱) ✓

هدر شده تعریفش با سوال حل کنید

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h^2) - f(1+h^2)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h f'(1-2h^2) - 2h f'(1+h^2)}{2h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} -2 f'(1-2h^2) - f'(1+h^2) = -2 f'_-(1) - f'_+(1)$$

$$= -2(3) - (-1) = -6 + 1 = -5$$



خرج ۸۸

اگر $y = \tan^2(\pi u)$ و $u = x + \sqrt{x}$ آنگاه $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x = \frac{1}{4}$ کدام است؟

۱۷۷

۸π (۴)

۴π (۳)

-۴π (۲)

-۸π (۱) ✓

$$\frac{dy}{du} = \pi x^2 \tan(\pi u) (1 + \tan^2 \pi u)$$

$$= \pi x^2 \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) (1 + \tan^2 \frac{\pi}{2}) = 2 \quad (-2\pi)$$

$$\frac{dy}{dn} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dn}$$

? ?

$$\frac{du}{dn} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{n}} \rightarrow 1 + \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = 2$$

$$u = n + \sqrt{n} \xrightarrow{n=\frac{1}{4}} \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$



۱۷۸

مشتق تابع $y = x^2 + x^3$ نسبت به x^3 برابر است با:

$\frac{2}{3}x + 1$ (۴) ✓	$3x + 1$ (۳)	$x + 1$ (۲)	$3x^2 + 3x^2$ (۱)
--------------------------	--------------	-------------	-------------------

$$\frac{d(x^2 + x^3)}{d(x^3)} = \frac{d(x^2 + x^3)}{dx}$$

$$= \frac{2x^2 + 3x^2}{3x^2} = \frac{2x + 3}{3} = \frac{2}{3}x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$



عامل صفر کننده

$$y = \sin x \times \cos^n x \quad n \in \mathbb{R}$$

$$y' = \cos x \times \cos^n x = \cos^n x \xrightarrow{x = \pi} (-1)^n = -1$$

مشتق تابع $y = \sin x \cos^n x$ در $x = \pi$ کدام است؟

-۱ (۳) ✓

۸ (۲)

۱۷۹

(۱) صفر

منه از عامل صفر کننده مشتق داریم



اگر $f(x) = e^{\tan^2 x} + 3$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{\pi}{4} - 2h) - f(\frac{\pi}{4} + 2h)}{h}$ کدام است؟

۱۸۰

$4e$

$-4e$

$-16e$

$16e$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{\pi}{4} - 2h) - f(\frac{\pi}{4} + 2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2f'(\frac{\pi}{4} - 2h) - 2f'(\frac{\pi}{4} + 2h)}{1}$$

بندقی منته ← هوسیل

$$= -2f'(\frac{\pi}{4}) - 2f'(\frac{\pi}{4}) = -4f'(\frac{\pi}{4})$$

$$f'(x) = 2 \tan x (1 + \tan^2 x) e^{\tan^2 x}$$

$$f'(\frac{\pi}{4}) = 2(1)(1+1)e^1$$

$$= 4e$$



با توجه به رابطه $y^2 + 2xy + 3x^2 - 5x = 1$ مقدار مشتق در نقطه $(1, 1)$ کدام است؟

۱۸۱

$\frac{4}{3}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$-\frac{2}{4}$ (۲) ✓

-۲ (۱)

$$y^2 + 2xy + 3x^2 - 5x - 1 = 0$$

F

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{F'_x}{F'_y} = - \frac{2y + 2x - 5}{2y + 6x} = - \frac{2+2-5}{2+6} = - \frac{1}{4}$$

$$F(x, y) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{F'_x}{F'_y}$$

نیت به x → F'_x

نیت به y → F'_y



اگر $y = x^2y + \sin \frac{x}{y} + 2$ باشد، حاصل مشتق x نسبت به y در نقطه $(0, 2)$ کدام است؟

۱۸۲

۲ (۴) ✓

-۲ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$-\frac{1}{2}$ (۱)

$$x^2y + \sin \frac{x}{y} + 2 - y = 0$$

$$\frac{dx}{dy} = - \frac{\overbrace{x^2 - \frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y}}^F - 1}{\underbrace{2xy + \frac{1}{y} \sin \frac{x}{y}}_G} = - \frac{-1}{\frac{1}{2} \cos \frac{x}{y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{F'_x}{F'_y}$$

$$\frac{dx}{dy} = - \frac{F'_y}{F'_x}$$



۱۸۳ در نقاطی از منحنی $x^2 - 4xy + 3y^2 + 1 = 0$ خط مماس بر منحنی موازی محور X ها است. طول نقطه ی تماس کدام است؟

خارج ۹۵

-۱, ۲ (۴)

۱, -۱ (۳)

۲, -۲ (۲)

۱, -۲ (۱)

مشتق ضمنی ← حفظ انفر ← سبب

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{F'_x}{F'_y} = 0 \rightarrow F'_x = 0 \rightarrow 2x - 4y = 0 \rightarrow 2x = 4y$$

$$x = 2y$$

$$y = \frac{x}{2}$$

$$x^2 - 4x\left(\frac{x}{2}\right) + 3\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 - 2x^2 + \frac{3}{4}x^2 + 1 = 0$$

$$-\frac{1}{4}x^2 = -1 \rightarrow x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$



معادله ی خط مماس بر منحنی $e^{xy} - \ln(e^{xy} + 3x) = 1$ در نقطه ی برخورد با محور x ها کدام است؟

۱۸۴

$3y + 2x = 0 \quad (۴)$

$3y - 2x = 0 \quad (۳)$

$2y - 3x = 0 \quad (۲)$

$2y + 3x = 0 \quad (۱)$

$y = 0 \rightarrow$

$e^0 - \ln(e^0 + 3x) = 1 \rightarrow \cancel{\sqrt{-\ln(1+3x) = 1}}$

$\ln(1+3x) = 0 \rightarrow 1+3x = e^0 = 1 \rightarrow \boxed{x = 0} \rightarrow A(0,0)$

$\frac{dy}{dx} = -$

$\frac{F'_x}{F'_y} = -$

$\frac{xy e^{xy}}{e^{xy} + 3x}$

$-\frac{3}{e^{xy} + 3x}$

$\frac{xy e^{xy}}{e^{xy} + 3x}$

$-\frac{3e^{xy}}{e^{xy} + 3x}$

$= - \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{e^0}}{e^0 + 3x} = - \frac{3 \cdot 1}{1 + 0} = -3$

$y = 0 = -\frac{3}{3}(x - 0)$

$3y = -3x$



به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیه اول محورهای مختصات مماس است؟
 خروج ۹۳

۱۸۵

-۴ (۱) ✓

۱۲ (۴)

۱۲ و -۴ (۳)

-۱۲ و ۴ (۲)

$$2x^2 + (m+1)x + m + 6 = x$$

$$2x^2 + mx + m + 5 = 0$$

$$\Delta = 0 \rightarrow m^2 - 4(2)(m+5) = 0 \rightarrow m^2 - 8m - 40 = 0$$

$$\Delta = 72 - 4(1)(-40) = 160 \rightarrow m = \frac{8 \pm 14}{2} = \begin{matrix} 12 \\ -4 \end{matrix}$$

~~$m = 12$~~

$$\rightarrow 2x^2 + 12x + 17 = 0 \rightarrow x^2 + 6x + 8.5 = 0 \rightarrow (x+3)^2 = 0 \rightarrow m = -12$$

نکته: (در تابع f , g ← مماس برهم)

$$f = g \rightarrow \text{مماس برهم}$$

$$\Delta = 0$$



۱۸۶

از نقطه $(-1, 4)$ دو مماس بر منحنی $y = \frac{x+1}{x-3}$ رسم شده. حاصل ضرب طولهای نقاط تماس چقدر است؟

$-\frac{25}{3} (4)$

$-35 (3)$

$\frac{25}{3} (2)$ ✓

$35 (1)$

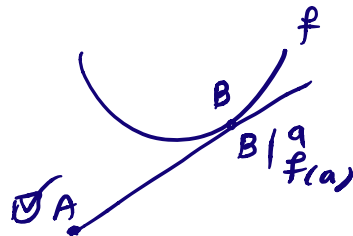
$B \mid \frac{a+1}{a-3}$

$A (-1, 4)$

$m_{AB} = \frac{\frac{a+1}{a-3} - 4}{a - (-1)}$

$= \frac{a+1 - 4(a+1)}{a+1} = \frac{13-3a}{(a+1)(a-3)}$

$\frac{13-3a}{(a+1)(a-3)}$



$m_{AB} = f'(a)$

$y' = \frac{-3-1}{(a-3)^2} = \frac{-4}{(a-3)^2}$

$= \frac{-4}{(a-3)^2}$

$= \frac{13-3a}{(a+1)(a-3)}$

$-4a-4 = (a-3)(13-3a)$

$-4a-4 = 13a+9a-3a^2-39$

$-3a^2+27a-35=0$



۱۸۷

از نقطه A به طول ۳ روی محور xها خطی با شیب مثبت بر سهمی $y = x^2$ مماس کرده ایم. عرض از مبدا این خط مماس کدام است؟

کتاب درسی

-۲۴ (۴)

-۱۲ (۳)

۳۶ (۲)

-۳۶ (۱) ✓

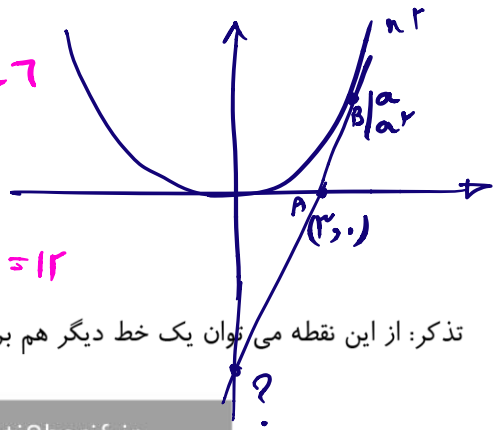
$$\frac{a^2 - 0}{a - 3} = 2a \rightarrow \frac{a}{a-3} = 2 \rightarrow a = 2a - 6$$

$$a = 6$$

$$B(4, 16) \quad A(3, 0)$$

$$m = \frac{16 - 0}{4 - 3} = \frac{16}{1} = 16$$

$$y - 0 = 16(x - 3) = 16x - 48$$



تذکره: از این نقطه می توان یک خط دیگر هم بر سهمی مماس کرد.



مشتق نهم تابع $y = x^3(x+2)^6$ در $x = 0$ کدام است؟

۱۸۸

$6 \times 8! (4)$

صفر (۳)

$12 \times 8! (2)$

۹! (۱) ✓

$$y = x^3 (x^6 + 6x^5 + 15x^4 + \dots)$$

$$= x^9 + \cancel{6x^8} + \cancel{15x^7} + \cancel{20x^6} + \dots$$

\downarrow
 $9x^8$
 \downarrow
 $72x^7$
 \downarrow
 $504x^6$
 \downarrow
 $3024x^5$
 \downarrow
 $15120x^4$
 \downarrow
 $60480x^3$
 \downarrow
 $181440x^2$
 \downarrow
 $362880x$
 \downarrow
 362880

$$x^9$$

$$\downarrow$$

$$9x^8$$

$$\downarrow$$

$$9 \times 8 x^7$$

$$\downarrow$$

$$9 \times 8 \times 7 x^6$$

$$\downarrow$$

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 x^5$$

$$\downarrow$$

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 x^4$$

$$\downarrow$$

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 x^3$$

$$\downarrow$$

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 x^2$$

$$\downarrow$$

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 x$$

$$\downarrow$$

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

(۹!)



۱۸۹

مشتق بیست و یکم تابع $y = 2\cos x - \sin x$ در $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

$\frac{-2\sqrt{2}}{2}$ (۴) ✓

$\frac{2\sqrt{2}}{2}$ (۳)

$\frac{-\sqrt{2}}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱)

$2 \cos\left(n + \frac{21\pi}{4}\right) - \sin\left(n + \frac{21\pi}{4}\right)$

$2 \cos\left(n + \cancel{1} + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(n + \cancel{1} + \frac{\pi}{4}\right)$

$-2 \sin n - \cos n$

$-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2\sqrt{2}}{2}$

$(\sin a)^{(n)} = a^n \sin\left(a + \frac{n\pi}{4}\right)$

$(\cos a)^{(n)} = a^n \cos\left(a + \frac{n\pi}{4}\right)$



مشتق پانزدهم تابع $y = \frac{4}{2x+1}$ در $x = \frac{1}{2}$ کدام است؟

۱۹۰

$2 \times 15!$ (۴)

$-2 \times 15!$ (۳) ✓

$15!$ (۲)

$-15!$ (۱)

$$\frac{4}{2^{n+1}} = \frac{2}{n + 1/2}$$

$$\frac{2 \times 15! \times (-1)^{15}}{(n + 1/2)^{16}} = -2 \times 15!$$

$$\left(\frac{1}{n-a}\right)^{(n)} = \frac{n! \times (-1)^n}{(n-a)^{n+1}}$$



۱۹۱

در تابع $f(x) = (2x + 1)^{-\frac{1}{2}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع، از نقطه $x = 4$ تا $x = 12$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطه

تجربی ۹۳

$x = 4$ چقدر بیشتر است؟

$$\frac{11}{54} (2) \quad \checkmark \quad \frac{7}{54} (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \rightarrow \frac{f(12) - f(4)}{12-4}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{26}} - \frac{1}{\sqrt{9}}}{12-4} = \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{3}}{8} = \frac{\frac{3-8}{24}}{8} = \frac{-\frac{5}{24}}{8} = -\frac{5}{192}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{85}$$

$$f(x) = (2x + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 2x(-\frac{1}{2})(2x + 1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= (2x(-\frac{1}{2}))(9)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{1}{9\sqrt{9}} = -\frac{1}{27}$$



۱۹۲

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = x^2 + 2x - 1$ به ازای $x_1 = 3$ و $h = 0.1$ کدام است؟

۸/۱ (۴) ✓

۸/۰.۱ (۳)

۸/۵ (۲)

۸/۰.۵ (۱)

$h = 0.1$
↔
[۳, ۳.۱]

↘
۳, ۰.۵

$f_{x+h} = f_{x_1} + 2 = 8, 1$

نکته: برای تابع زوج در a و b در $[a, b]$ برابری مشتق در $\frac{a+b}{2}$ است.



اگر $\sqrt{xy} + x^2y - \sqrt{\frac{x}{y}} = 16y$ باشد، آهنگ تغییر لحظه‌ای y نسبت به x در نقطه $(4, 1)$ کدام است؟

۱۹۳

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{F'_x}{F'_y} = - \frac{\frac{y}{2\sqrt{xy}} + 2xy - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{y}}}}{\frac{x}{2\sqrt{xy}} + 2x^2 - \frac{-x}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}} = - \frac{\sqrt{xy} + 2x^2y - \sqrt{\frac{x}{y}} - 12y}{F}$$

~~$$- \frac{\frac{1}{x\sqrt{e}} + 2(e) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{e}}}{\frac{x}{2\sqrt{xy}} + 2x^2 - \frac{-x}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}} = - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$~~

$$- \frac{\frac{e}{2\sqrt{e}} + 14 + \frac{e}{2\sqrt{e}} - 14}{1} = - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$



تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sin^2 x - \cos^2 x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ a \tan x + b \sin^2 x, & \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ مشتق پذیر است. b کدام است؟

۱۹۴

تجربی ۹۳

۱ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

-۱ (۱) ✓

$$a(1) + b(1) = a + b$$

$$\frac{1}{2} + b = \frac{1}{2} \rightarrow b = -1$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 0 = \frac{1}{2} \rightarrow a + b = \frac{1}{2}$$

هر تابع مشتق پذیر در نقطه a در این نقطه مشتق پذیر است

$$2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + 2 \sin^2 \alpha \xrightarrow{\alpha = \pi/4} 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2(1) = 1 + 2 = 3$$

مستقیم و عمود = هر دو

مستقیم = مستقیم

$$a(1 + \tan^2 \alpha) + 2b \cos^2 \alpha \rightarrow a(2) + 0 = 2a$$

$$2a = 3 \rightarrow a = \frac{3}{2}$$



تابع $f(x) = [\sqrt{5}x]$ در بازه $(0, 4)$ در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

۱۹۵

۴ (۴)

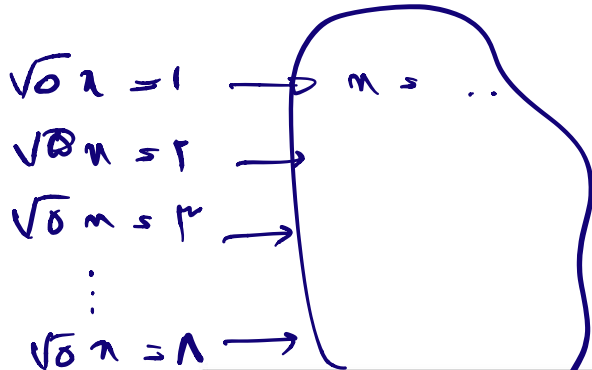
۶ (۳)

۸ (۲) ✓

۱۰ (۱)

$$0 < x < 4 \rightarrow 0 < \sqrt{5}x < 4\sqrt{5}$$

$$\left(\begin{matrix} 4\sqrt{5} \\ 2, 2 \\ 1, 1 \end{matrix} \right)$$



توابع برای $[f(x)]$
 نقاط مشتق پذیر ← نقاط نامرئی
 حاصل برابرت ← صفر

۱۹۶

نمودار تابع f به شکل مقابل است. تابع $y = |f(|x|)|$ در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

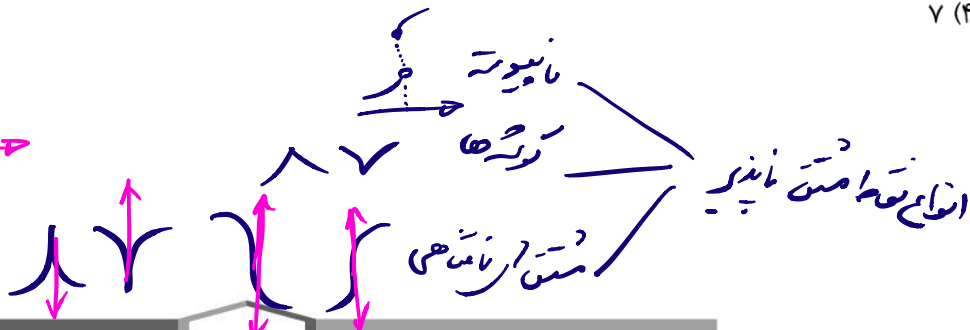
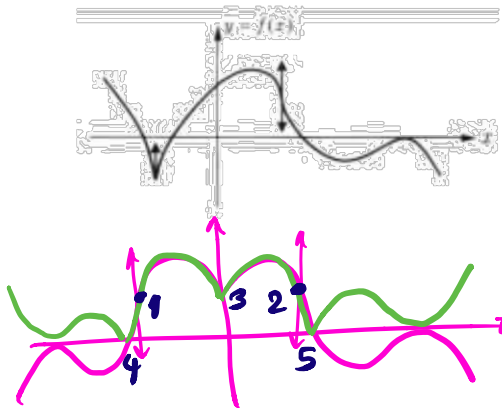
$$f(x) \rightarrow f(|x|) \rightarrow |f(|x|)|$$

۴ (۱)

۵ (۲) ✓

۶ (۳)

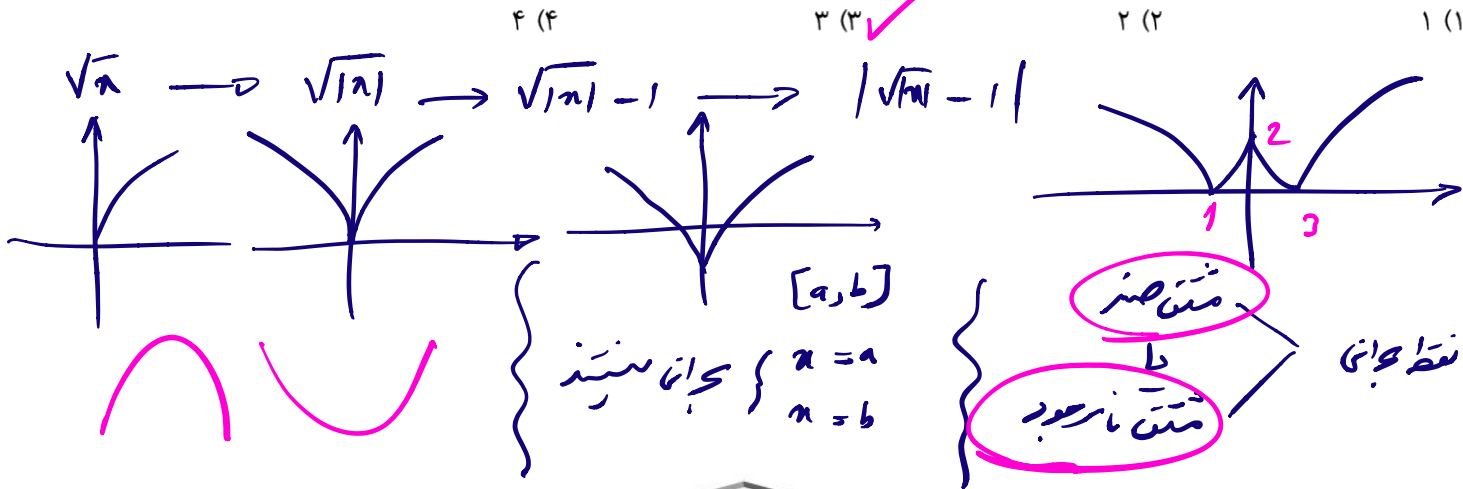
۷ (۴)





تابع $f(x) = |\sqrt{|x|} - 1|$ چند نقطه بحرانی دارد؟

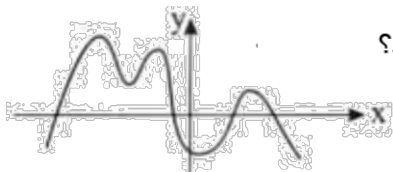
۱۹۷



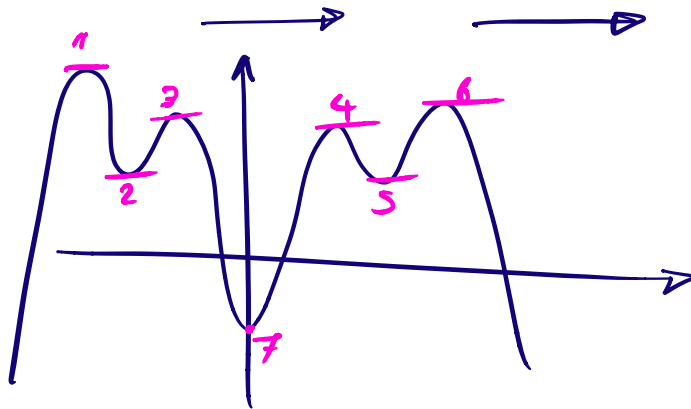
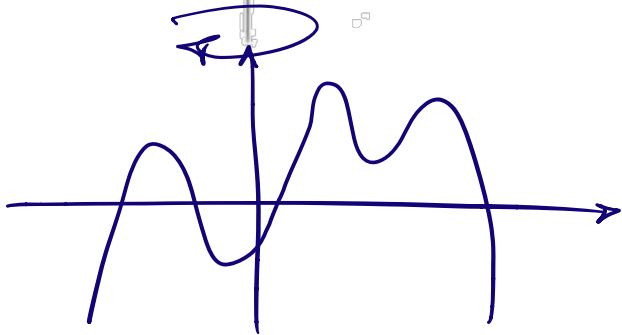


۱۹۸

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، تابع $y = f(-|x|)$ چند نقطه بحرانی دارد؟



$$f(x) \rightarrow f(-x) \rightarrow f(-|x|)$$



۵ (۱)

۷ (۲) ✓

۸ (۳)

۹ (۴)



199

$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x & x \geq 1 \\ x^3 - 4x^2 & x < 1 \end{cases}$ تابع چند نقطه بحرانی دارد؟

5 (4)

4 (3)

3 (2)

2 (1)

$$3x^2 - 4 = 0 \rightarrow 3x^2 = 4 \rightarrow x^2 = 4/3 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} \xrightarrow{x \geq 1} x = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$3x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(3x - 4) = 0$$

بیرونی ← مشتق پذیری

$x \leq 0$

$x = 0$

$x < 1$

$x = 4/3$

← بیرون ← $x = 1$

$-1 \neq -0$



اگر (a, b) نقطه می‌نیمم مطلق تابع $f(x) = x^3 + 10x - 1$ در بازه $[-2, 1]$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

۲۰۰

-۱۱ (۴) ✓

-۱۰ (۳)

-۹ (۲)

-۱ (۱)

$$f'(x) = 1 \cdot x^2 + 10 = 0 \rightarrow x^2 = -10 \rightarrow x = -1$$

$$x = -1 \rightarrow 1 - 10 - 1 = -10$$

$$x = -2 \rightarrow 1 - 20 - 1 = -20$$

$$x = 1 \rightarrow 1 + 10 - 1 = 10$$

نقطه $\min(-10, -20, 10)$

- ۱) نقطهٔ بحرانی
۲) عرض نقطهٔ بحرانی
۳) عرض اردن را کوینه
۴) مقایسه عرض
- max عرضی به باارزش‌ترین
min مطلق به نایس نقطه
ترین



مجموع مقادیر اکستریم مطلق تابع $f(x) = xe^{-x^2}$ در بازه $[0, 1]$ کدام است؟

۲۰۱

$$f'(x) = (1)e^{-x^2} + x(-2x e^{-x^2}) = e^{-x^2} (1 - 2x^2) = 0$$

صفر (۴) $\frac{1}{e}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ (۲) ۱ (۱)

مشتق

حداروبت

$$1 - 2x^2 = 0 \rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{[0, 1]} x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ max}$$

$\frac{1}{\sqrt{e}} > \frac{1}{e}$

$$x = 0 \rightarrow 0 \text{ min}$$

$$x = 1 \rightarrow e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$\frac{1}{\sqrt{e}} > \frac{1}{e} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}} > \frac{1}{e}$

$e > 2$



پیش‌ترین مقدار تابع $f(x) = \sin x - 2\cos x$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

۲۰۲

$\sqrt{3}$ (۴)

۲ (۳)

$\sqrt{5}$ (۲)

۳ (۱)

$$f'(x) = \cos x + 2\sin x = 0 \rightarrow \cos x = -2\sin x$$

$$x = \alpha_1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} - 2\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$x = 0 \rightarrow 0 - 2(1) = -2$$

$$x = \pi \rightarrow 0 - 2(-1) = 2$$

$$\sin^2 u + \cos^2 u = 1 \rightarrow \sin^2 u = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \rightarrow \sin u = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$1 + \tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u} \rightarrow 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{\cos^2 u}$$

$$\cos^2 u = \frac{3}{5} \rightarrow \cos u = \pm \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{15}}{5}$$

max

$$\tan u = -\frac{1}{2}$$

α_1



۲۰۳ برد تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 - 12x + 8$ بر بازه $[-3, 1]$ کدام است؟

$[-3, 24]$ (۴)

$[-3, 17]$ (۳)

$[-8, 24]$ (۲)

$[-8, 17]$ (۱)

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \quad [min, max]$$

$$x = -2 \rightarrow y = -8 + 24 + 8 = 24$$

$$x = -1 \rightarrow y = -1 + 12 + 8 = 19$$

$$x = 1 \rightarrow y = 1 - 12 + 8 = -3$$

$$R = [-3, 24]$$



بزرگ‌ترین بازه‌ای را که تابع $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ در آن بازه نزولی است، (a, b) می‌نامیم. حاصل $a + b$ کدام

۲۰۴

است؟

۳ (۴)

صفر (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$f'(x) < 0 \rightarrow 2x^2 - 7x - 12 < 0$$

$$x^2 - x - 2 < 0 \rightarrow (x-2)(x+1) < 0$$

بین ریشه

$$-1 < x < 2$$

$$(-1, 2) \rightarrow 2 + (-1) = 1$$

توضیح:

صفری $> 0 \rightarrow$

کمتر $< 0 \rightarrow$



تابع $f(x) = xe^{x-x^2}$ در کدام بازه صعودی است؟

۲۰۵

(۱, ۲) (۴)

(-۱, ۰) (۳)

($-\frac{1}{2}$, ۱) (۲) ✓

(۰, ۲) (۱)

$$f'(x) > 0 \rightarrow (1) e^{x-x^2} + x(1-2x)e^{x-x^2} > 0$$

$$e^{x-x^2} (1 + x - 2x^2) > 0$$

عبارت مثبت

$$\Delta = 1 - 4(1)(-2) = 9 \rightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{-2}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}, 1 \right)$$



۲۰۶

تابع $f(x) = ||x - 2| - 1|$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

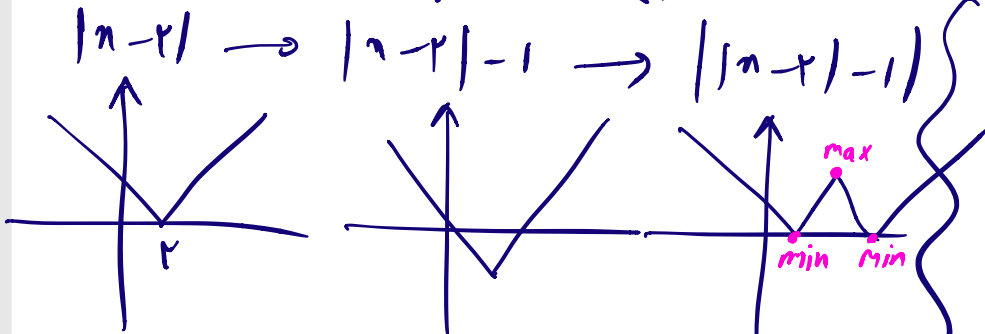
۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

کدام گزینه صحیح است؟



max نبی ← از چه جایی بگفته
min نبی ← باینست



۲۰۷

نقطه بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x}{e^x}$ به عرض و از نوع است.

(۱) و مینم $\frac{1}{e}$

(۲) و ماکسیم $\frac{1}{e}$

(۳) و مینیم e^{-3}

(۴) و ماکسیم e^{-4}

$$f'(x) = \frac{(1 - e^x - e^x x)}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}}$$

$$= \frac{1-x}{e^x}$$

$x=1$ (circled)
هذراء نبت (circled)

$$\frac{1}{e}$$

صوب اکسترمم؟
تعیین علامت y'

x					
y'	+	-	+	-	+
	max		min		max

max



۲۰۸

طول ماکسیمم نسبی تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x+5)}$ کدام است؟

-۵ (۱)

(۲) صفر

(۳) ۲

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 5x^2}$$

$$\frac{1.0}{3} (4)$$

$$f'(x) =$$

$$3x^2 + 1.0x$$

$$\sqrt[3]{(x^2 + 5x^2)^2}$$

$$x(3x + 1) = 0$$

$$x = 0$$

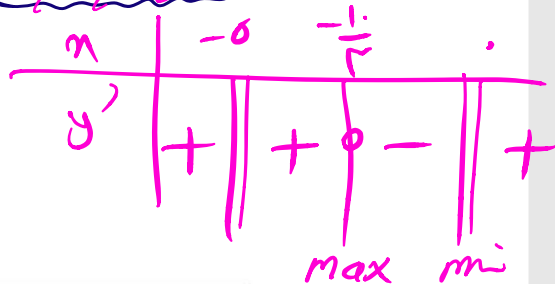
$$x = -1/3$$

$$x^2 + 5x^2 = 0$$

$$x^2(x+5) = 0$$

$$x = 0$$

$$x = -5$$





تجربی ۸۹

در تابع با ضابطه $f(x) = a \cos 2x + b \sin x$ اگر نقطه مینیم آن در $(\frac{\pi}{6}, -3)$ باشد، a کدام است؟

۲۰۹

۱ (۴)

-۱ (۳)

-۲ (۲)

-۴ (۱)

$$f(\pi/4) = -3$$

$$f'(x) = -2a \sin 2x + b \cos x \quad n = \pi/4 \rightarrow \textcircled{5}$$

$$a \cos \pi/2 + b \sin \pi/4 = -3 \rightarrow \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = -3$$

$$-2a \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + b \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$a + b = -6$$

$$b = 2a$$

قضیه: فضا
تابع مشتق برابر نقطه اکستریم تابع در آن
مشتق صفر است

$$3a = -6 \rightarrow a = -2$$



اگر نقطه $A(2, 3)$ نقطه می نیمم نسبی نمودار تابع $y = \frac{x^2+a}{(x+b)^2}$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

۲۱۰

۸ (۴)

۸ (۳)

صفر (۲)

۴ (۱)

$$\frac{a+a}{(r+b)^2} = 2$$

$$\text{H.o.P} \quad \frac{2a^2}{2(n+b)} = \frac{1 \cancel{a^2}^2}{\cancel{2}(r+b)} = \cancel{2}$$

$b = 0$

نکته: در تمام کردن مشتقات اکستریم نسبی علاوه بر اینم
رهمیهای آن صدق هم کند.

$$\frac{1+a}{\epsilon} = 2 \rightarrow a = \epsilon$$



۲۱۱

نقطه $x = 0$ برای $f(x) = \cos x - 2\cos^3 x$ طول چگونه نقطه‌ای است؟

(۱) ماکسیمم

(۲) می‌نیمم

(۳) عطف

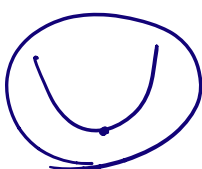
(۴) عادی

$$f'(x) = -\sin x + 6\sin^2 x$$

$$f'(0) = -0 + 6(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x + 12\sin x$$

$$= -1 + 12 = 11 > 0$$



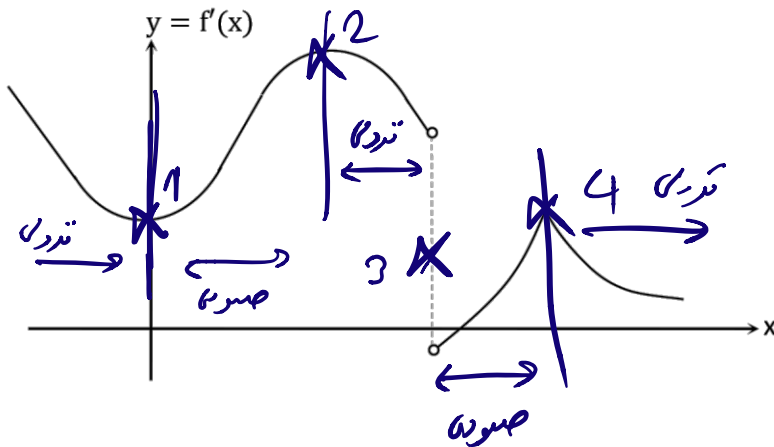
تقعر در بالا یا $f'' > 0$ **صورت**
 " پایین یا $f'' < 0$ **نزده**

نقطه تقعر - نقطه عطف

در دوای عطف

نمودار تابع $y = f'(x)$ به شکل روبه‌رو است. جهت، تقعر نمودار تابع $y = f(x)$ چند بار تغییر می‌کند؟

۲۱۲



تعداد ریب‌ها ← f' صورتی
سیدهای ← f' تندی

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴) ✓



تجربی ۹۳

در کدام بازه تابع با ضابطه $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 18x^2$ نزولی و تقعر نمودار آن، رو به بالا است؟

۲۱۳

(۰, ۳) (۴)

(۰, ۱) (۳)

(۱, ۴) (۲)

(۱, ۳) (۱) ✓

مستو، ۰
مستو (۴)

$f' < 0 \rightarrow -4x^3 + 24x^2 - 36x = -4x(x^2 - 6x + 9) < 0$

$-4x(x-3)^2 < 0 \rightarrow -4x < 0 \rightarrow x > 0$

$f'' > 0 \rightarrow -12x^2 + 48x - 36 = -12(x^2 - 4x + 3) > 0$

$x^2 - 4x + 3 < 0 \rightarrow (x-1)(x-3) < 0 \rightarrow 1 < x < 3$



مجموع طول نقاط عطف تابع $f(x) = e^{3x} \times x^2$ کدام است؟

۲۱۴

$$-\frac{4}{4} \quad (4 \checkmark)$$

$$\frac{4}{4} \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$\frac{4}{4} \quad (1)$$

$$f'(x) = 3e^{3x} x^2 + 2xe^{3x} = e^{3x} (3x^2 + 2x)$$

$$f''(x) = 3e^{3x} (3x^2 + 2x) + e^{3x} (6x + 2) = e^{3x} (9x^2 + 4x + 2)$$

$$= e^{3x} (9x^2 + 4x + 2) = 0 \quad \rightarrow \quad -b/a = -4/9 = -2/3$$

← عدد مثبت



تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 + a & x \geq 1 \\ -x^2 + bx & x < 1 \end{cases}$ دارای نقطه‌ی عطف است. مقدار $a + b$ کدام است؟

۲۱۵

۲ (۴)

۸ (۳)

-۳ (۲)

۵ (۱)

$3n^2 \rightarrow 6n = 0 \rightarrow n = 0$ (crossed out) $\xrightarrow{n \geq 1}$

تغییر از $n=1$ ← نقطه عطف

$-2n + b$ (circled) $\rightarrow -2$ (crossed out)

$1 + a = -1 + b$

$a - b = -2$

$3 = -2 + b \rightarrow b < 0$

$a = 3$

$a + b = 1$



خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 2x + 2a^3$ در نقطه‌ای به عرض ۲ از منحنی تابع عبور می‌کند. مقدار a کدام است؟

۲۱۶

$$3x^2 - 6ax + 2$$

۳ (۴)

۲ (۳)

۲ (صفر)

۱ (۱۲) ✓

$$3x - 6a = 0 \rightarrow$$

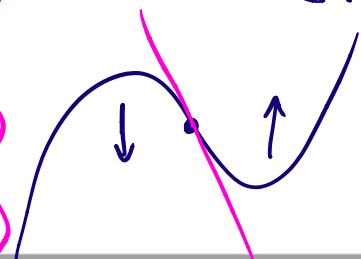
$$x = a$$

$$f(a) = 2 \rightarrow$$

$$a^3 - 3a^3 + 2a + 2a^3 = 2$$

$$a = 1$$

نکته: خط مماس بر تابع در نقطه عطف از آن عبور می‌کند.





۲۱۷

تابع $f(x) = \frac{2 \tan 2x + 1}{2 \cos x + 1}$ در بازه $[0, 2\pi]$ دارای چند مجانب است؟

(۱) هیچ

۲ (۲)

۴ (۳)

۶ (۴)

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha (2 \cos \alpha + 1)}$$

$$\cos \alpha (2 \cos \alpha + 1)$$

$$\cos \alpha = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$$

$$2 \cos \alpha + 1 = 0 \rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$$

$x = a$ است عمود ناممکن

$$y = \frac{f}{g}$$

(y)

مخرج (x)

مخرج

مخرج

مخرج



به ازای چند مقدار صحیح m تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 + mx + 1}$ مجانب قائم ندارد؟

۲۱۸

(۱) صفر ۱ (۲) ۳ (۳) ✓ (۴) بی شمار
 $\Delta < 0 \rightarrow m^2 - 4 < 0 \rightarrow -2 < m < 2$ محض ریشه ندارد
 $m \in \mathbb{Z} \rightarrow$ اردها -



۲۱۹

نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{x+1}{x^2+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن، به کدام صورت است؟

$a^m + n = 0 \rightarrow a(n^2 + 1) = 0 \rightarrow a = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$



از تلافی مجانب‌های تابع $f(x) = \frac{3x-2}{|x-2|-1}$ یک چهارضلعی به کدام مساحت پدید می‌آید؟

۲۲۰

۸ (۴)

۶ (۳)

۱۲ (۲)

۹ (۱)

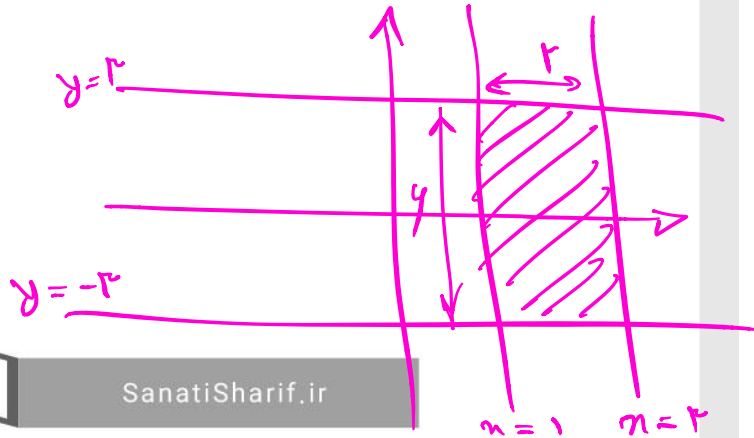
$$|n-2|-1=0 \quad \text{ماتر}$$

$$\rightarrow |n-2|=1 \rightarrow n-2=\pm 1$$

$$n=3, n=1$$

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{3n-2}{|n-2|-1}$$

$\frac{+\infty}{+\infty} = \frac{3n-2}{n-2} = 3$ (افز) $y=3$
 $\frac{-\infty}{-\infty} = \frac{3n-2}{-n+2} = -3$ (کسر) $y=-3$





تجربی ۹۱

اگر $f(x) = \frac{x+2}{2x+1}$ و $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ باشند، نقطه تلاقی مجانب‌های تابع $f \circ g$ کدام است؟

۲۲۱

(۰, ۱) (۴) \checkmark (-۲, ۲) (۳) (-۱, ۱) (۲) (-۱, ۰) (۱)

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = \frac{\frac{2x-1}{x+2} + 2}{2\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) + 1} = \frac{\frac{2x-1+2x+4}{x+2}}{\frac{4x-2+2x+2}{x+2}} \\
 &= \frac{2x+3}{2x} = 1 + \frac{3}{2x}
 \end{aligned}$$

$\rightarrow x=0$
 $\rightarrow y=1$
 $\rightarrow (0, 1)$



۲۲۲

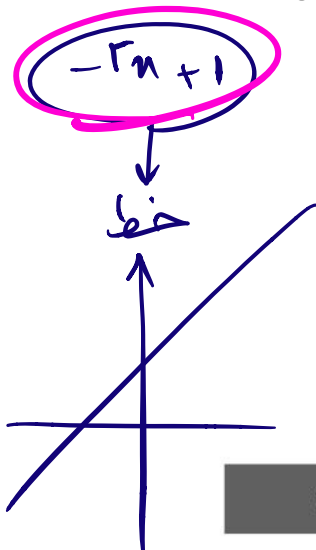
مجانب مایل تابع $f(x) = -2x + 1 + \frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x+2}$ کدام است؟

$y = -2x - 1$ (۴)

$y = -2x$ (۳)

$y = -2x + 2$ (۲)

$y = -2x + 1$ (۱)



$-2n+1+1$
 $-2n+2$

$\frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x+2}$

$\frac{x^{\textcircled{1}}}{x+2}$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x+2}$

$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x+2} = 1$



مجانب مایل تابع با ضابطه $f(x) = x \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$ کدام است؟

۲۲۳

$$y = 2x - \frac{9}{2} \quad (1)$$

$$y = 2x - 3 \quad (2)$$

$$y = 2x - \frac{11}{2} \quad (3) \quad \checkmark$$

$$y = 2x \quad (4)$$

$$a = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{x \sqrt{\frac{\epsilon n + 1}{n + 2}}}{a} = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{\frac{\epsilon n + 1}{n + 2}}}{\frac{1}{a}}$$

$\epsilon = 1$

$$b = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \left(x \sqrt{\frac{\epsilon n + 1}{n + 2}} - 2x \right) = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} x \left(\sqrt{\frac{\epsilon n + 1}{n + 2}} - 2 \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{\epsilon n + 1}{n + 2} - \epsilon}{\sqrt{\frac{\epsilon n + 1}{n + 2}} - 2}$$

$\frac{\epsilon n + 1 - \epsilon n - 2}{n + 2} = \frac{-11}{n + 2}$

$\frac{-11}{n + 2} \rightarrow 0$

$$f(n) \rightarrow a \cdot n + b$$

$$a = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{f(n)}{n}$$

$$b = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} (f(n) - a \cdot n)$$



۲۲۴

تجربی ۸۱

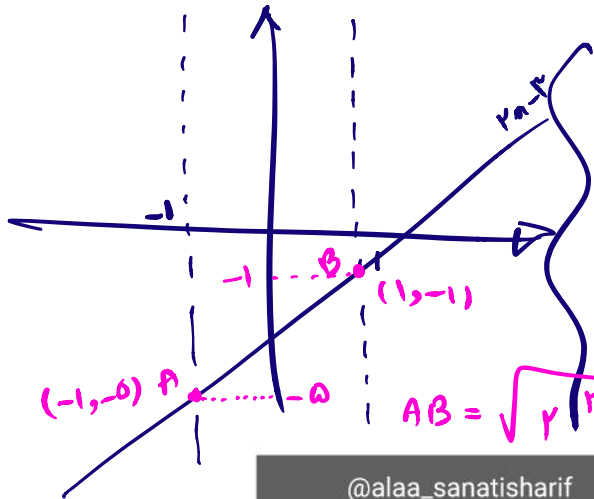
خطهای مجانب منحنی تابع با ضابطه $y = \frac{2x^3 - 3x^2}{x^2 - 1}$ در دو نقطه A و B متقاطعند. فاصله آن دو نقطه کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۲√۵ (۲) ✓

۳√۲ (۱)



$$\frac{2x^3 - 3x^2}{x^2 - 1} = \frac{2x^2 - 3x}{x - 1} + \frac{2x - 2}{x - 1}$$

مربعات

مربعات

رتبه نخرج ← مربعات

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$x = 1$ و $x = -1$

$$AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$



نمودار $y = 2x - 3$ یکی از مجانب های نمودار $f(x) = x + b - \sqrt{(x-1)(x+2)}$ باشد، مجانب دیگر کدام است؟

۲۲۵

$y = -4$ (۴)

$y = -2x - \frac{1}{2}$ (۳)

$y = 3$ (۲)

$y = -x - 3$ (۱)

$x + b$

$$\cancel{x+b} - x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{a^2 + a - 2}$$

$$\sim \sqrt{|a + \frac{1}{2}|} = |n + \frac{1}{2}|$$

$$x + b - |n + \frac{1}{2}| = x + b - (-n - \frac{1}{2}) = 2n + b + \frac{1}{2}$$

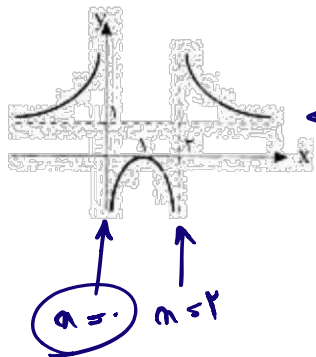
$$b + \frac{1}{2} = -2 \rightarrow b = -\frac{5}{2}$$

استاد از هم اینتر رادیکال
...
 $a \rightarrow \pm \infty$

$$\sqrt[n]{aa^1 + ba^{n-1} + \dots} \sim$$

$\rightarrow \sqrt[n]{a} |n + \frac{b}{na}|$ (زیب)

$\rightarrow \sqrt[n]{a} (n + \frac{b}{na})$ (مزد)



اگر نمودار تابع $f(x) = a + \frac{1}{x^2 + bx}$ شبیه شکل مقابل باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

۲۲۶

۱ (۲)

صفر (۱)

۲ (۴)

-۱ (۳) ✓

$$x^2 + bx = 0$$

$$x(x + b) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -b = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{ax^2 + abx + 1}{x^2 + bx}$$

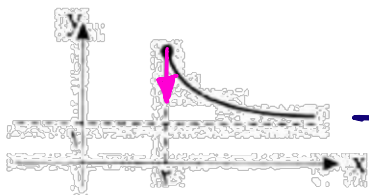
$$\rightarrow b = -2 \rightarrow f(x) = \frac{ax^2 - 2ax + 1}{x^2 - 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 - 2ax + 1}{x^2 - 2x} = 1 \rightarrow a = 1$$



۲۲۷

بخشی از نمودار تابع $f(x) = ax - \sqrt{x^2 + bx + c}$ در شکل روبه‌رو رسم شده است.



می‌بینا پس $y=1 \rightarrow$

حاصل $a + b + c$ کدام است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۱ (۳) ✓

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} (a - \sqrt{a^2 + b + c}) = 1$$

$$a \rightarrow +\infty$$

↓

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} a - \left| a + \frac{b}{a} \right| = \lim_{a \rightarrow +\infty} (a - a - \frac{b}{a}) = 1$$

$$a \rightarrow +\infty$$

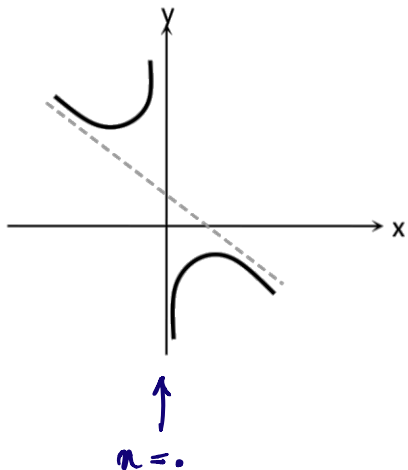
$$f'(x) = a - \frac{x + b}{\sqrt{x^2 + bx + c}}$$

$$x^2 + bx + c = 0 \rightarrow$$

$$n=2$$

$$\epsilon - \epsilon + c = 0$$

$$\rightarrow c = 0$$



نمودار تابع $f(x) = \frac{-x^2 + 4x + a}{x + b}$ شبیه شکل روبه‌رو است. مقدار $a + b$ کدام می‌تواند

۲۲۸

باشد؟

$$a + b \xrightarrow{a=0} b=0$$

۵ (۲)

۴ (۱)

-۴ (۴)

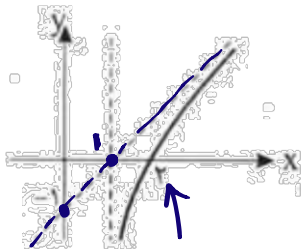
-۵ (۳) ✓

$$-x^2 + 4x + a = 0 \rightarrow \Delta < 0$$

$$\rightarrow 16 + 4a < 0 \rightarrow 4a < -16$$

$$a < -4$$

$$a + b = a < -4$$



$$\log y = x - 1$$

شکل روبه‌رو بخشی از نمودار تابع $f(x) = \frac{ax^r + bx + c}{x-1}$ است. حاصل $a + b + c$ کدام است؟

۲۲۹

(۲) صفر

(۱) ۱

$x=1$

(۴) ۲

(۳) -۱

$$\frac{ax^r + bx + c}{ax^r - a}$$

$$(b+a)x + c$$

$$\begin{array}{r} x-1 \\ \hline ax^r + a + b \end{array} \rightarrow x-1$$

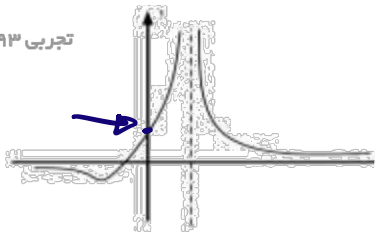
$$a=1$$

$$a+b = -1$$

$$b = -2$$

$$ax^r + bx + c \rightarrow x^r - 2x + c \xrightarrow{x=1} 1 - 2 + c = 0 \rightarrow c = 1$$

تجربی ۹۳



شکل مقابل نمودار تابع $y = \frac{x+a}{x^2+bx+4}$ است. مقادیر a و b چگونه است؟

۲۳۰

$b = -4, a < 0$ (۲)

$b = 4, a < 0$ (۱)

$b = -4, a > 0$ (۴) ✓

$b = 0, a > 0$ (۳)

یک سبزه داره

$\Delta = 0 \rightarrow b^2 - 4(4) = 0$

$\rightarrow b^2 = 16 \rightarrow b = \pm 4$

$n = -2$

$b = -4$

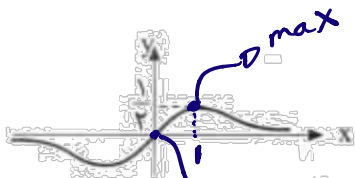
یک سبزه داره

$b = 4$

$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 = 0$

رضانوردان

$\frac{a}{4} > 0 \rightarrow a > 0$



اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ شبیه شکل روبه‌رو باشد، عبارت $ax+b$ کدام است؟

۲۳۱

-x (۲)

x (۱)

-2x (۴)

2x (۳) ✓

$(0,0) \in f \rightarrow$

$\frac{b}{1} = 0 \rightarrow b = 0$

$$f(n) = \frac{an}{n^2+1} \rightarrow f'(n) = \frac{a(n^2+1) - 2n(an)}{(n^2+1)^2} = \frac{a(n^2+1-2n^2)}{(n^2+1)^2} = \dots$$

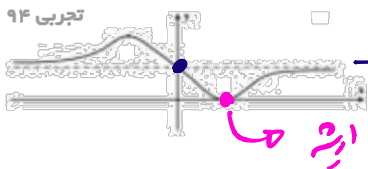
$1 - 2n^2 = 0 \rightarrow n = \pm 1$

$f(1) = \frac{1}{2}$

$\frac{a}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow a = 1$



تجربی ۹۴



شکل روبه‌رو، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x^2 + 4}$ است. $a + b$ کدام است؟

۲۳۲

$$y = 2$$

$$f(0) = \frac{1}{4} = 2$$

-۶ (۲) ✓

-۷ (۱)

۱۰ (۴)

۹ (۳)

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{an^r + bn + 1}{n^r + 4} = 2 \rightarrow \frac{a}{1} = 2 \rightarrow a = 2$$

$$an^r + bn + 1 \xrightarrow{a=2} 2n^r + bn + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} b^2 - 4(2)(1) = 0$$

$$\rightarrow b^2 = 7 \rightarrow b = \pm\sqrt{7} \rightarrow b = 1 \xrightarrow{\text{صورت}} 2n^r + 1n + 1 = 2(n^r + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2})$$

$$= 2(n + \frac{1}{2})^2 = 2(n + \frac{1}{2})^2$$



اگر مجموع مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = x^3 + 3x^2 - 8x + 4a - 5$ برابر ۱۸ باشد، مقدار a کدام است؟

۲۳۳

-۴ (۴)

۴ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱) ✓

$$x_{\text{عطف}} = \frac{x_{\text{max}} + x_{\text{min}}}{2}$$

$$y_{\text{عطف}} = \frac{y_{\text{max}} + y_{\text{min}}}{2}$$

→ ۱۸

عرضه

$$y_{\text{عطف}} = 9$$

$$y' = 3x^2 + 6x - 8 \rightarrow y'' = 6x + 6 = 0$$

$$x_{\text{عطف}} = -1$$

$$(-1, 9) \in f \rightarrow -1 + 3 + 8 + 4a - 5 = 9 \rightarrow 4a = 5 \rightarrow a = 1$$



خارج ۸۸

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+2}{x-2} = 1 \rightarrow y = 1$$

(۲، ۱)

مرکز تقارن نمودار تابع $y = \frac{x+2}{x-2}$ کدام نقطه است؟

۲۳۴

- (۲، ۱) (۲) ✓
- (۱، ۲) (۱)
- (-۲، -۱) (۴)
- (-۲، ۱) (۳)



خرج ۸۹

اگر $\int \frac{x-1}{x^2} dx = \frac{f(x)}{2x^2} + c$ ، آن گاه $f(x)$ کدام است؟

۲۳۵

۲x - ۱ (۴)

-۲x + ۱ (۳) ✓

x - ۲ (۲)

-x + ۲ (۱)

$$\int \frac{a-1}{a^2} da = \int \left(\frac{a}{a^2} - \frac{1}{a^2} \right) da = \int \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} \right) da$$

$$= \int a^{-1} - a^{-2} = -a^{-1} + \frac{1}{1} a^{-1}$$

$$-\frac{1}{a^{-1}}$$

$$-\frac{1}{1} a^{-1}$$

$$= -\frac{1}{a} + \frac{1}{1a^1} = \frac{-1a+1}{1a^1}$$

$$\int a^m \cdot da = \frac{1}{m+1} a^{m+1} + c$$



تجربی ۹۴

اگر $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{\sqrt{x^2}} dx = \sqrt[3]{x} f(x) + c$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟ ۲۳۶

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{\sqrt{x^2}} dx = \int \left(\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}} - \frac{2x}{\sqrt{x^2}} \right) dx = \int \left(\sqrt{x^{2/2}} - 2x^{1/2} \right) dx$$

$$\sqrt{x^{1/2}} - 2x^{1/2} = \frac{2}{3} x^{3/2} - 2x^{1/2} = \frac{2}{3} x^{1/2} (x^2 - 3x)$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{x} (f(x))$$



حاصل انتگرال $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})}$ کدام است؟

۲۳۷

$\sin x + \cos x + C$ (۴) ✓ $\sin x - \cos x + C$ (۳) $-\sin x - \cos x + c$ (۲) $-\sin x + \cos x + C$ (۱)

$$\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} dx$$

$$\int \cos x - \int \sin x$$

$$\sin x - (-\cos x) = \sin x + \cos x + C$$

$$\int \cos x = \sin x$$

$$\int \sin x = -\cos x$$



حاصل $\int \frac{1+e^{rx}}{e^x} dx$ کدام است؟ ۲۳۸

$\frac{e^{rx}-1}{e^x} + C$ (۲) ✓
 $\frac{e^{rx}+1}{e^x} + C$ (۱)

$$\int \frac{1+e^{rx}}{e^x} dx = \int \frac{1}{e^x} + \frac{e^{rx}}{e^x} =$$

$$\int e^{-x} + e^1$$

$$-e^{-x} + e^x = \frac{-1}{e^x} + e^x = \frac{-1+e^{rx}}{e^x}$$

$$\int e^x = e^x$$

$$\int e^{-rx} = -\frac{1}{r} e^{-rx}$$



اگر $f'(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^2 x}$ و $f(\frac{\pi}{4}) = 0$ ، آن گاه $f(\frac{3\pi}{4})$ برابر کدام است؟ ۲۳۹

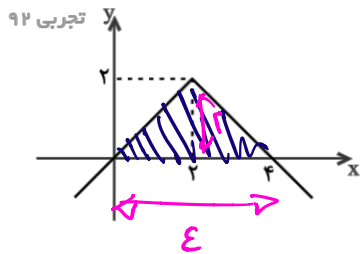
$\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۳) ✓ $\frac{2}{2}$ (۲) 1 (۱)

$$f(x) = \int \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^2 x} = \int \frac{1}{\tan^2 x} + \frac{\tan^2 x}{\tan^2 x} = \int (\cot^2 x + 1) dx$$

$$-\cot x + C \longrightarrow (\cot x)' = (-1)(1 + \cot^2 x)$$

$$f(x) = -\cot x + C \longrightarrow f(\frac{\pi}{4}) = -(1) + C = 0 \longrightarrow C = 1$$

$$f(x) = -\cot x + 1 \longrightarrow f(\frac{3\pi}{4}) = -(-1) + 1 = 2$$



با توجه به شکل روبه‌رو، حاصل $\int_0^4 (2 - |x - 2|) dx$ ، کدام است؟

۲۴۰

۳ (۲)

۲ (۱)

۴ (۴) ✓

۳/۵ (۳)

$$S = \frac{4 \times 2}{2} = 4$$

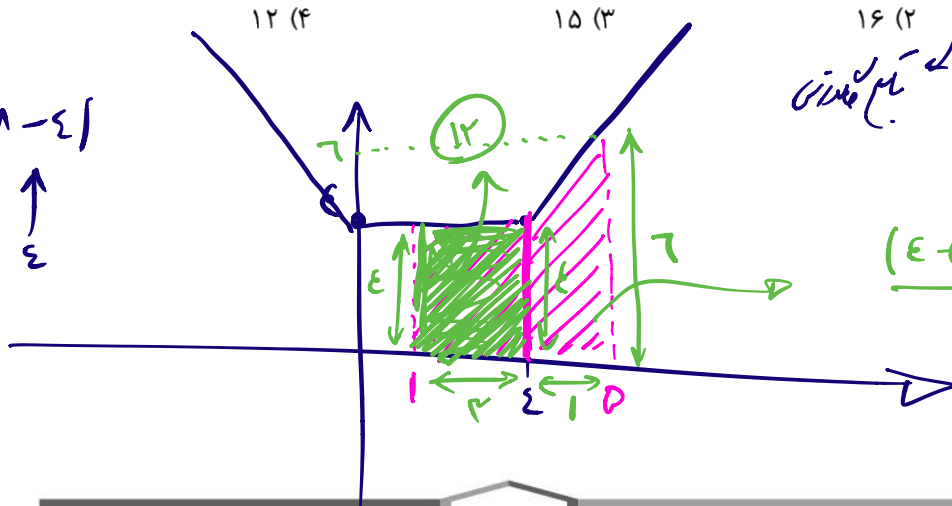


حاصل $\int_1^5 (|x| + |x-4|) dx$ کدام است؟

۲۴۱

۱۷ (۱) ✓

$$y = |x| + |x-4|$$



۱۶ (۲)
تیم طلایی

$$\frac{(4+2) \times 1}{2} + \frac{(4+8) \times 2}{2} + \frac{(8+4) \times 1}{2} = 19$$



ریاضی ۹۰

$$F(x) = \int \sin x \frac{1}{1-t^2} dt$$

Handwritten notes: u points to $\sin x$, v points to \int , and $f(t)$ points to $\frac{1}{1-t^2}$.

اگر $F(x) = \int \frac{\sin x}{1-t^2} dt$ مقدار $F''(\frac{\pi}{6})$ کدام است؟

۲۴۲

۲ (۲) ✓ ۲ (۳) ۲ (۴) ۲ (۱)

$$F'(x) = \cos x \times \frac{1}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$F'(x) = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \rightarrow F''(x) = \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

Handwritten note: $F''(\frac{\pi}{6}) = \frac{1/2}{(\sqrt{3}/2)^2} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}$

قضیه بنابر اول

$$A(x) = \int_v^u f(t) dt$$

$$A'(x) = u' f(u) - v' f(v)$$

فرمول بنابر دوم



حاصل $\int_1^2 \frac{x^3+1}{x^2} dx$ کدام است؟

۲۴۳

$\frac{1}{2}$ (۴)

۱ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

۲ (۱) ✓

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

قضیه بنده (۲)

$$\int \frac{x^r}{x^r} + \frac{1}{x^r} = \int x + \frac{1}{x^r} = \int x + x^{-r} = \frac{1}{r} x^r - \frac{1}{x} \Big|_1^2$$

$$2 - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = 2 + 1 - 1 = 2$$



ریاضی ۹۲

حاصل انتگرال $\int_1^4 \sqrt{\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + 1} dx$ ، کدام است؟

۲۴۴

۷ (۴)

۶ (۳) ✓

۵ (۲)

۴ (۱)

$$\left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{n^2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{12}n^4 + \frac{1}{n^4} \left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{n^2}\right)^2$$

$$\int_1^4 \sqrt{\left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{n^2}\right)^2} = \int_1^4 \left[\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{n^2}\right] = \left[\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{n}\right]_1^4$$

$$\frac{1}{12} \times 64 - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{12} - 1\right) = \frac{64 - 2 - 1 + 12}{12} = \frac{73}{12} = 6 \frac{11}{12}$$



ریاضی خارج ۹۳

۲۴۵ حاصل $\int_0^9 (\sqrt{x} - 2) dx$ ، کدام است؟

$\frac{16}{3}$ (۴) ✓

۴ (۳)

$\frac{8}{3}$ (۲)

(۱) صفر

از ۲ بزرگتر یا از ۲ کوچکتر
از ۲ بزرگتر یا از ۲ کوچکتر

$$\int_0^9 (2 - \sqrt{x}) dx + \int_9^0 (\sqrt{x} - 2) dx = \left[2x - \frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^9 = 18 - \frac{2}{3} \cdot 27 = 18 - 18 = 0$$

$\frac{2}{3} \times 27 = 18$
 $18 - 18 = 0$
 $\frac{2}{3} \times 27 = 18$
 $18 - 18 = 0$



ریاضی ۹۳

۲۴۶

حاصل $\int_1^{16} [\sqrt{x}] dx$ ، کدام است؟ (نماد [] به مفهوم جزء صحیح است.)

۳۴ (۴) ✓

۳۲ (۳)

۳۱ (۲)

۳۰ (۱)

$$1 \leq \sqrt{n} < 2 \rightarrow [\sqrt{n}] = 1$$

$$1 \leq n < 4$$

$$2 \leq \sqrt{n} < 3 \rightarrow [\sqrt{n}] = 2$$

$$4 \leq n < 9$$

$$3 \leq \sqrt{n} < 4 \rightarrow [\sqrt{n}] = 3$$

$$9 \leq n < 16$$

$$\int_1^4 1 + \int_4^9 2 + \int_9^{14} 3$$

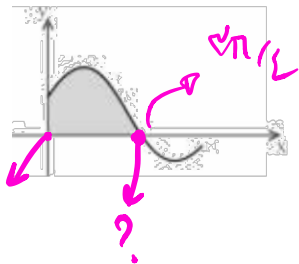
$$[x]_1^4 + [2x]_4^9 + [3x]_9^{14}$$

$$= (4-1) + 2(9-4) + 3(14-9)$$



با توجه به قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \sin x + \cos x$ در شکل مقابل، مساحت ناحیه سایه زده کدام است؟ خروج ۹۰

۲۴۷



۱ + $\sqrt{2}$ (۴) ✓

۲ (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

۲ - $\sqrt{2}$ (۱)

$$\sin x + \cos x = 0 \rightarrow \sin x = -\cos x$$

$$\tan x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

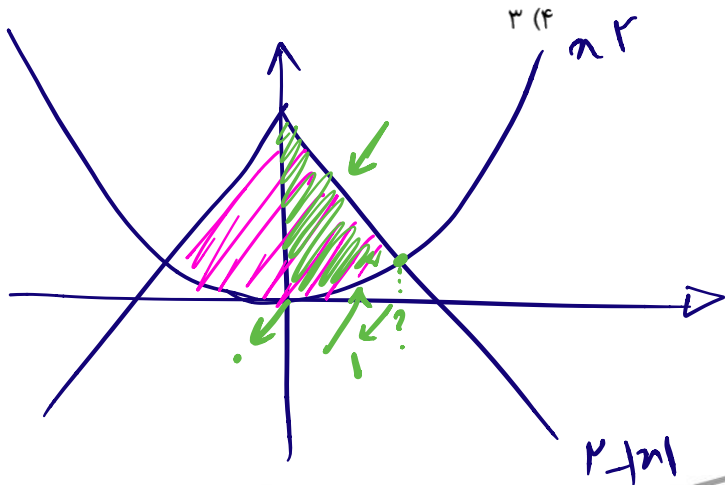
$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x \Big|_0^{\frac{3\pi}{4}} = -(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} -$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \sqrt{2} + 1 \quad (-1 + 0)$$



مساحت ناحیه محدود به نمودارهای به معادله $y = x^2$ و $y = 2 - |x|$ کدام است؟

۲۴۸



۴ (۳)

$\frac{1}{3} (۲)$

$\frac{7}{3}$ ✓

$$x^2 = 2 - x \rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x-1)(x+2) = 0$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow x &= 1 \quad \checkmark \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$$2 \int_{-1}^1 (2 - x - x^2) = 2 \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1$$

$$\begin{aligned} 2 \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - 2 \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) &= 4 - 1 - \frac{2}{3} - (-4 + 1 + \frac{2}{3}) \\ &= 2 - \frac{2}{3} - (-3 + \frac{2}{3}) \\ &= 2 - \frac{2}{3} + 3 - \frac{2}{3} \\ &= 4 - \frac{4}{3} = \frac{12}{3} - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$



۲۴۹

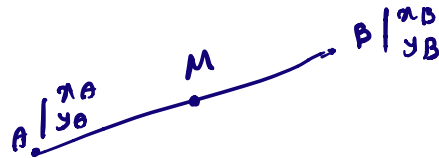
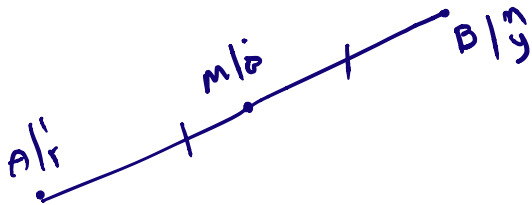
$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} (1)$$

مختصات قرینه نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ نسبت به نقطه $\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ کدام است؟

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} (2) \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} (3)$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} (4)$$



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$\frac{x+1}{2} = 0 \rightarrow x = -1$$

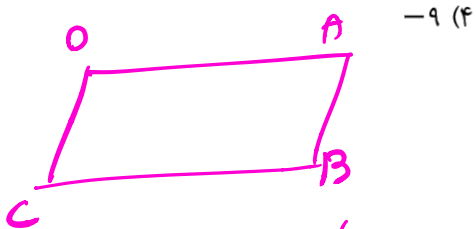
$$\frac{y+2}{2} = 0 \rightarrow y+2 = 0 \rightarrow y = -2$$



اگر نقاط $O(0, 0)$, $A(\alpha + 1, \alpha - 2)$, $B(\alpha, 3)$ و $C(\alpha - 4, \alpha - 1)$ رئوس متوازی الاضلاع OABC به قطرهای OB

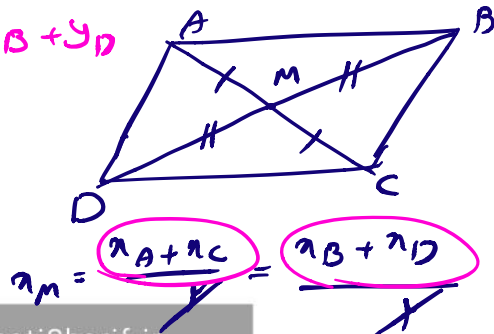
۲۵۰

و AC باشند، کدام α است؟



$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \alpha + 1 + \alpha - 4 &= 0 + \alpha \\ \alpha &= 4 - 1 = 3 \end{aligned}$$





۲۵۱

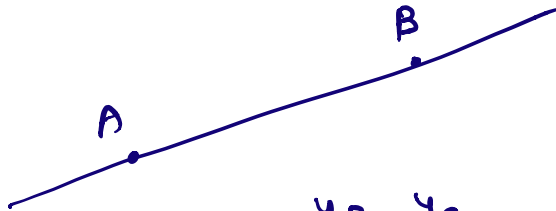
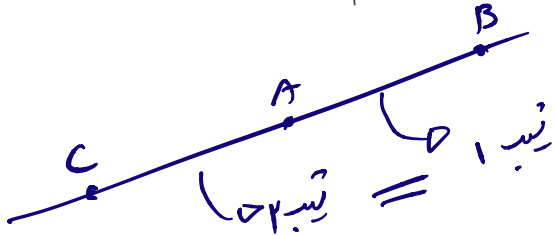
سه نقطه $(a, 1-2a)$ ، $(1-2m, m)$ و $(0, 1)$ در یک راستا قرار دارند. m کدام است؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳) ✓

$\frac{1}{2}$ (۲)

۱ (۱)



$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$(a, 1-2a) \text{ و } (0, 1) \rightarrow \frac{1-2a-1}{a-0} = -2$$

$$(1-2m, m) \text{ و } (0, 1) \rightarrow \frac{m-1}{1-2m-0} = -2$$



۲۵۲

نقطه $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $2y - x = 5$ است. مساحت این مربع،

کدام است؟

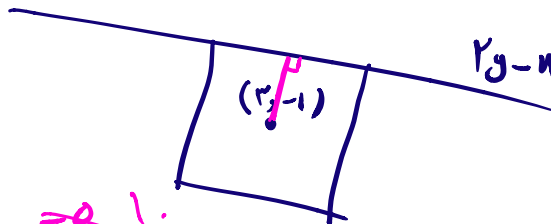
خارج ۹۳

۸۰ (۴) ✓

۷۵ (۳)

۴۵ (۲)

۴۰ (۱)



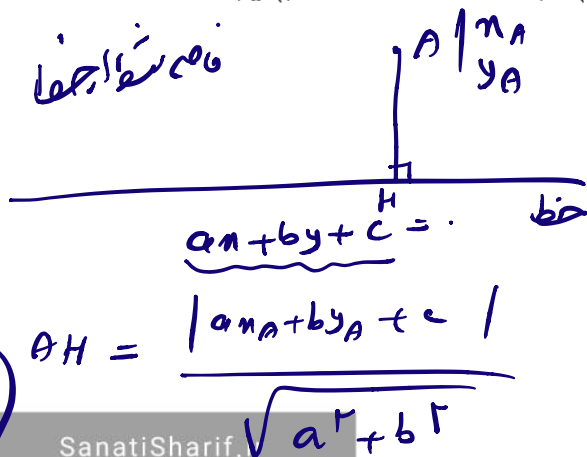
$$\frac{|\cancel{2(-1) - 3 - 5}|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$a = 4\sqrt{5} \rightarrow 12 \times 0 = 12$

@alaa_sanatiSharif

۲۵۲

فاصله نقطه از خط



$$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

SanatiSharif.



دو نقطه بر خطی به معادله $y = x - 1$ قرار دارند که فاصله این نقاط از خط به معادله $2x - 3y = 5$ برابر $\sqrt{13}$ است.
طول این دو نقطه، کدام است؟

۲۵۳

تجربی ۸۹

۱۱ و -۹ (۴)

-۱۱ و ۱۵ (۳)

-۱۵ و ۱۱ (۲) ✓

-۱۵ و ۹ (۱)

$$m \mid n - 1$$

$$\frac{|2n - 3(n-1) - 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \sqrt{13} \rightarrow \frac{|2n - 3n + 3 - 5|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \rightarrow |-n - 2| = 13$$

$$-n - 2 = 13 \rightarrow n = -15$$

$$-n - 2 = -13 \rightarrow n = 11$$



۲۵۴

سه نقطه $(0, 2)$ ، $(4, 0)$ و مبدأ مختصات رأس های یک مثلث هستند. ارتفاع و میانه وارد بر بزرگ ترین ضلع این مثلث، آن را به ترتیب در H و M قطع کرده است. طول MH چند برابر $\sqrt{5}$ است؟

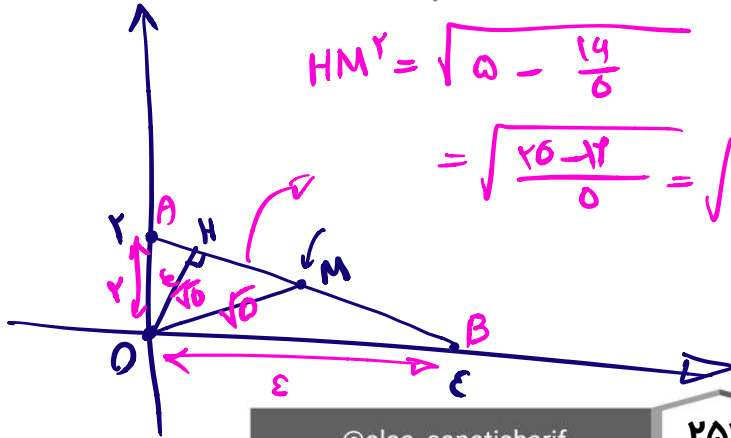
کتاب درسی

۰/۲ (۴)

۰/۴ (۳)

۰/۶ (۲) ✓

۰/۸ (۱)



$$HM^2 = \sqrt{5 - \frac{14}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{25-14}{5}} = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

OM — میانه وارد بر AB

↓
رضنه

$$OM = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

رضنه $= \sqrt{5}$

$$\frac{OH \times (AB)}{2} = \frac{2 \times 4}{2} \rightarrow OH = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$



۲۵۵

تجربی ۹۳

به ازای کدام مقدار m دستگاه معادلات

$$\begin{cases} mx + y = m - 1 \\ 3x + (m - 2)y = 4 - 2m \end{cases}$$
 دارای بیشمار جواب است؟

(۴) هیچ مقدار m

(۳) ۳

(۲) -۱ ✓

(۱) -۲

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{m-2} = \frac{m-1}{4-2m}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{-2}$$

$$\frac{1}{-3} = \frac{-2}{4}$$

~~$$m = 3$$~~

$$m = -1$$

$$m^2 - 2m = 3 \rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \rightarrow (m-3)(m+1) = 0$$



دارای جواب (سازگار) باشد، مقدار منفی a کدام است؟

$$\begin{cases} ax + 3y = 1 \\ x - y = 3 \\ 3x + 7y = a - 3 \end{cases}$$

اگر دستگاه

۲۵۶

-۴۶ (۴)

-۲۳ (۳)

-۲۱ (۲)

-۲۰ (۱)

$$ax + 3y = 1$$

$$x - y = 3$$

$$3x - 3y = 9$$

$$+ \rightarrow (a+3)x = 10$$

$$\rightarrow x = \frac{10}{a+3}$$

$$y = x - 3 = \frac{10}{a+3} - 3 = \frac{10 - 3a - 9}{a+3} = \frac{1-3a}{a+3}$$

رد محمول در مخرج

$$\frac{1-3a}{a+3}$$

$$3\left(\frac{10}{a+3}\right) + 7\left(\frac{1-3a}{a+3}\right) = a - 3 \rightarrow \frac{30 + 7 - 21a}{a+3} = a - 3$$

$$\rightarrow a^2 - 9 = -21a + 21$$

$$a^2 + 21a - 30 = 0$$



تجربی ۸۳

نقطه $(a, 2a)$ مرکز دایره گذرنده بر دو نقطه $(2, 1)$ و $(-1, 4)$ است. شعاع این دایره کدام است؟

۲۵۷

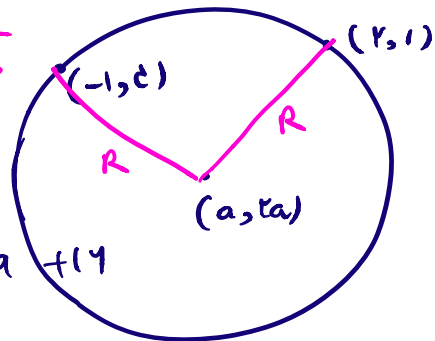
$3\sqrt{2}$ (۴)

$2\sqrt{2}$ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱) ✓

$$R = \sqrt{(a-2)^2 + (2a-1)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (2a-4)^2}$$



$$a^2 - 4a + 4 + 4a^2 - 4a + 1 = a^2 + 4a + 1 + 4a^2 - 14a + 16$$

$$-4a + 5 = -10a + 17$$

$$7a = 12 \rightarrow a = 2 \rightarrow R = \sqrt{5^2 + 2^2} = 2$$



دایره $x^2 - 6x + y^2 + 4y + 6 = 0$ در چند نقطه محورهای مختصات را قطع می کند؟

۲۵۸

۱ (۴)

۳ (صفر)

۲ (۲) ✓

۴ (۱)

گزینه ۱ $\rightarrow x = 0 \rightarrow y^2 + 4y + 6 = 0$

$\Delta = 16 - 24 < 0 \rightarrow$

گزینه ۳ $\rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 6 = 0$

$\Delta = 36 - 24 > 0$

۲

مقدار:

معادله استاندارد $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$

α
۰

β
۰

R

معادله استاندارد $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$\alpha = -\frac{a}{2}$
 $\beta = -\frac{b}{2}$

$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$



به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، منحنی به معادله $2x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 4y + a = 0$ یک دایره است؟ خارج ۸۵

۲۵۹

\emptyset (۴)

$\{-3, 3\}$ (۳)

$\{3\}$ (۲)

$\{-3\}$ (۱) ✓

$$a^2 - 7 = 2 \rightarrow a^2 = 9 \rightarrow a = \pm 3$$

$$2x^2 + 2y^2 + 4y + a = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2y + \frac{a}{2} = 0$$

$$a^2 + b^2 - 4c > 0 \rightarrow 0^2 + 2^2 - 4\left(\frac{a}{2}\right) > 0$$

$$4 - 2a > 0 \rightarrow 2a < 4 \rightarrow a < 2$$

معادله ساده

شرط دایره

ضریب x^2 = ضریب y^2

شرط دایره

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$$

$$a^2 + b^2 - 4c > 0$$



۲۶۰

دایره ای از دو نقطه $A(0, 1)$ و $B(3, 0)$ گذشته و معادله یک قطر آن به صورت $x - y = 2$ است. شعاع این دایره کدام است؟

خارج ۹۰ و کتاب درسی

۳ (۴)

$\sqrt{5}$ (۳) ✓

۲ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

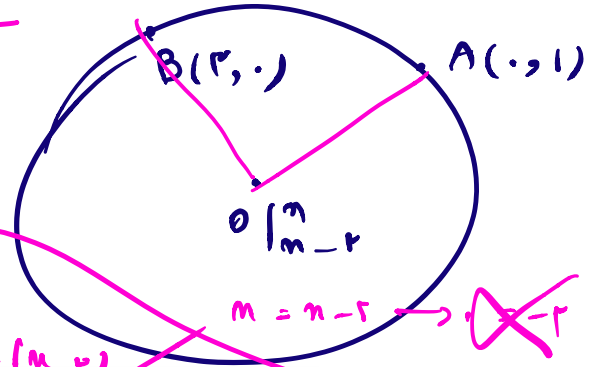
$$d = n - r \rightarrow 0 \mid \begin{matrix} m \\ m - r \end{matrix}$$

$$OA = OB = R$$

$$R = \sqrt{r^2 + 1}$$

$$\sqrt{(n-0)^2 + (n-1)^2} = \sqrt{(n-3)^2 + (n-r)^2} = R$$

$$n^2 + (n-1)^2 = (n-3)^2 + (n-r)^2 \rightarrow n = \pm(n-r)$$



$$m = n - r \rightarrow \cancel{n - r}$$



تجربی ۹۳ و ۹۱

شعاع دایره گذرا بر سه نقطه $(0, 0)$ ، $(2, 1)$ و $(1, -2)$ ، برابر کدام است؟

۲۶۱

$\frac{1}{2}\sqrt{13}$ (۴)

$\sqrt{5}$ (۳)

$\sqrt{3}$ (۲)

$\frac{1}{2}\sqrt{10}$ (۱) ✓

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$c = 0$

$0 + 1 + 2a + b + c = 0$

$2a + b = -1$

$1 + 0 + a - 2b + c = 0$

$a - 2b = -1$

$2a - 4b = -2$

$0b = 0 \rightarrow b = 1 \rightarrow a = -3$

$x^2 + y^2 - 3x + y = 0$

$R = \frac{\sqrt{9 + 1 - 0}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$



۲۶۲

شعاع دایره ای که از دو نقطه $A(3, 0)$ و $B(-1, 0)$ گذشته و بر خط به معادله $y = -1$ مماس است، کدام است؟

کتاب درسی

$\frac{5}{2}$ ✓

$\sqrt{2}$ (۳)

$2\sqrt{2}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$(3, 0) \rightarrow 9 + 3a + c = 0$

$(-1, 0) \rightarrow 1 - a + c = 0$

$(1, -1) \rightarrow 1 + 1 + a - b + c = 0$

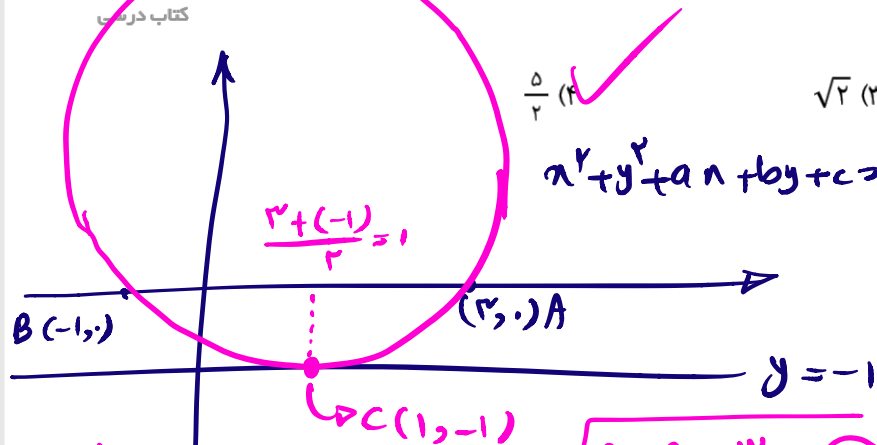
$3a + c = -9$

$a - c = +1$

$\rightarrow 6a = -8 \rightarrow a = -\frac{4}{3}$

$-2 - c = 1 \rightarrow c = -3$

$1 + (-2) - b + (-3) = 0 \rightarrow b = -2$



$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0 \rightarrow R = \frac{\sqrt{4 + 4 + 12}}{2} = \frac{5}{2}$



دایره‌ای از نقطه $A(-1, 2)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایره بزرگ‌تر کدام است؟

۲۶۳

تجربی ۹۰

۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲) ✓

۸ (۱)

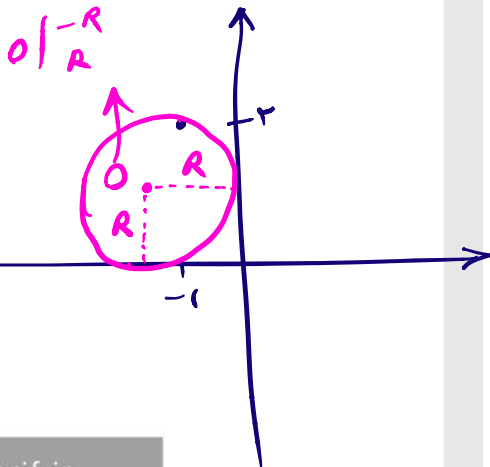
$$(x+R)^2 + (y-R)^2 = R^2$$

$$(-1, 2) \rightarrow (-1+R)^2 + (2-R)^2 = R^2$$

$$1 + R^2 - 2R + 4 + R^2 - 4R = R^2$$

$$R^2 - 4R + 5 = 0 \rightarrow (R-1)(R-4) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} R=1 \rightarrow 2 \\ R=4 \rightarrow 1 \end{cases}$$





خارج ۹۱

به ازای کدام مقادیر m خط به معادله $y = mx + 2$ بر دایره $x^2 + y^2 - 2x = 3$ مماس است؟

۲۶۴

$1, \frac{2}{3}$ (۴)

$1, -\frac{2}{3}$ (۳)

$0, \frac{4}{3}$ (۲) ✓

$0, -\frac{4}{3}$ (۱)

$$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow 0!$$

$$R = \frac{\sqrt{c + 0 + 12}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \textcircled{2}$$

$y - mx - 2 = 0$

0!

$$\frac{|0 - m(1) - 2|}{\sqrt{1 + m^2}} = 2$$

$$\rightarrow | -m - 2 | = 2\sqrt{1 + m^2}$$

$$m^2 + c + cm = \frac{c^2 + 4cm + 4m^2}{c + cm^2}$$

$$2m^2 - cm = 0$$

$$m(2m - c) = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = c/2 \end{cases}$$



منحنی های درجه دوم / دایره

طول قطعه مماسی که از $A(4, 1)$ بر دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ رسم می شود، برابر کدام است؟

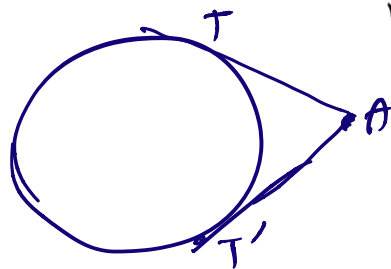
۲۶۵

$2\sqrt{3}$ (۴)

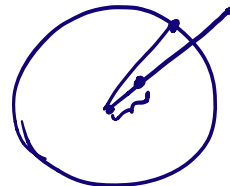
۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)



$$AT = \sqrt{F}$$



رسم نقطه در دایره

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$$

$$\cancel{12} + \cancel{1} - \cancel{8} + \cancel{4} + 3 = 14 \rightarrow \textcircled{5}$$

داخل $F < 0 \rightarrow$
برون $F > 0 \rightarrow$
روی دایره $F = 0 \rightarrow$



منحنی های درجه دوم / دایره

کمترین فاصله نقاط روی دایره $(x-8)^2 + (y+15)^2 = 4$ از مبدأ مختصات، کدام است؟

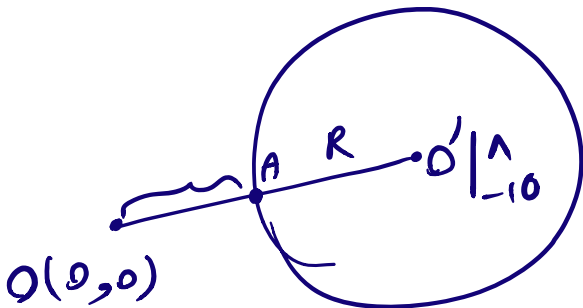
۲۶۶

۱۱ (۴)

۱۷ (۳)

۱۵ (۲) ✓

۱۳ (۱)



$$(x-8)^2 + (y+15)^2 - \epsilon = 0$$

F

$$8^2 + 15^2 - \epsilon > 0$$

$$OO' = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$$

$$R = 2$$

$$OO' - R = 17 - 2 = 15$$



منحنی های درجه دوم / دایره

۲۶۷

دو دایره به معادله های $C_1: x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1$ و $C_2: x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0$ نسبت به هم چگونه اند؟

(۱) مماس خارج (۲) مماس داخل (۳) متقاطع در دو نقطه (۴) یکی خارج دیگری

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0 \rightarrow O \left| \begin{matrix} 2 \\ -2 \end{matrix} \right. \quad r = \frac{\sqrt{16 + 16 + 4}}{2} = 3$$

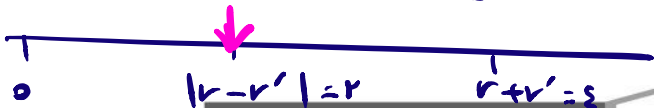
$$x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0 \rightarrow O' \left| \begin{matrix} 2 \\ -4 \end{matrix} \right. \quad r' = \frac{\sqrt{16 + 64 - 72}}{2} = 1$$

$$OO' = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

$$r + r' = 4$$

$$|r - r'| = 2$$

$$OO' = |r - r'|$$





۲۶۸

به ازای کدام مقدار a دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 + 4x = 0$ و $x^2 + y^2 - 2x + 8y + a = 0$ مماس خارج

ریاضی ۹۰

یکدیگرند؟

$$x^2 + y^2 + \varepsilon a = 0 \rightarrow 0 \mid -r \quad \Delta (4) \quad r = \frac{\sqrt{14 + \dots}}{2} = 2 \quad \gamma (3) \quad \varepsilon (2) \quad \delta (1)$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 8y + a = 0 \rightarrow 0' \mid -\varepsilon \quad r' = \frac{\sqrt{4 + 16 - \varepsilon a}}{2} = \frac{\sqrt{4\delta - \varepsilon a}}{2}$$

$\delta\delta' = r + r'$

$$\delta\delta' = \sqrt{r^2 + \varepsilon^2} = 0$$

$$\delta\delta' = r + r' \rightarrow \delta = 2 + \frac{\sqrt{4\delta - \varepsilon a}}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{4\delta - \varepsilon a}}{2} = 2 \rightarrow 4\delta - \varepsilon a = 16$$

$$\varepsilon a = 16 \rightarrow a = 16$$



۲۶۹

معادله وتر مشترک دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$ و $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 14$ کدام است؟

کتاب درسی

$$x + 7y + 7 = 0 \quad (۴)$$

$$x + 7y = 7 \quad (۳)$$

$$5x + 7y + 7 = 0 \quad (۲) \checkmark$$

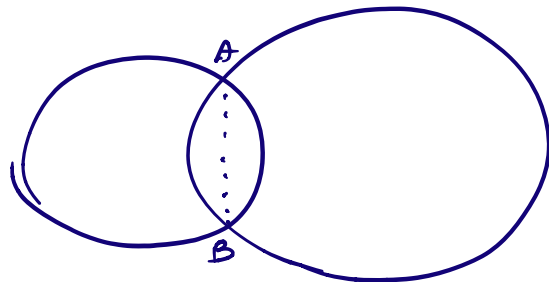
$$5x + 7y = 7 \quad (۱)$$

~~$$x^2 + y^2 + 2x + 8y = 0$$~~

~~$$x^2 + y^2 - 4x - 6y = 14$$~~

$$10x + 14y = -14$$

$$5x + 7y = -7$$





۲۷۰

نقاط $(-3, 1)$ و $(1, 1)$ کانون های یک بیضی هستند که بر محور X ها مماس است. طول بلندترین قطر این

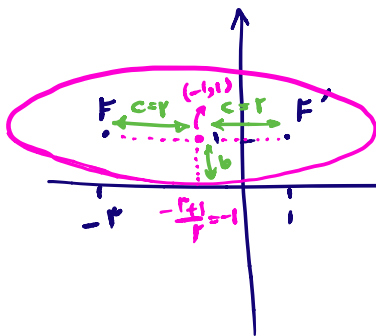
بیضی کدام است؟

$\sqrt{3}$ (۴)

$2\sqrt{5}$ (۳) ✓

$\sqrt{5}$ (۲)

$2\sqrt{3}$ (۱)



$c = 2$
 $b = 1$

$a^2 = b^2 + c^2 = 1^2 + 2^2 = 5$

$\rightarrow a = \sqrt{5}$

$2a = 2\sqrt{5}$

$a^2 = b^2 + c^2$

بیضی

۲c فاصله کانونی

۲b قطر کوچک = قطر نامنوع

۲a قطر بزرگ = قطر بزرگ



۲۷۱

در بیضی به معادله $3x^2 + 4y^2 + 18x - 16y = 5$ ، مجموع فواصل هر نقطه بیضی از دو کانون آن، کدام است؟

ریاضی ۹۳

۸ (۴) ✓

$4\sqrt{3}$ (۳)

۶ (۲)

$4\sqrt{2}$ (۱)

$$\underline{3x^2} + \underline{4y^2} + \underline{18x} - \underline{16y} = 5$$

$$3(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 4y) = 5$$

$$3((x+1)^2 - 1) + 4((y-2)^2 - 4) = 5$$

$$3(x+1)^2 - 3 + 4(y-2)^2 - 16 = 5$$

$$3(x+1)^2 + 4(y-2)^2 = 24 \div 3 = 8$$

$$\rightarrow \frac{(x+1)^2}{\frac{8}{3}} + \frac{(y-2)^2}{2} = 1$$

$$a^2 = 8 \rightarrow a = 2\sqrt{2}$$

$$2a = 4\sqrt{2}$$



۲۷۲

بیضی به معادله $x^2 + 4y^2 + ay + bx + c = 0$ در نقطه ای به طول ۳ بر محور Xها مماس است، و از نقطه

$(-1, -2)$ می گذرد. خروج از مرکز آن، کدام است؟

تجربی ۹۴

$$\frac{2}{4} (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} (3)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (2)$$

$$\frac{1}{2} (1)$$

یادآوری:

$$e = \frac{\text{ضرب‌بزرگ‌ترین‌ها}}{\text{ضرب‌کوچک‌ترین‌ها}}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

یادآوری:

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$0 < e < 1$$

$e \rightarrow$ بیض بیضه دایره

$e \rightarrow 1$ بیض بیضه بیضه



به ازای کدام مقدار k ، شکل ظاهری بیضی به معادله $4x^2 + ky^2 = 48$ ، به دایره نزدیک تر است؟

۲۷۳

$\frac{3}{4}$ ✓

$\frac{2}{3}$

$\frac{6}{2}$

$\frac{12}{1}$

بسیج برابر نزدیک تر ← فرج از نزدیک تر

$$4x^2 + ky^2 = 48$$

→

$$e = \sqrt{1 - \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

گزینه ۳

$$e = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۴

$$e = \sqrt{1 - \frac{4}{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

گزینه ۱

$$e = \sqrt{1 - \frac{2}{12}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

گزینه ۲



اگر $x^2 + ay^2 - 2x + a - 3 = 0$ معادله یک بیضی قائم (قطر بزرگ موازی y ها) باشد، مجموعه مقادیر a به

۲۷۴

کدام صورت است؟

$1 < a < 4$ (۴)

$1 < a < 3$ (۳)

$0 < a < 4$ (۲)

$0 < a < 1$ (۱) ✓

$$x^2 + ay^2 - 2x + a - 3 = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + ay^2 = 3 - a$$

$$(x-1)^2 + ay^2 = 4 - a$$

$$\frac{(x-1)^2}{4-a} + \frac{y^2}{\frac{4-a}{a}} = 1$$

$$4-a > 0 \rightarrow a < 4$$

$$\frac{4-a}{a} > 0 \rightarrow a > 0$$

$0 < a < 4$

$$\frac{4-a}{a} > 1 \rightarrow a < 1$$



معادله بیضی به کانون های $F(1, 1)$ و $F'(1, -1)$ و قطر بزرگ $2\sqrt{5}$ کدام است؟

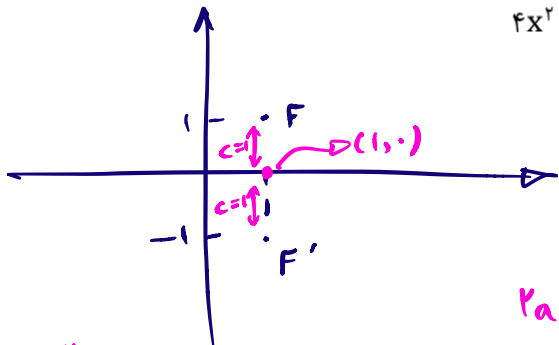
۲۷۵

$$5x^2 + 4y^2 + 10x = 15 \quad (۲)$$

$$4x^2 + 5y^2 + 8x = 16 \quad (۴)$$

$$5x^2 + 4y^2 - 10x = 15 \quad (۱)$$

$$4x^2 + 5y^2 - 8x = 16 \quad (۳)$$



$$O(1, 0) \quad c=1$$

بیضی

$$\frac{(x-1)^2}{b^2} + \frac{(y-0)^2}{a^2} = 1$$

$$2a = 2\sqrt{5} \rightarrow a = \sqrt{5}, c = 1 \rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

$$0 = b^2 + 1 \rightarrow b^2 = 5 \rightarrow b = \sqrt{5}$$

$$\frac{(x-1)^2}{5} + \frac{y^2}{5} = 1 \rightarrow 5(x-1)^2 + 5y^2 = 10$$

$$5x^2 - 10x + 5 + 5y^2 = 10$$



۲۷۶

بیضی به معادله $3x^2 + 4y^2 + 6x = 9$ را حول قطر بزرگ دوران داده و با نقره اندود کردن آن، یک آینه بیضی وار می سازیم. اگر دو پرتو نورانی از مبدأ مختصات به این آینه بتابانیم، مختصات نقطه تلاقی بازتاب این دو پرتو کدام است؟

$$3x^2 + 4y^2 + 6x = 9$$

$$3(x^2 + 2x) + 4y^2 = 9$$

$$3((x+1)^2 - 1) + 4y^2 = 9$$

$$3(x+1)^2 + 4y^2 = 12$$

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$(-2, 0)$ (۴) ✓

$(1, 0)$ (۳)

$(-1, 0)$ (۲)

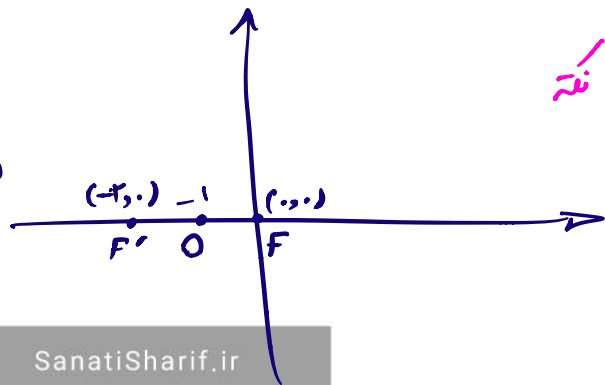
$(-3, 0)$ (۱)

بفرض $c = (-1, 0)$

$$a^2 = c \rightarrow a = 2$$

$$b^2 = 3 \rightarrow b = \sqrt{3}$$

$$c^2 = 1 \rightarrow c = 1$$





در بیضی به معادله $3x^2 + 4y^2 = 12$ ، یک خط از کانون بر قطر بزرگ آن عمود می کنیم تا بیضی را در A و B قطع کند. اندازه وتر AB کدام است؟

۲۷۷

تجربی ۹۰

$$3x^2 + 4y^2 = 12$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$a^2 = 4 \rightarrow a = 2$$

$$b^2 = 3$$

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{2(3)}{2} = 3$$

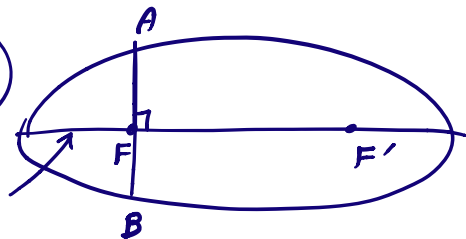
۴ (۴)

۳ (۳) ✓

$\frac{5}{2}$ (۲)

$\frac{2}{2}$ (۱)

$$AB = \frac{2b^2}{a}$$



AB در کانونی



۲۷۸

دو نقطه M و N هر کدام بر روی یکی از دو شاخه هذلولی به معادله $4y^2 - 9x^2 + 18x + 16 = 0$ حرکت می کنند.

کمترین فاصله MN کدام است؟

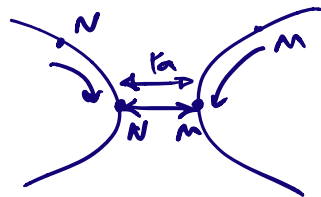
$\frac{10}{3}$ (۱) ✓

$$\begin{aligned} \Sigma y^2 - 9x^2 + 18x + 16 &= 0 \quad (۴) \\ \Sigma y^2 - 9(x^2 - 2x) &= -16 \\ \Sigma y^2 - 9(x^2 - 2x + 1) &= -17 \\ \Sigma y^2 - 9(x-1)^2 + 9 &= -16 \\ \Sigma y^2 - 9(x-1)^2 &= -25 \end{aligned}$$

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{25}{9}} - \frac{y^2}{\frac{25}{9}} = 1$$

$$a^2 = \frac{25}{9} \rightarrow a = \frac{5}{3}$$

$$c = \frac{1}{2}$$





۲۷۹

در هذلولی به معادله $4y^2 - 5x^2 + 8y + 20x + 4 = 0$ مختصات یکی از کانون ها کدام است؟

(۲, ۲) (۴)

(۲, -۱) (۳)

(-۱, -۱) (۲) ✓

(-۲, -۱) (۱)

$$\frac{\partial}{\partial y} (4y^2 + 8y) + \frac{\partial}{\partial x} (-5x^2 + 20x) + 4 = 0$$

$$8y + 8 - 10x + 20 = 0$$

$$8(y + 1) - 10(x - 2) = -8$$

$$8(y + 1) - 10(x - 2) - 8 = 0 \Rightarrow 8(y + 1) - 10(x - 2) = 8$$

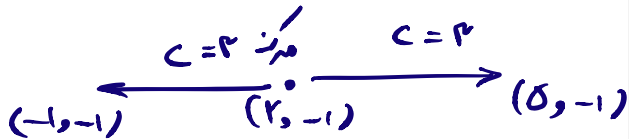
$$\frac{(x-2)^2}{5} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

مركز (۲, -۱)

$$a^2 = 5, b^2 = 4$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9$$

$$c = 3$$





مجانِب با شیب مثبت هذلولی به معادله $y^2 - 4x^2 - 4y + 16x - 4 = 0$ از کدام نقطه زیر می گذرد؟

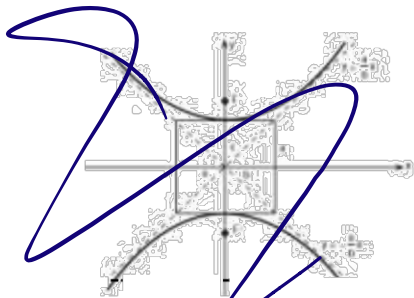
۲۸۰

(۲, -۱) (۴)

(۲, ۱) (۳)

(۰, ۱) (۲)

(۱, ۰) (۱) ✓



$$y^2 - 4x^2 - 4y + 16x - 4 = 0$$

$$(y - 2)^2 - 4(x - 2)^2 = 4$$

$$(y - 2)^2 - 4((x - 2)^2 - 4) = 4$$

$$(y - 2)^2 - 4(x - 2)^2 = -4$$

$$\frac{(x - 2)^2}{1} - \frac{(y - 2)^2}{4} = 1$$

$O(2, 2)$
(مقر)

$a^2 = 2 \rightarrow a = \sqrt{2}$
 $b^2 = 4 \rightarrow b = 2\sqrt{1}$

$m = \pm \frac{b}{a} = \pm \frac{2\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{2}$

$y - 2 = \sqrt{2}(x - 2)$

$y = \sqrt{2}x - 2$



خروج از مرکز هذلولی قائم به معادله $x^2 - 4y^2 + 8y - 2x = k$ ، کدام است؟

۲۸۱

$\sqrt{5}$ (۴)

$\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۳) ✓

۵ (۲)

$\frac{5}{4}$ (۱)

$$\frac{x^2}{D} - \frac{4y^2}{D} + \frac{8y}{D} - \frac{2x}{D} = k$$

$$(x-1)^2 - 1 - 4(y^2 - 2y) = k$$

$$(x-1)^2 - 4((y-1)^2 - 1) = k+1$$

$$(x-1)^2 - 4(y-1)^2 = k-3$$

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{k-3}{4}} - \frac{(y-1)^2}{\frac{k-3}{4}} = 1$$

منفی ← ← منفی

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} - \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$$

$a^2 = \frac{k-3}{4}$
 $b^2 = \frac{-(k-3)}{4}$

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{-(k-3)}{k-3}} = \sqrt{1 + \frac{0}{k-3}} = \sqrt{1} = 1$$

$\frac{\sqrt{5}}{2}$



۲۸۲

در یک هذلولی، معادله محور کانونی $x = -3$ و معادله یکی از مجانب ها $y = \frac{4}{3}x + 2$ است. خروج از مرکز

این هذلولی کدام است؟

$\frac{5}{4}$ (۴) ✓

$\frac{4}{5}$ (۳)

$\frac{4}{3}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

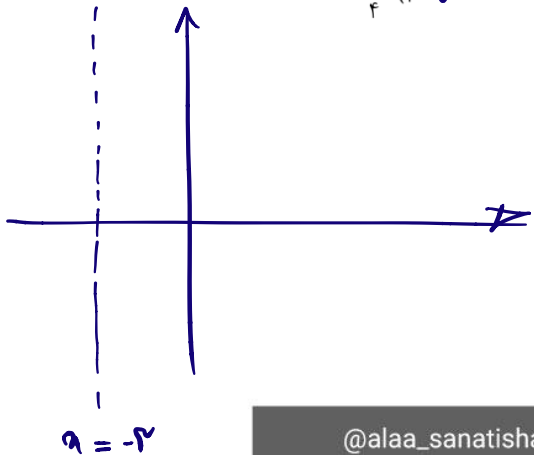
هذلولی قائم

نسبتی نباشد

$\pm \frac{9}{6}$

$\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{9}{14}} = \sqrt{\frac{23}{14}} = \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{14}}$$





آزاد تجربی ۸۷

✓ (۴) دو خط عمود بر هم

$$x^2 - y^2 + 4x - 4y = 0$$

$$(x+2)^2 - 4 - (y^2 + 4y) = 0$$

$$(x+2)^2 - 4 - ((y+2)^2 - 4) = 0$$

$$(x+2)^2 - (y+2)^2 = 0$$

رابطه $x^2 - y^2 + 4x - 4y = 0$ چه شکلی دارد؟

۲۸۳

(۳) هذلولی افقی

(۲) هذلولی قائم

(۱) دو خط موازی

$$(x+2)^2 = (y+2)^2$$

$$x+2 = \pm (y+2)$$

$$x+2 = y+2 \rightarrow y = x$$

$$x+2 = -y-2 \rightarrow y = -x-4$$



۲۸۴

در هذلولی به معادله $3x^2 - 4y^2 - 6x - 9 = 0$ ، طول وترى از آن، گذرا بر کانون و عمود بر محور کانونی، کدام است؟

تجربی ۹۳

$$\frac{3x^2}{2\sqrt{3} \cdot 4} - \frac{4y^2}{2\sqrt{3} \cdot 4} - \frac{6x}{2\sqrt{3} \cdot 4} - \frac{9}{2\sqrt{3} \cdot 4} = 0$$

$$3(x^2 - 2x) - 4y^2 = 9$$

$$3((x-1)^2 - 1) - 4y^2 = 9$$

$$3(x-1)^2 - 4y^2 = 12$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$$

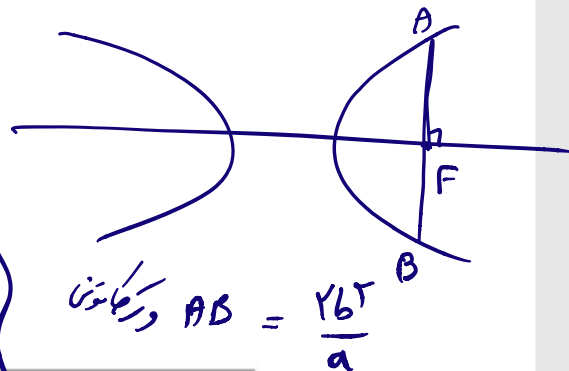
$$a^2 = 4 \rightarrow a = 2$$

$$b^2 = 3$$

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{2(3)}{2} = 3$$

$\sqrt{7}$ (۲)

۱ (۱)





۲۸۵

اگر $A(-1, 3)$ نقطه‌ای واقع بر یک سهمی و خط به معادله $y = -3$ خط هادی آن سهمی باشد، کانون این سهمی کدام

نقطه می‌تواند باشد؟

$(5, 3)$ (۴) ✓

$(3, 5)$ (۳)

$(-5, 4)$ (۲)

$(0, 6)$ (۱)

$$A(-1, 3) (0, 4) \rightarrow \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

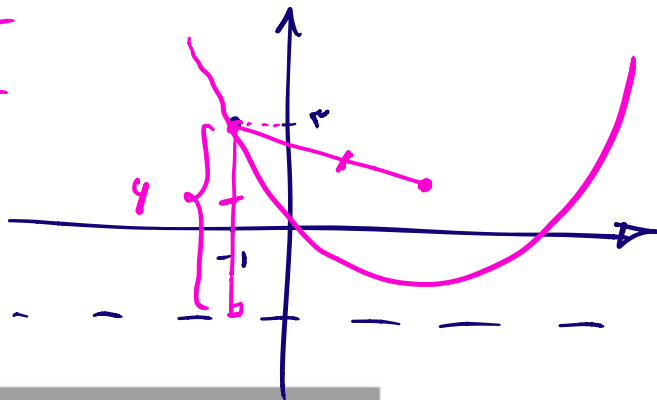
$$A(-1, 3) (-5, 4) \rightarrow \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$$A(-1, 3) (3, 5) \rightarrow \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

$$A(-1, 3) (5, 3)$$

خط هادی $y = -3$

$$\rightarrow \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$$





۲۸۶

در سهمی به معادله $3x^2 + 4y - 6x + 11 = 0$ معادله خط هادی کدام است؟

خارج ریاضی ۸۸

$$y = -\frac{1}{3}(4)$$

$$y = -\frac{2}{3}(3)$$

$$y = -\frac{4}{3}(2)$$

$$y = -\frac{5}{3}(1) \checkmark$$

$$3x^2 - 6x = -4y - 11$$

$$3(x^2 - 2x) = -4y - 11$$

$$3((x-1)^2 - 1) = -4y - 11$$

$$3(x-1)^2 = -4y - 11 + 3 = -4y - 8$$

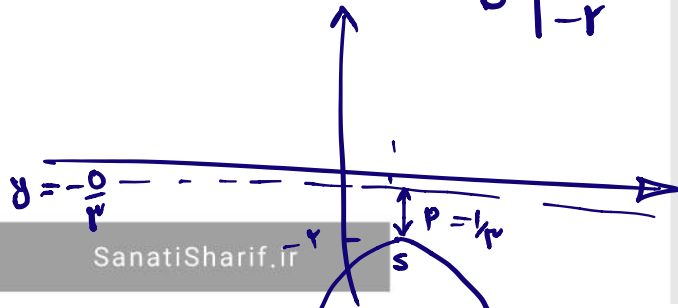
$$3(x-1)^2 = -4(y+2)$$

$$(x-1)^2 = -\frac{4}{3}(y+2)$$

$$-2p = -\frac{4}{3} \rightarrow p = \frac{1}{3}$$

مکانه ریسیس

$$s \mid -r$$

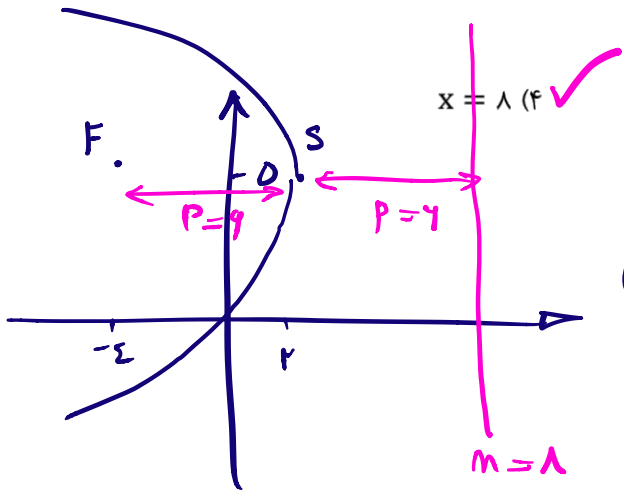




۲۸۷

نقطه $(-4, 5)$ کانون و نقطه $(2, 11)$ رأس سهمی ای است که محور تقارن آن با یکی از محورهای مختصات موازی است.

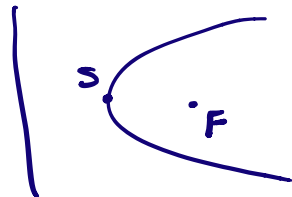
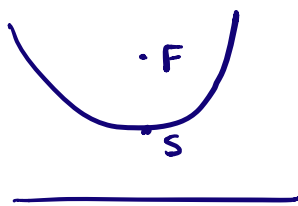
معادله خط هادی این سهمی کدام است؟



$y = 8$ (۳)

$x = -4$ (۲)

$y = -4$ (۱)





۲۸۸

نقطه $(3, 1)$ کانون و خط به معادله $x = -1$ ، خط هادی یک سهمی است. این سهمی از کدام یک از نقطه های زیر

می گذرد؟

$(3, 5)$ (۴) ✓

$(5, 5)$ (۳)

$(3, 3)$ (۲)

$(5, 3)$ (۱)

کمی اندک
دوازده بود برای ما

$S(1, 1)$

$p = 2$

$$(y-1)^2 = 8(x-1)$$

گزینه ۱:

$$\left(\frac{5-1}{4}\right)^2 = \frac{8(3-1)}{4}$$

گزینه ۳

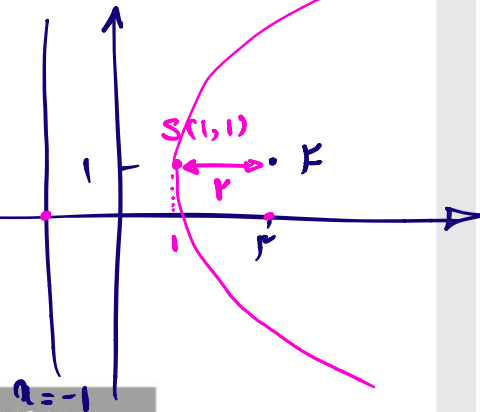
$$\left(\frac{5-1}{4}\right)^2 = \frac{8(5-1)}{4}$$

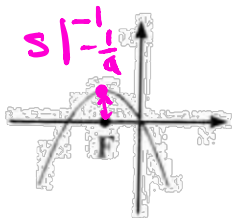
گزینه ۲:

$$\left(\frac{3-1}{2}\right)^2 = \frac{8(3-1)}{4}$$

گزینه ۴

$$\left(\frac{5-1}{4}\right)^2 = \frac{8(5-1)}{4}$$





معادله سهمی نمودار مقابل به صورت $x^2 + 2x = ay$ است، a کدام است؟

۲۸۹

-۱ (۲)

-۲ (۱) ✓

۲ (۴)

۱ (۳)

صند → عرض کانون

$$s \mid -1/a$$

کتاب

$$x^2 + 2x = ay$$

$$(x+1)^2 - 1 = ay$$

$$(x+1)^2 = ay + 1$$

$$(x+1)^2 = a(y + \frac{1}{a})$$

$$-\frac{1}{a} = -\frac{a}{2}$$

$$-ep = a$$

$$p = -\frac{a}{2}$$

$$a^2 = 4$$

$$a = \pm 2$$

$a < 0$

$$a = -2$$



۲۹۰

سهمی به کانون $F(3, 2)$ و خط هادی به معادله $x = -1$ محور x ها را در نقطه A قطع می کند، فاصله نقطه A تا کانون

ریاضی ۹۴ و مشابه تجربی ۹۲

سهمی کدام است؟

$$(y-2)^2 = 8(x-1)$$

۳ (۴)
دهانه رو به راست

۲/۷۵ (۳)
صافه

۲/۵ (۲) ✓

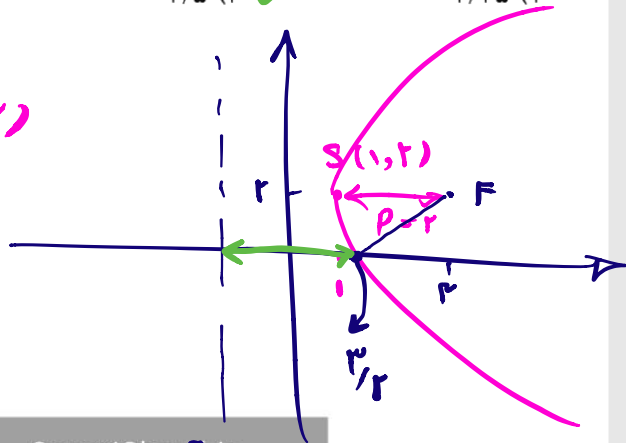
۲/۲۵ (۱)

$$y=0 \rightarrow 4 = 8(x-1)$$

$p=2$

$S(1, 2)$

$$x-1 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{3}{2}$$





۲۹۱

معادله سهمی ای که مختصات کانون آن $(-1/25, 0/5)$ و معادله خط هادی آن $y = 0/75$ است، کدام است؟

$$4x^2 - 4x = -(16y + 5) \quad (2) \checkmark$$

$$x^2 - x = 4y - 5 \quad (4)$$

$$S(0/10, -0/125)$$

$$x^2 - 4x = 3 - 16y \quad (1)$$

$$4x^2 - 4x = -16y - 3 \quad (3)$$

دوازدهم پایه

کلاس

$$p = 1$$

$$(x - 0/10)^2 = -4(y + 0/125)$$

$$x^2 + 0/125 - x = -4y - 1$$

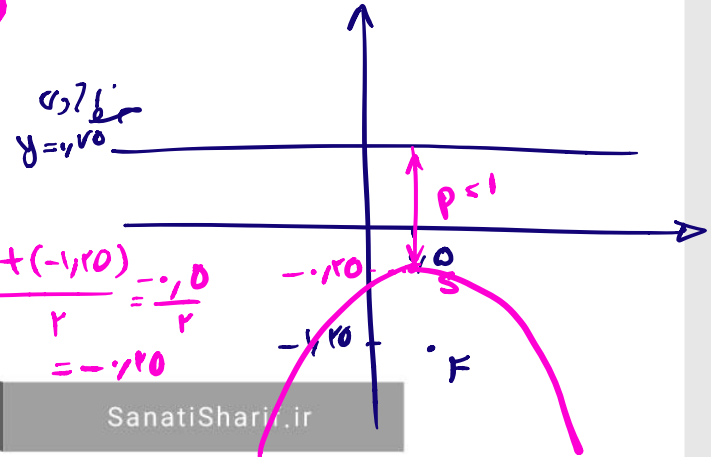
$$\sum x^2 + 1 - 4x = -12y - 4$$

$$\sum x^2 - 4x = -12y - 0$$

مختصات
 $y = 0/75$

$$\frac{0/125 + (-0/125)}{2} = -0/125$$

$$= -0/125$$





طول وتر عمود بر محور کانونی در کانون سهمی به معادله $x^2 + 4x + 4y = 3$ برابر کدام گزینه است؟

۲۹۲

$\frac{1}{4}$ (۴)

۴ (۳) ✓

۳ (۲)

۱ (۱)

$$x^2 + 4x + 4y = 3$$

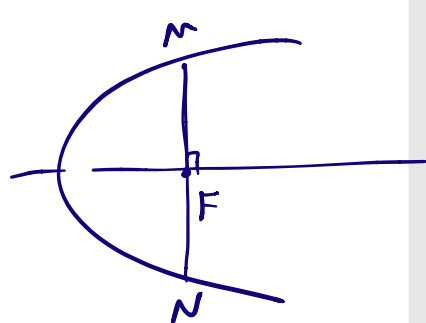
$$(x+2)^2 - 4 = -4y + 3$$

$$(x+2)^2 = -4y + 7$$

$$(x+2)^2 = -4\left(y - \frac{7}{4}\right)$$

$$-4p = -4 \rightarrow 4p = 4$$

نور کانونی



$$MN = 4p$$



۲۹۳

خط هادی یک سهمی به معادله $x = \frac{13}{4}$ است. هر پرتوی که از نقطه $(-\frac{5}{4}, -2)$ بر این سهمی بتابد، در امتداد محور Xها

تجربی ۹۴

باز می تابد. این سهمی محور Xها را با کدام طول قطع می کند؟

$$\frac{5}{4} \quad (4)$$

$$\frac{5}{9} \quad (3) \quad \checkmark$$

$$\frac{2}{4} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

کسر انتگرال (میانگین) می باشد

$$p = \frac{9}{2}$$

$$\frac{\frac{13}{4} + \frac{-5}{4}}{2} = \frac{1}{2} = 1$$

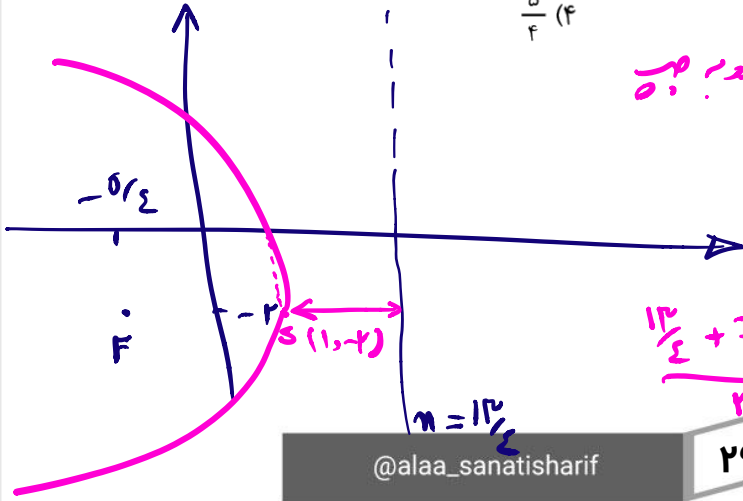
$$(y + 2)^2 = -9(x - 1)$$

$$y = 0 \rightarrow$$

$$2 = -9(x - 1)$$

$$-\frac{2}{9} = x - 1$$

$$x = -\frac{2}{9} + 1 = \frac{7}{9}$$





۲۹۴

عمق یک آینه سهموی در مرکز آن ۹ واحد و قطر قاعده آن ۶۰ واحد است. فاصله کانون تا رأس آن کدام است؟

خارج ۹۲ و مشابه کتاب درسی

۲۵ (۴)

۲۲/۵ (۳)

۲۰ (۲)

۱۵ (۱)

$$b = 9$$

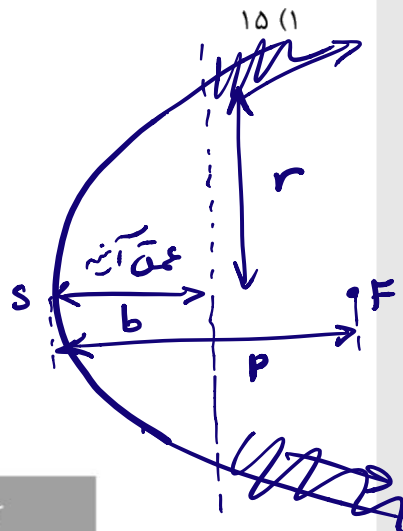
$$r = 3.$$

$$r^2 = \epsilon p b$$

$$\frac{9}{3} = \epsilon (p)(9)$$

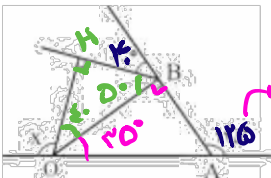
$$1 = \epsilon p \rightarrow p = 10$$

$$r^2 = \epsilon p b$$





تجربی ۸۷



زاویه خارجی

$$y + 90 = 125 \rightarrow y = 35$$

$$z + 90 = 90 \rightarrow z = 0$$

در شکل مقابل، $\hat{A} = 125^\circ$ و $\hat{B} = 40^\circ$ است. زاویه x چند درجه است؟

۱۱۰ (۲)

۱۲۵ (۴)

۲۹۵

۱۰۵ (۱) ✓

۱۱۵ (۳)

$$x + 90 + 40 = 125$$

$$x = 125 - 130$$

$$x = -5$$

$$x = 105$$



۲۹۶

در شکل مقابل، زاویه $\widehat{BCX} = 114^\circ$ زاویه \widehat{CBD} چند درجه است؟

تجربی ۸۴



۵۲ (۴)

۴۸ (۳) ✓

۴۶ (۲)

۴۴ (۱)

ست روی است $\rightarrow BDC$

$$c + 114 = 180 \rightarrow c = 66$$

$$\alpha + 2(\cancel{66}) = 180$$

۱۳۲

$$\alpha = 180 - 132 = 48$$



۲۹۷

در مثلث ABC زاویه $\hat{A} = 108^\circ$ است. ضلع BC را از هر دو طرف به اندازه‌های $BD = BA$ و $CE = CA$ امتداد می‌دهیم. کوچک‌ترین زاویه خارجی مثلث ADE چند درجه است؟

تجربی ۹۳

۵۴ (۴)

۳۶ (۳) ✓

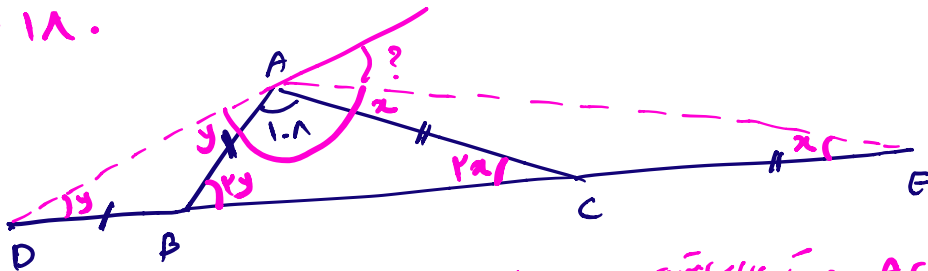
۳۲ (۲)

۲۴ (۱)

$$? + 18 + m + y = 180$$

۱۴۴

$$? = 180 - 144 = 36$$



$$m + y + 108 = 180$$

$$m + y = 72$$

مساویات ACE
 ABD



۲۹۸

در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB=AC$) قاعده ی BC را به اندازه ی ساق تا نقطه ی D امتداد می دهیم. اگر زاویه ی خارجی راس A از مثلث ABD برابر ۱۰۲ درجه باشد، کوچکترین زاویه ی مثلث ABC چند درجه است؟
تجربی ۹۴

۴۴ (۴) ✓

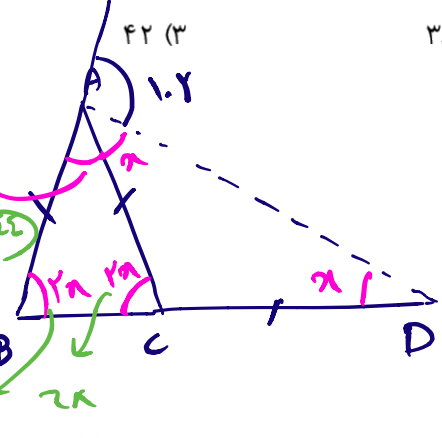
۴۲ (۳)

۳۸ (۲)

۳۴ (۱)

~~$110 - 2m + m + 102 = 180$~~
 ~~$110 - m = 78$~~
 ~~$m = 32$~~
 $-2m = -102$
 $m = 51$

$110 - 2m$
 $110 - 2(51) = 8$



ACD متساوی الساقیه
 ABC



۲۹۹

در مثلث ABC داریم $AB = AC$ ، $\hat{A} = ۸۰^\circ$ و عمود منصف‌های دو ساق مثلث، قاعده BC را در M و N قطع می‌کنند.

کوچک‌ترین زاویه مثلث AMN چند درجه است؟

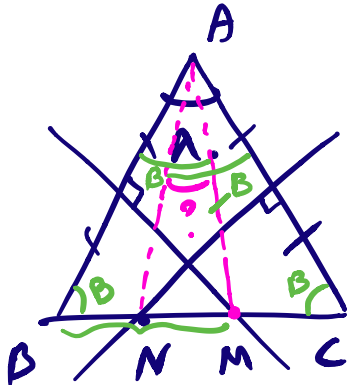
تجربی ۹۲

۳۰ (۴)

۲۵ (۳)

۱۵ (۲)

۲۰ (۱) ✓



ABM متساوی‌الساقین

هر دو ساق عمود منصف یکدیگر را بر خط
از دو ساق یک خط یک اندازه است

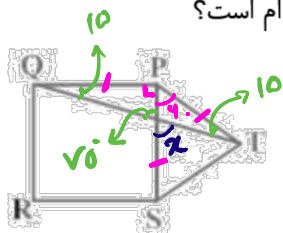
$$B + B - \hat{NAM} = ۸۰ \rightarrow \hat{NAM} = ۲.$$

$$۲B + ۸۰ = ۱۸۰ \rightarrow ۲B = ۱۰۰$$



در شکل زیر، چهارضلعی PSQR مربع است و مثلث PST متساوی الاضلاع است. زاویه X کدام است؟

۳۰۰

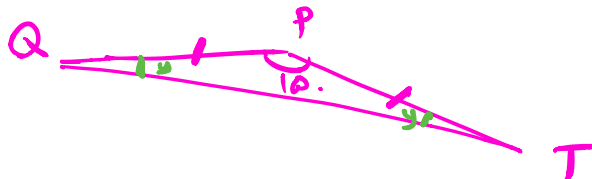


۷۵ (۴) ✓

۷۰ (۳)

۶۵ (۲)

۶۰ (۱)



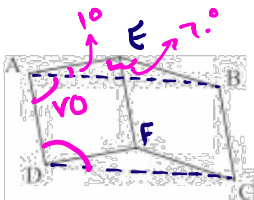
$$2y + 10. = 18. \rightarrow 2y = 8. \Rightarrow y = 4$$



۳۰۱

در شکل مقابل، یک مربع و یک لوزی با زاویه 60° در یک ضلع مشترک اند. بزرگ‌ترین زاویه متوازی‌الاضلاع ABCD چند درجه است؟

تجربی ۸۸



۱۳۵ (۴)

۱۲۰ (۳)

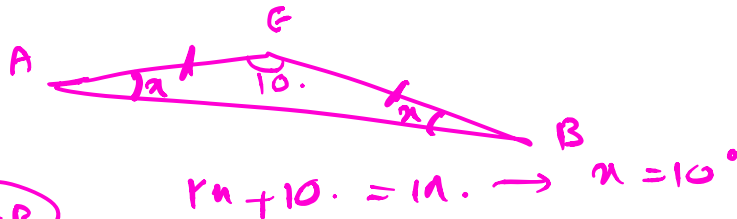
۱۰۵ (۲) ✓

۱۰۰ (۱)

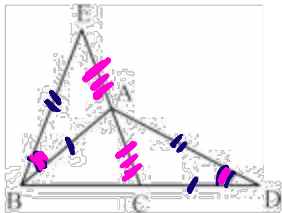
$180 - 70 = 110$ (circled)

$AE = EF$ (circled)

$EF = EB$ (circled)



خارج ۸۵



با توجه به شکل مقابل، کدام نتیجه گیری درست است؟

۳۰۲

AB = BC (۲)

AB = AC (۱)

AE = AC (۴) ✓

AE = BC (۳)

$$\triangle ACD = \triangle AEB$$

$$AD = BE$$

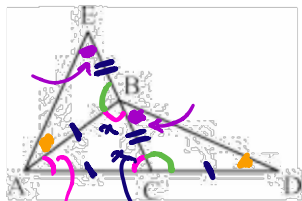
$$DC = AB$$

$$B = D$$

خارج ۸۹

در شکل مقابل زاویه $\widehat{BAC} = 52^\circ$ ، مجموع دو زاویه D و E چند درجه است؟

۳۰۳



۵۲ (۲)

۳۸ (۱)

۶۴ (۴) ✓

۵۸ (۳)

مساوی‌الاضلاع ABC

$$\triangle BCD = \triangle ABE$$

$D + B$

$$D + E = D + B$$

$$m + m + 52 = 180 \rightarrow 2m = 180 - 52 = 128 \rightarrow m = 64$$



یک مثلث متساوی الاضلاع به سه مثلث همنهشت تقسیم شده است. زاویه‌های هر مثلث همنهشت کدام است؟

۳۰۴

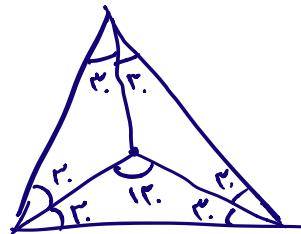
تجربی ۸۷

۱۲۰ و ۳۰ و ۳۰ (۴) ✓

۹۰ و ۶۰ و ۳۰ (۳)

۹۰ و ۳۰ و ۳۰ (۲)

۶۰ و ۶۰ و ۶۰ (۱)





۳۰۵

در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره ای به مرکز یک راس آن و شعاع $\frac{2}{5}$ واحد، دو ضلع مربع را قطع می کند. فاصله ی

ریاضی ۹۵

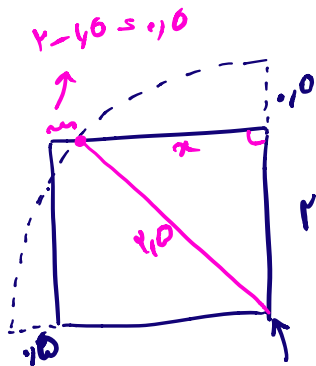
نزدیکترین راس مربع تا نقطه تقاطع، کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (۴)}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۲) ✓}$$

$$\frac{1}{4} \text{ (۱)}$$



$$x^2 + y^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \rightarrow x^2 + y^2 = \frac{4}{25}$$

$$x^2 = \frac{4}{25} \rightarrow x = \frac{2}{5}$$



۳۰۶

در یک مثلث قائم الزاویه، اندازه میانه‌های وارد بر دو ضلع قائمه برابر ۳ و ۴ است. طول وتر مثلث کدام است؟

$2\sqrt{3}$ (۴)

$2\sqrt{5}$ (۳) ✓

$2\sqrt{7}$ (۲)

$2\sqrt{6}$ (۱)

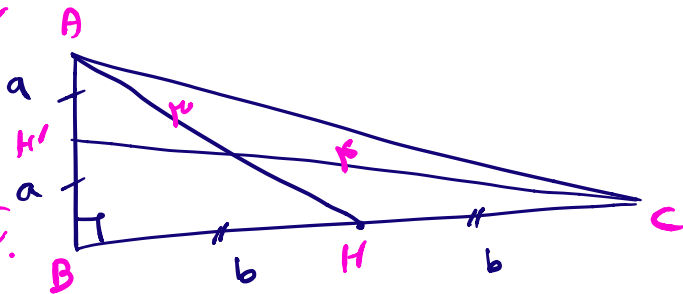
ABC:

$$(ra)^2 + (rb)^2 = AC^2$$

$$AC = \sqrt{ra^2 + rb^2}$$

$$= \sqrt{r^2(a^2 + b^2)} = \sqrt{r} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$0a^2 + 0b^2 = 10 \rightarrow a^2 + b^2 = 10$$



$$ABH: (ra)^2 + b^2 = 10^2$$

$$ra^2 + b^2 = 100$$

BCH':

$$a^2 + (rb)^2 = r^2$$

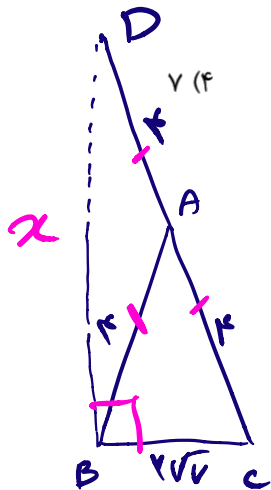
$$a^2 + rb^2 = 10$$



۳۰۷

در مثلث متساوی الساقین ABC داریم $AB = AC = 4$ و $BC = 2\sqrt{7}$. ضلع AC را به اندازه خود تا نقطه D امتداد
می دهیم ($AD = AC$). اندازه BD کدام است؟

خارج ۹۱



۶ (۳) ✓

$4\sqrt{2}$ (۲)

$2\sqrt{10}$ (۱)

نکته: در مثلث قائم الزامی اندازه میانه داریم بر حسب وتر است.

$$\alpha^2 + (2\sqrt{7})^2 = 8^2$$

$$\alpha^2 + 28 = 64 \rightarrow \alpha^2 = 36 - 28 = 8$$

$$= 2\sqrt{2}$$

$$\rightarrow \alpha = 2$$



۳۰۸

در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول اضلاع قائم به نسبت ۱ و ۳ و مساحت آن ۶۰ واحد مربع است. ارتفاع وارد بر وتر چه قدر

است؟

تجربی ۹۱ و کتاب درسی

۸ (۴)

۶ (۳) ✓

$4\sqrt{2}$ (۲)

۵ (۱)

$AB = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$
 $2\sqrt{10} = a$
 $S = \frac{a \times a}{2} = 10$
 $2^2 = 4$
 $a = 2\sqrt{10}$
 $S = \frac{h \times a}{2} = 60$
 $h = 4$



۳۰۹

زاویه‌های یک مثلث متناسب با اعداد ۶؛ ۵؛ ۱ می‌باشد. کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث چند برابر بزرگ‌ترین ضلع آن است؟

تجربی ۹۳

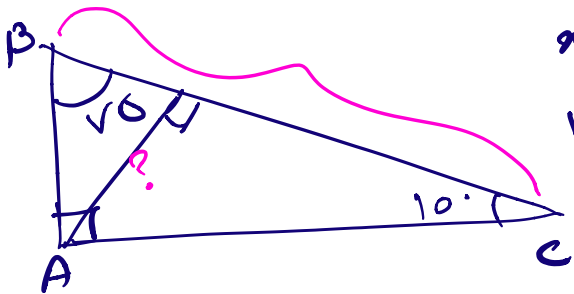
$$\frac{1}{2} (۴)$$

$$\frac{2}{5} (۳)$$

$$\frac{1}{3} (۲)$$

$$\frac{1}{4} (۱)$$

نکته: در مثلث قائمه‌الزاویه
باید زاویه 15°
ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{2}$ و ر
است.



$$n, 5n, 6n$$

$$12n = 18.$$

$$n = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \quad (10)$$



۳۱۱

هر یک از رأس‌های یک مربع بر روی اضلاع مربع دیگری است. اگر نسبت مساحت‌های این دو مربع $\frac{5}{8}$ باشد، رأس مربع

کتاب درسی

کوچک، ضلع مربع بزرگ را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

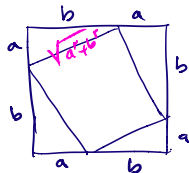
$$\frac{1}{3} \quad (2) \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$3a^2 + 3b^2 - 1.ab = 0$$

$$3\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 3 - 1 \cdot \frac{a}{b} = 0$$

$$\frac{a}{b} = t \rightarrow 3t^2 - 1 \cdot t + 3 = 0$$



$$\frac{(\sqrt{a^2 + b^2})^2}{(a+b)^2} = \frac{0}{1}$$

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + 1.ab} = \frac{0}{1} \rightarrow 1a^2 + 1b^2 = 0a^2 + 0b^2 + 1.ab$$

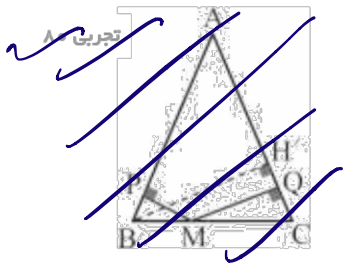
$$\Delta = 1 - 4(3)(3) = 7c$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{7c}}{2} = \begin{matrix} 3 \\ 1/3 \end{matrix}$$

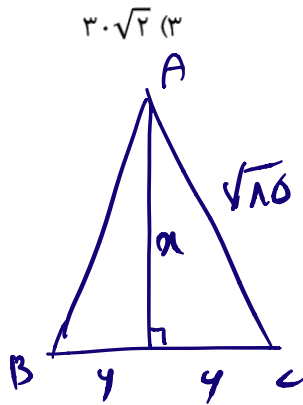
$$3a^2 + 3b^2 - 1.ab = 0$$

طول ساق یک مثلث متساوی الساقینی $\sqrt{۱۵}$ سانتی متر و طول قاعده آن ۱۲ سانتی متر است. مساحت مثلث چند سانتی متر

۳۱۲



۴۸ (۴)



$۳ \cdot \sqrt{۲}$ (۳)

مربع است؟

۴۲ (۲) ✓

$۲۴\sqrt{۳}$ (۱)

$$a^2 + 6^2 = 15$$

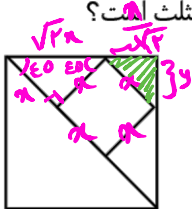
$$a^2 = 15 - 36 = -21$$

$$\rightarrow a = \sqrt{-21}$$

$$S = \frac{\sqrt{-21} \times 12}{2} = \textcircled{48}$$



تجربی ۸۴



در شکل مقابل هر دو چهار ضلعی مربع‌اند. مساحت مربع بزرگ‌تر چند برابر مساحت کوچک‌ترین مثلث است؟

۳۱۳

۱۶ (۲)

۱۲ (۱)

۲۴ (۴)

۱۸ (۳) ✓

$$y^2 + y^2 = n^2$$

$$y^2 = \frac{n^2}{2} \rightarrow y = \frac{n}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{(\sqrt{2}n + \frac{n}{\sqrt{2}})^2}{\frac{1}{2} \times \frac{n}{\sqrt{2}} \times \frac{n}{\sqrt{2}}} = \frac{\cancel{n^2} (\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}})^2}{\frac{1}{2} \cancel{n^2}} = \frac{2 + \frac{1}{2} + 2}{\frac{1}{2}}$$

= 18



نقطه M درون مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع $6\sqrt{3}$ قرار دارد. مجموع فاصله‌های این نقطه از سه ضلع چه قدر است؟

۳۱۴

تجربی ۸۱

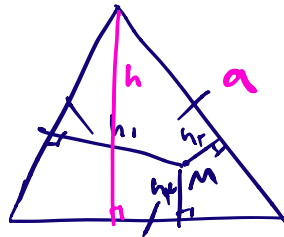
۹ (۴) ✓

$6 + \sqrt{3}$ (۳)

$4\sqrt{3}$ (۲)

۶ (۱)

$$\frac{\sqrt{3}}{2} (6 \parallel \sqrt{3}) = \frac{6 \times \sqrt{3}}{2} = 9$$



نکته:

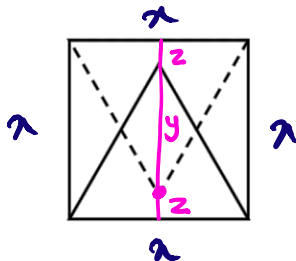
$$h_1 + h_2 + h_3 = h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$



۳۱۵

در شکل روبه‌رو، بر روی دو ضلع مقابل مربع، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. قطر بزرگ‌تر لوزی حاصل، چند

کتاب درسی



برابر ضلع مربع اصلی است؟

$$\frac{1}{3} (2) \quad 2 - \sqrt{3} (1)$$

$$\sqrt{3} - 1 (4) \checkmark \quad \frac{1}{2} (3)$$

$$y + 2z = a$$

$$y + z = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$2y + 2z = \sqrt{3} a$$

$$y = \sqrt{3} a - a = a(\sqrt{3} - 1)$$

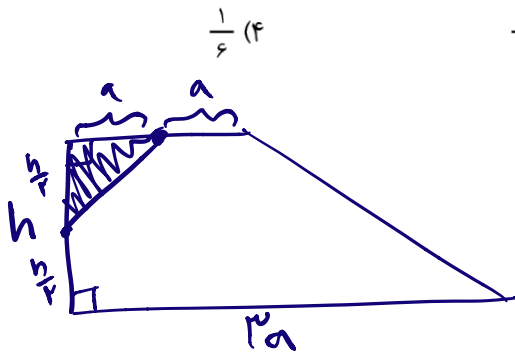


۳۱۶

در ذوزنقه قائم الزاویه‌ای نسبت دو قاعده برابر $\frac{۲}{۳}$ است. اگر وسط قاعده کوچک را به وسط ساق قائمه وصل کنیم، مساحت

مثلث حاصل چند برابر مساحت ذوزنقه اصلی است؟

تجربی ۸۲



$$\frac{1}{8} (۳)$$

$$\frac{1}{9} (۲)$$

$$\frac{1}{10} (۱) \checkmark$$

$$\frac{\frac{۵ \times \frac{۱۵}{۲}}{۲}}{\frac{۵ \times ۱۵}{۲}} = \frac{1}{10}$$



۳۱۷

اگر طول ضلع شش ضلعی منتظم شکل روبه‌رو ۴ واحد باشد، مساحت مثلث سایه زده شده چند واحد مربع است؟

کتاب درسی



$18\sqrt{2}$ (۴)

$16\sqrt{3}$ (۳)

$16\sqrt{2}$ (۲)

$12\sqrt{3}$ (۱) ✓

مساحت سازه اینصورت

$a = 4$

ضم $4\sqrt{3}$ $\rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} (144 \times 3) = 12\sqrt{3}$



خرج ۹۵

مساحت یک شش ضلعی منتظم برابر $9\sqrt{3}$ واحد مربع است، اندازه قطر کوچک آن کدام است؟

۳۱۸

۳ (۴)

$2\sqrt{3}$ (۳)

$3\sqrt{2}$ (۲)

$2\sqrt{6}$ (۱)

$$\frac{3\sqrt{3}a^2}{2} = 9\sqrt{3}$$

$$a^2 = 6 \rightarrow a = \sqrt{6}$$

$$\sqrt{3}a = \sqrt{3} \times \sqrt{6} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

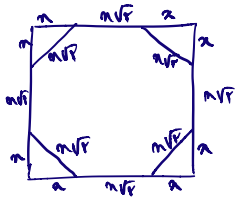


۳۱۹

طول ضلع یک مربع برابر محیط مثلث قائم الزاویه و متساوی الساقین به ضلع قائم ۲ واحد است. با حذف گوشه‌های این مربع،

بزرگ‌ترین هشت ضلعی منتظم ممکن داخل آن ساخته شده است. مساحت این هشت ضلعی، کدام است؟

تجربی ۹۳



$$16 + 16\sqrt{2} \quad (4)$$

$$24 + 8\sqrt{2} \quad (3)$$

$$24\sqrt{2} \quad (2)$$

$$32 \quad (1)$$

$$(5 + 2\sqrt{2})^2 - 4 \left(\frac{2\sqrt{2}}{2} \right)$$

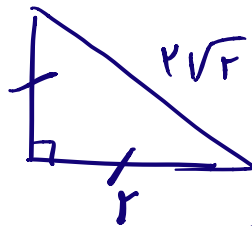
$$= 14 + 14\sqrt{2} + \cancel{4} - \cancel{4}$$

$$= 14 + 14\sqrt{2}$$

$$x + x + x\sqrt{2} = 5 + 2\sqrt{2}$$

$$x(2 + \sqrt{2}) = 2(2 + \sqrt{2})$$

$$x = 2$$



$$x + x + x\sqrt{2} = 5 + 2\sqrt{2}$$



۳۲۰

در دوزنقه ای اندازه قاعده ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق ها در بیرون دوزنقه

تجربی ۹۳

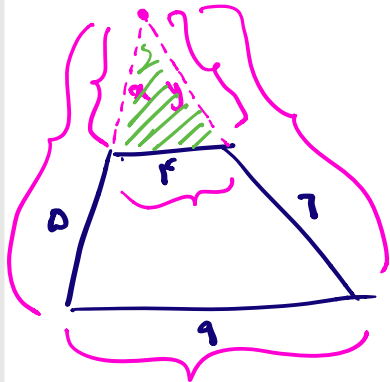
تشکیل می شود کدام است؟

۱۱/۶ (۲)

۱۱/۴ (۱)

۱۲/۸ (۴) ✓

۱۲/۲ (۳)



$$\frac{x}{m+5} = \frac{y}{y+2} = \frac{4}{9}$$

$$\rightarrow 9m = 4m + 2 \rightarrow 5m = 2 \rightarrow m = \frac{2}{5}$$

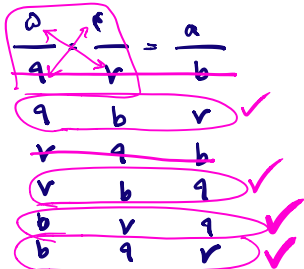
$$\rightarrow Ay = 4y + 2 \rightarrow 5y = 2 \rightarrow y = \frac{2 \cdot 5}{8} = \frac{5}{4} = \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$

$$m + y + 2 = \frac{2}{5} + \frac{5}{4} + 2 = \frac{2}{5} + \frac{5}{4} + \frac{8}{4} = \frac{2}{5} + \frac{13}{4} = \frac{2}{5} + \frac{13}{4} = \frac{8}{20} + \frac{32.5}{20} = \frac{40.5}{20} = \frac{81}{40}$$



۳۲۱

مثلثی به اضلاع ۵، ۴، a با مثلثی به اضلاع ۹، ۷، b متشابه است. بیشترین مقدار ممکن برای عدد a کدام است؟ خارج ۹۰



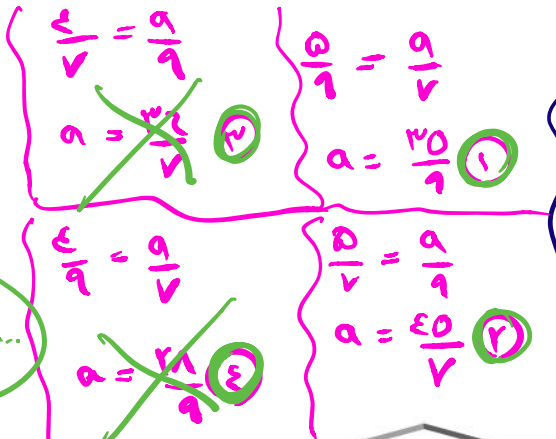
$$\frac{35}{9} = 3\frac{8}{9} \quad \frac{45}{9} = 5$$

$$\frac{35}{4} \quad (4)$$

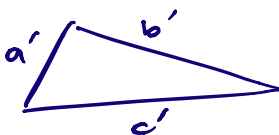
$$\frac{36}{5} \quad (3)$$

$$\frac{45}{9} \quad (2) \checkmark$$

$$\frac{36}{9} \quad (1)$$



بدرستی: درست است



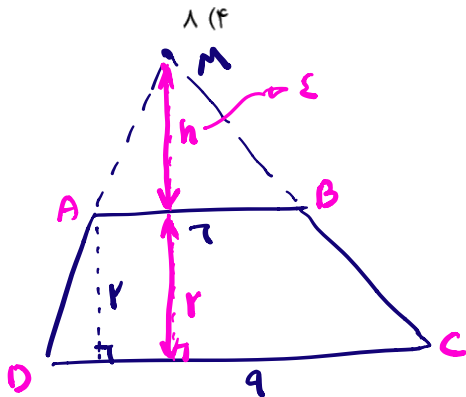


۳۲۲

در دوزنقه‌ای به طول قاعده‌های ۶ و ۹ و ارتفاع ۲ واحد، امتداد دو ساق در نقطه M متقاطع‌اند. فاصله M از قاعده بزرگ‌تر،

تجربی ۸۷

چه قدر است؟



۷ (۳)

۶ (۲) ✓

۵ (۱)

$$\begin{array}{ccc} \triangle MAB & \sim & \triangle MCD \\ \downarrow & & \downarrow \\ h & & h+r \end{array}$$

$$\frac{h}{h+r} = \frac{7}{9} = \frac{r}{r} \rightarrow 2h + \varepsilon = 3h$$

$$h = \varepsilon$$



در دوزنقه‌ای به طول قاعده‌های ۸ و ۱۲ و ارتفاع ۱۰ واحد، مساحت مثلث محدود به دو قطر و یک ساق آن، چند واحد مربع

۳۲۳

تجربی ۹۵

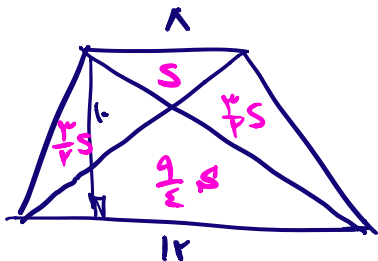
است؟

۲۸ (۴)

۲۴ (۳) ✓

۲۰ (۲)

۱۸ (۱)



$$\frac{(1+12) \times 10}{2} = 100$$

$$k = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$S + \frac{3}{4}S + \frac{3}{4}S + \frac{9}{4}S = 100$$

$$\rightarrow \frac{S + 3S + 3S + 9S}{4} = 100$$

$$S = 14$$

$$\frac{3}{4}S = \frac{3}{4}(14) = 10.5$$



۳۲۴

نسبت مساحت دو مثلث متشابه $\frac{49}{128}$ است. اگر یک ضلع مثلث کوچک تر ۲۱ سانتی متر باشد، ضلع متناظر با این ضلع در مثلث

تجربی ۸۲

بزرگ تر چند سانتی متر است؟

$24\sqrt{3}$ (۴)

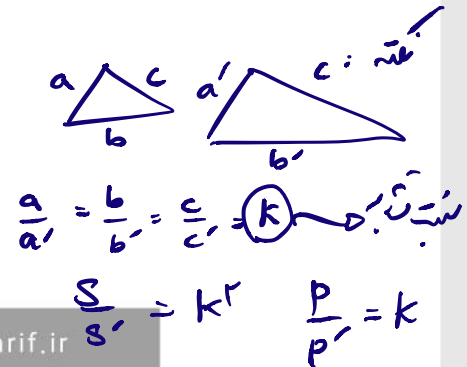
$24\sqrt{2}$ (۳) ✓

$21\sqrt{3}$ (۲)

$21\sqrt{2}$ (۱)

$$k^2 = \frac{49}{128} \rightarrow k = \frac{7}{8\sqrt{2}}$$

$$\frac{21}{?} = \frac{7}{8\sqrt{2}} \rightarrow ? = \frac{8\sqrt{2} \times 21}{7} = 24\sqrt{2}$$





۳۲۵

در یک مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. اگر مساحت مثلث کوچک‌تر $\frac{1}{5}$

تجربی ۹۰ مشابه ۹۱

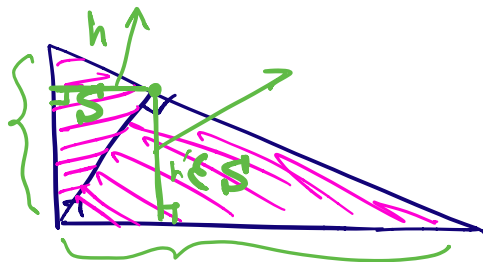
مساحت مثلث اصلی باشد، نسبت فواصل پای ارتفاع از دو ضلع قائم آن کدام است؟

$\frac{4}{5}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱) ✓



$$\frac{1}{5} = k^2 \rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

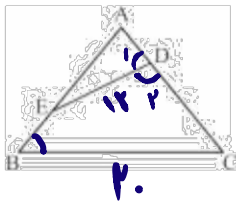
$$\frac{h}{h'} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$



۳۲۶

در چهار ضلعی BCDE، زاویه‌های روبه‌رو مکمل هم‌اند. اگر $BC = ۲۰$ و $DE = ۱۲$ باشد، آن‌گاه مساحت چهار ضلعی چند

تجربی ۸۷



برابر مساحت مثلث ABC است؟

۰/۶۴ (۲) ✓

۰/۵۶ (۱)

۰/۸۰ (۴)

۰/۷۲ (۳)

$$B + D_2 = 180^\circ$$

$$D_1 + D_2 = 180^\circ$$

$$B = D_1$$

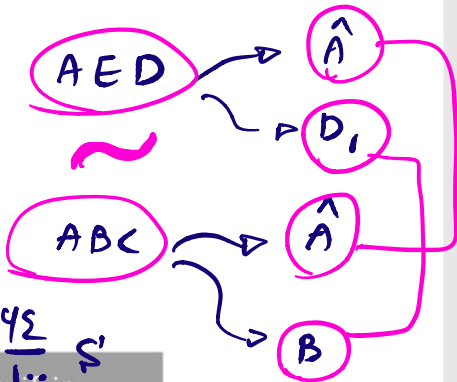
$$k^2 = \frac{9}{16}$$

$$\frac{12}{20} = k \rightarrow k = \frac{3}{5}$$

$$S_{ABC} = S$$

$$S_{AED} = \frac{9}{25} S$$

$$S_{EDPC} = S - \frac{9}{25} S = \frac{16}{25} S = \frac{48}{25} S$$





۳۲۷

دو مثلث متشابه را در یک زاویه بر هم منطبق می کنیم. مساحت دوزنقه حاصل با قاعده های ۵ و ۹ واحد برابر ۴۲ واحد

سنجش ۹۵

مربع است. مساحت مثلث بزرگتر کدام است؟

۵۶/۷۵ (۴)

۶۰/۷۵ (۳) ✓

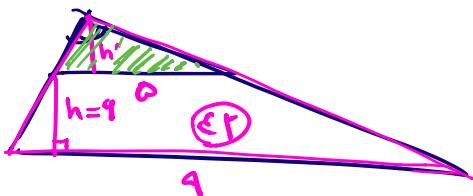
۷۶/۲۵ (۲)

۶۷/۲۵ (۱)

$$\frac{h'}{h'+4} = \frac{5}{9}$$

$$9h' = 5h' + 20$$

$$\rightarrow 4h' = 20 \rightarrow h' = 5$$



$$42 = \frac{(5+9) \times h}{2}$$

$$h = 4$$

$$h+h' = 2+5 = 7 \rightarrow S = \frac{7 \times 9}{2} = \frac{63}{2} = 31.5$$

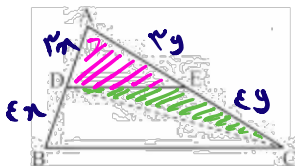
$$\frac{121.5}{2} = 60.75$$



۳۲۸

در شکل مقابل اگر $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{7}$ و $DE \parallel BC$ ، آنگاه مساحت مثلث ADE چند درصد مساحت مثلث DEC است؟

تجربی ۸۹



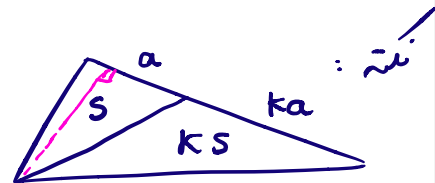
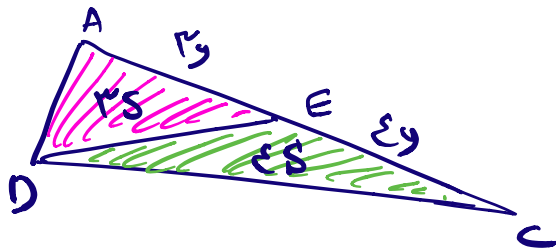
$$\frac{35}{45} = 0,75$$

۷۵ (۲) ✓

۸۴ (۴)

۷۰ (۱)

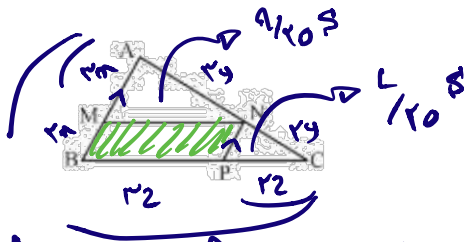
۷۸ (۳)





در شکل مقابل $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$ است. مساحت متوازی الاضلاع MNPB چند درصد مساحت مثلث ABC است؟ ریاضی ۹۵ - خارج ۹۰

۳۲۹



۴۰ (۲)

۳۶ (۱)

۴۸ (۴) ✓

۴۵ (۳)

$$\triangle AMN \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{2}{5} \rightarrow \frac{9}{10} S$$

$$\triangle PNC \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{3}{5} \rightarrow \frac{2}{10} S$$

مساحت کل S

$$S - \frac{9}{10} S - \frac{2}{10} S$$

$$= \frac{1}{10} S \times \frac{4}{2} = \frac{4}{10} S$$



دو مکعب مستطیل یکسان به طور کامل در یک مکعب به طول یال ۶ واحد جای گرفته‌اند. طول قطر هر یک از این دو

۳۳۰

مکعب مستطیل کدام است؟

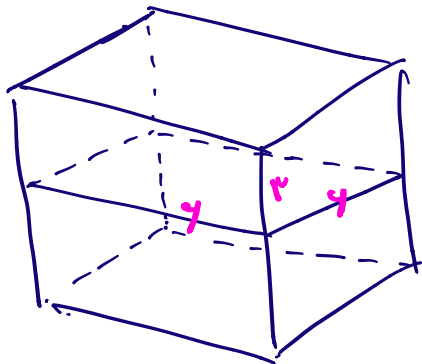
خارج ۸۶

۹ (۴ ✓)

۶√۲ (۳)

۳√۶ (۲)

۴√۳ (۱)



نکته: قطر مکعب مستطیل برابر با a, b, c

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{27 + 27 + 27} = \sqrt{81} = 9$$

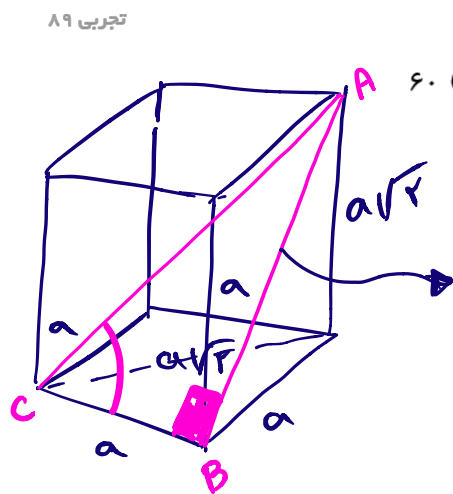


۳۳۱

قاعده یک مکعب مستطیل، به شکل مربع بوده و ارتفاع آن برابر قطر این مربع است. زاویه قطر مکعب مستطیل با یال

کوچکتر آن چند درجه است؟

تجربی ۸۹



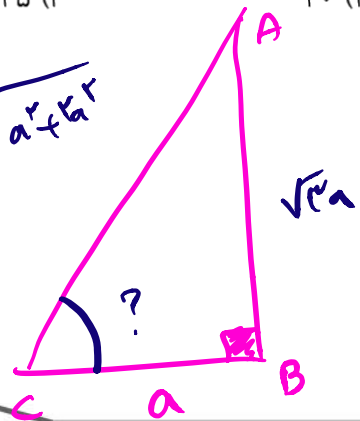
$$\sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2}$$

$$= \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a$$

۴۵ (۳)

۳۰ (۲)

۱۵ (۱)



$$\tan c = \frac{\sqrt{2}a}{a}$$

$$= \sqrt{2}$$

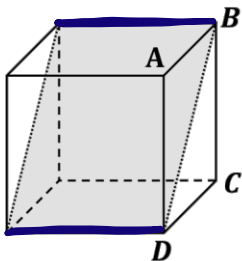
$c = 70^\circ$



تجربی ۸۷

در مکعب شکل مقابل، زاویه صفحه قطری سایه زده با صفحه وجه ABCD، چند درجه است؟

۳۳۲



۴۵ (۲)

۹۰ (۴) ✓

۳۰ (۱)

۶۰ (۳)



۳۳۳

قاعده یک منشور مایل مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۴ واحد است. طول یال‌های جانبی منشور ۶ واحد و زاویه یال‌ها با

تجربی ۹۱

صفحه قاعده ۶۰ درجه است. حجم این منشور کدام است؟

۳۶ (۴) ✓

۱۸√۳ (۳)

۲۴ (۲)

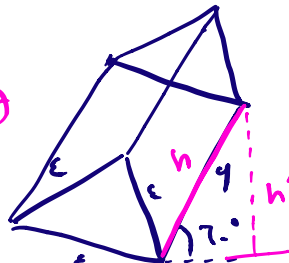
۱۲√۳ (۱)

یا کلاس: $V_{\text{منشور}} = S_{\text{قاعده}} \times h$

$V_{\text{منشور}} = S_{\text{قاعده}} \times (h')$ $= S_{\text{قاعده}} \times h \times \sin \theta$

ارتفاع منشور

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times (4)^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 24$



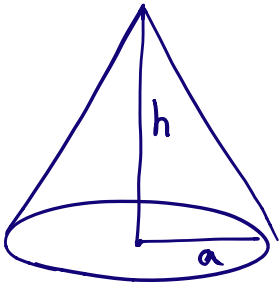


حجم یک هرم مربع القاعده به ضلع a و ارتفاع a ، برابر حجم یک مخروط به شعاع قاعده a است. طول ارتفاع مخروط کدام

۳۳۴

داخل ۸۶ و خارج ۸۴

است؟

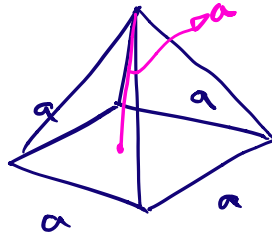


$$\frac{\pi}{\sqrt{a}} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\pi} \quad (۳)$$

$$\frac{\pi}{a} \quad (۲)$$

$$\frac{a}{\pi} \quad (۱) \checkmark$$



$$\cancel{\frac{1}{3}} \times \cancel{a} \times a = \cancel{\frac{1}{3}} \times \pi \cancel{a} \times h \rightarrow h = \frac{a}{\pi}$$

فرمول کلی:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{قاعده}} \times h$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h$$



تجربی ۸۸

در هرم مربعی منتظم روبه‌رو، $SA = \sqrt{۳۴}$ و $SH = ۵$. حجم این هرم کدام است؟

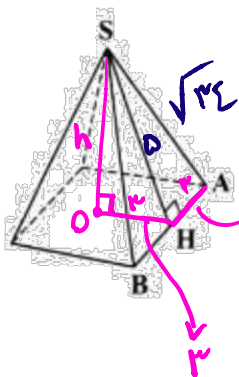
۳۳۵

۵۲ (۲)

۴۸ (۱) ✓

۵۶ (۴)

۵۴ (۳)



$$HA^2 + 5^2 = 34 \rightarrow HA^2 = 34 - 25 = 9 \rightarrow HA = 3$$

$$OH^2 + h^2 = 5^2 \rightarrow 3^2 + h^2 = 5^2 \rightarrow h^2 = 16$$

$$\rightarrow h = 4$$

$$V = \frac{1}{3} (2)^2 \times 4 = \frac{1}{3} \times 4 \times 4 = \frac{16}{3}$$



۳۳۶

یک دوزنقه قائم الزاویه به قاعده های ۲ و ۵ و ساق قائم ۳ واحد را حول ساق قائم دوران می دهیم. حجم جسم حاصل، کدام

است؟

ریاضی ۹۵

۴۰π (۴)

۳۹π (۳) ✓

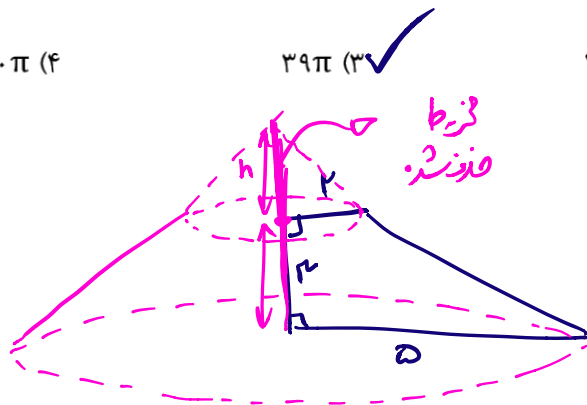
۳۸π (۲)

۳۶π (۱)

$$\frac{h}{h+3} = \frac{2}{5}$$

$$5h = 2h + 6 \rightarrow 3h = 6$$

$$h = 2$$



$$\frac{3}{27} \frac{117}{9} = \frac{117}{27} = \frac{13}{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi (5)^2 (3) - \frac{1}{3} \pi (2)^2 (3) = \frac{1}{3} \pi (75 - 12) = \frac{1}{3} \pi \times 63 = 21\pi$$



کتاب درسی

اگر مساحت کل یک چہاروجہی منتظم $9\sqrt{3}$ باشد، حجم آن کدام است؟

۳۳۷

$$\frac{4\sqrt{3}}{9} (4)$$

$$\frac{9\sqrt{2}}{4} (3) \checkmark$$

$$\frac{9\sqrt{2}}{4} (2)$$

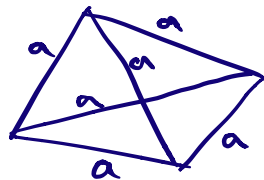
$$\frac{4\sqrt{2}}{9} (1)$$

$$\sqrt{3} a^2 = 9\sqrt{3} \rightarrow a = 3$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$S = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} a^2$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{12} a^3$$



بار بارہ:



مخروطی به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۶ واحد را با صفحه‌ای موازی صفحه قاعده و به فاصله ۴ واحد از آن، قطع می‌دهیم حجم

۳۳۸

تجربی ۸۸

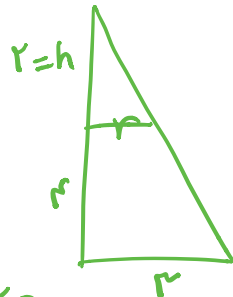
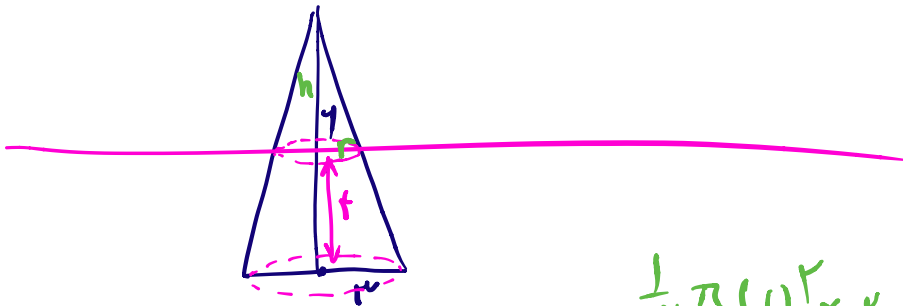
مخروط جدا شده کدام است؟

$2\pi (4)$

$\frac{4\pi}{3} (3)$

$\pi (2)$

$\frac{2\pi}{3} (1)$ ✓



$\frac{r}{9} = \frac{y}{3}$

$\rightarrow r = 1$

$\frac{1}{3}\pi (1)^2 \times 2 = \frac{2\pi}{3}$



مکعبی به طول یال ۲ واحد، در داخل کوچک ترین کره ممکن جای گرفته است، مساحت این کره کدام است؟

۳۳۹

تجربی ۹۳ مشابه تجربی ۹۱

۱۸π (۴)

۱۲π (۳) ✓

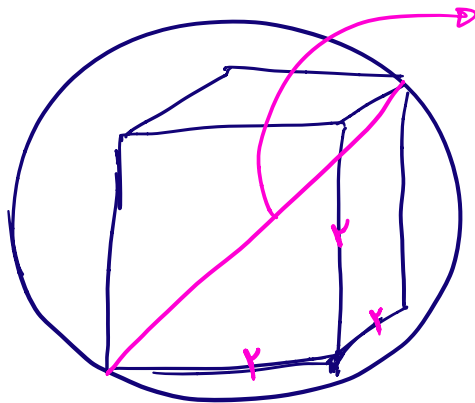
۹π (۲)

۸π (۱)

مساحت کره

$$S = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$



$$\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3} = 2R \rightarrow R = \sqrt{3}$$

$$4\pi R^2 = 4\pi (3) = 12\pi$$



کره‌ای از تمام رأس‌های یک مکعب مستطیل به ابعاد ۵ و ۶ و $۲\sqrt{۵}$ گذشته است. سطح این کره چند برابر π است؟

۳۴۰

تجربی ۹۰

۱۳۶ (۴)

۱۴۴ (۳)

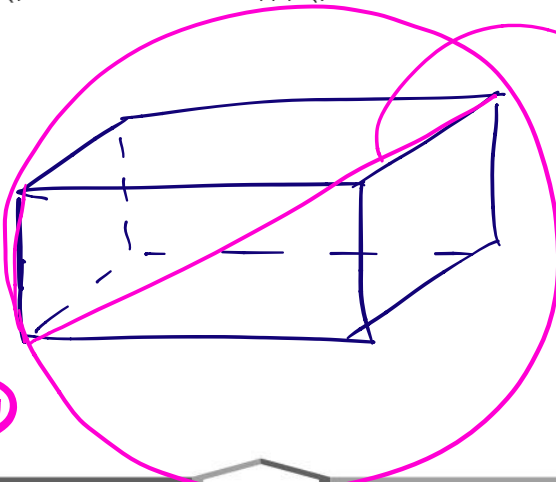
۸۱ (۲) ✓

۶۴ (۱)

$$\frac{S}{R} = \frac{\sum r^2}{R}$$

$$= \sum r^2 = \sum \left(\frac{9}{r}\right)^2$$

$$= \cancel{r} \times \frac{81}{\cancel{r}} = 81$$



$$\sqrt{5^2 + 2^2 + (2\sqrt{5})^2}$$

$$\sqrt{\cancel{25} + \cancel{4} + 20}$$

$$\sqrt{29} = 9$$

$$9 = 2r \rightarrow r = \frac{9}{2}$$



یک مخروط قائم به شعاع قاعده ۶ در کره‌ای به قطر ۲۰ محاط شده است. حجم مخروط کدام است؟

۳۴۱

۲۲۵π (۴)

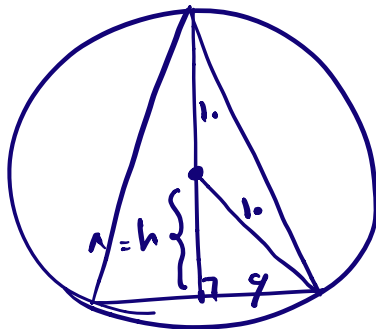
۲۱۶π (۳) ✓

۱۹۶π (۲)

۱۴۴π (۱)

$$\frac{1}{3} \pi (9)^2 \times (12)$$

$$= 216\pi$$



$$h^2 + 9^2 = 10^2$$

$$\rightarrow h = 8$$



۳۴۲

در داخل نیم کره به شعاع ۹ واحد، استوانه‌ای به ارتفاع ۶ واحد جای گرفته است. بیشترین حجم ممکن این استوانه، کدام است؟

تجربی ۹۴

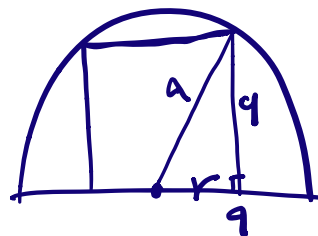
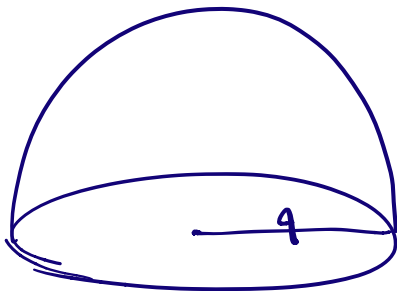
$270 \cdot \pi$ (۴) ✓

$240 \cdot \pi$ (۳)

$210 \cdot \pi$ (۲)

$180 \cdot \pi$ (۱)

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 \times h \\ &= \pi \times 25 \times 6 \\ &= \pi (25 \cdot 6) \\ &= 270 \cdot \pi \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} r^2 + 6^2 &= 9^2 \\ r^2 &= 81 - 36 = 45 \end{aligned}$$



۳۴۳

طول و عرض یک مستطیل به صورت $2 + E_1$ و $3 + E_2$ اندازه گیری شده اند. اگر مدل مساحت مستطیل به صورت $E + 6$ باشد، آنگاه E کدام است؟

خطا سمت

$$2E_1 + E_2^2 \quad (4)$$

$$2E_2 + 3E_1 \quad (3)$$

$$2E_1 + 3E_2 \quad (2)$$

$$E_1 + E_2 \quad (1)$$

$$(2 + E_1)(3 + E_2) = 6 + \underbrace{2E_2 + 3E_1}_{2E_2 + 3E_1} + \cancel{E_1E_2}$$

مساحت بدون خطا



تجربی ۹۱

جمع آوری داده به کدام طریق مورد قبول نیست؟

۳۴۴

۴) مشاهده ✓

۳) انجام آزمایش ✓

۲) پرسش هدایت کننده ✓

۱) مصاحبه ✓



دامنه تغییرات داده‌های مثبت a و 10 و 8 و 4 و 7 برابر 11 می‌باشد. با قرار دادن کدام اعداد زیر بین داده‌ها، دامنه تغییرات

۳۴۵

۱ واحد افزایش می‌یابد؟

۵، ۱۰، ۱۵ (۴)

۳، ۴، ۳ (۳) ✓

۸، ۷، ۱۱ (۲)

~~۱۵، ۱۶، ۱۷ (۱)~~

۳، ۳، ۴، ۴، ۷، ۸، ۱۰، ۱۵

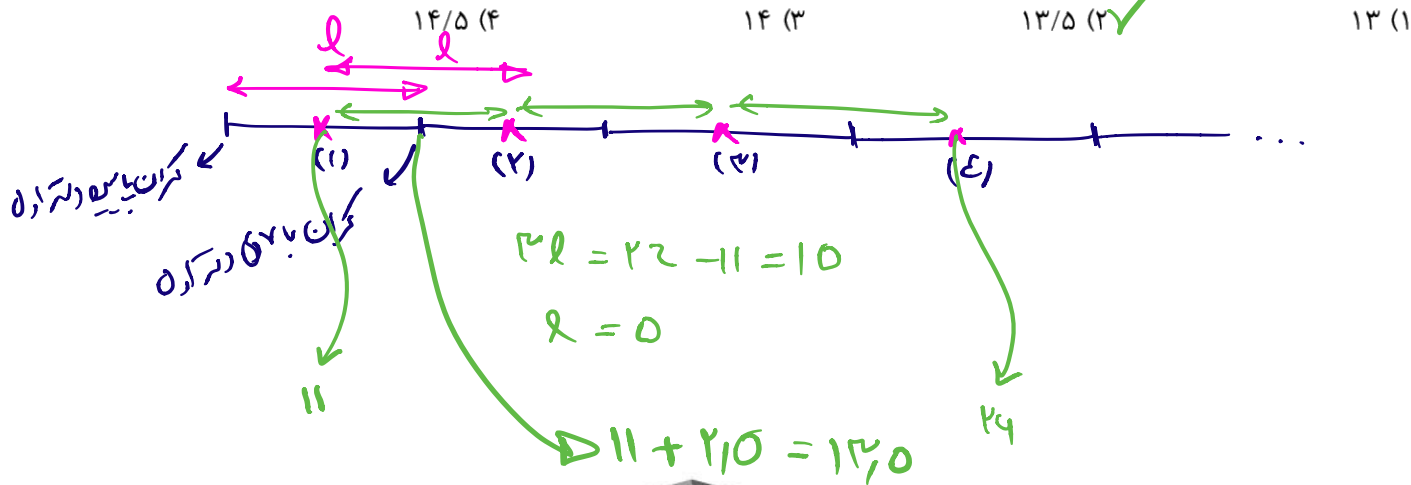
$$10 - 3 = 12$$

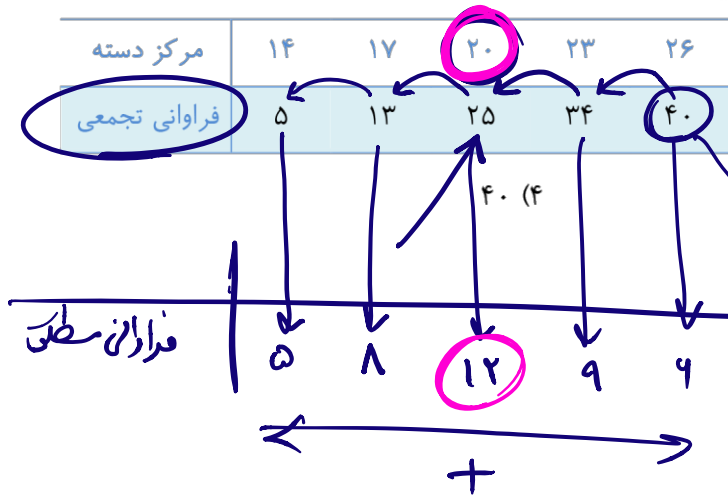
۱۱
↓
۱۲ ✓



اگر مراکز دسته‌های اول و چهارم به ترتیب برابر ۱۱ و ۲۶ باشد، آن گاه کران پایین دسته دوم کدام خواهد بود؟

۳۴۶





داده‌های جدول مقابل، داده‌های آماری پیوسته است. چند درصد از داده‌ها، در فاصله $[18/5, 21/5)$ قرار دارند؟

۳۴۷

تجربی ۸۸

۳۰ (۳)

۲۵ (۲)

۲۰ (۱)

$$\frac{18/5 + 21/5}{2} = 20$$

$n = 4$

$$\frac{12}{40} \times 100 = 30$$



۳۴۸

در داده‌های دسته‌بندی شده با متغیر پیوسته، اگر S مساحت نمودار مستطیلی و S' مساحت سطح زیر چند بر فراوانی آن با توجه به دو دسته فرضی باشد، این دو مساحت چگونه‌اند؟

خارج ۹۴

(۴) اظهار نظر نمی‌توان کرد.

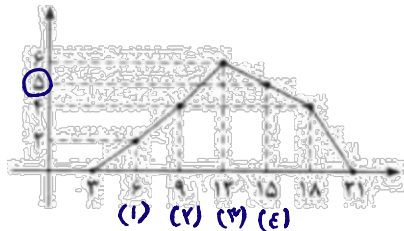
(۳) $S < S'$

(۲) $S > S'$

(۱) $S = S'$ ✓

نکته: مساحت زیر نمودار مستطیلی = مساحت زیر نمودار چندبر فراوانی

سته کتاب درسی



در نمودار چندبر فراوانی مقابل، فراوانی نسبی دسته چهارم کدام است؟

۳۴۹

$$f_{\varepsilon} = 5$$

$$\frac{4}{7} (2)$$

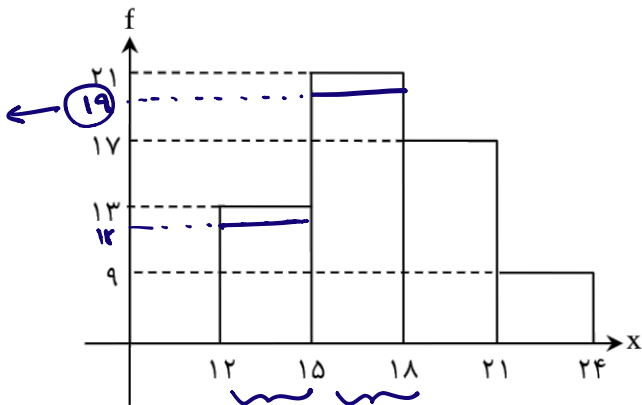
$$\frac{5}{7} (1)$$

$$\frac{5}{21} (4) \checkmark$$

$$\frac{2}{7} (3)$$

$$n = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 21$$

$$\frac{5}{21}$$



از داده‌های آماری با نمودار مستطیلی مقابل، سه داده ۱۴ و ۱۶ و ۱۶ حذف شده است. در نمودار دایره‌ای داده‌های جدید، بزرگ‌ترین زاویه مرکزی نظیر دسته‌ها، چند درجه است؟

۳۵۰

تجربی ۹۴

۱۰۵ (۲)

۹۰ (۱)

۱۳۵ (۴)

۱۲۰ (۳) ✓

$$\frac{19}{57} \times 360^\circ = 120^\circ$$

$$\frac{9 + 12 + 17 + 21}{21 + 39 + 7} = 57$$



۳۵۱

حداقل چند داده بزرگتر از ۳۰ باید به داده های نمودار زیر

اضافه کنیم تا چارک اول $16/5$ باشد؟ = ۴ ۲ : کلید نمودار

۲۴

۵ (۲)

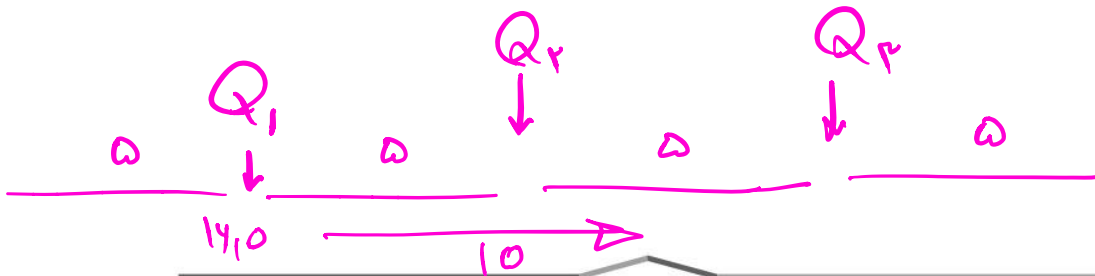
۴ (۱)

۷ (۴)

۶ (۳) ✓

ساقه	۵
۱	۱ ۲ ۲ ۳ ۶ ۷ ۹
۲	۴ ۵ ۸
۳	۲ ۶ ۷ ۹

$Q_1 = 14/5$



4

100



ساقه	برگ	
۳	۸ ۸ ۹	✓
۴	۰ ۰ ۴ ۵ ۵ ۶	۶
۵	۲	۵

در داده‌های آماری با نمودار ساقه و برگ، داده‌های کمتر از چارک اول و بیشتر از چارک سوم را حذف می‌کنیم. میانگین داده‌های باقیمانده کدام است؟

ریاضی ۸۷

۳۵۲

۴۲/۹ (۲)

۴۲/۷ (۱) ✓

۴۳/۴ (۴)

۴۳/۲ (۳)

۱۸

۴۲۷ | ۱۰

۴۲۷

۳۸, ۳۸, ۳۹, ۴۰, ۴۰, ۴۴, ۴۵, ۴۵, ۴۶, ۴۷, ۵۲

۹ + ۲۵ = ۳۴

۳۴ + ۲ + ۵۲ = ۸۸

۸۸ / ۴ = ۲۲

۲۱۲
۱۱۰

۳۲۲



حدود دسته	۱-۵	۵-۹	۹-۱۳	۱۳-۱۷
فراوانی	۴	۵	A	۳

تجربی ۸۹

در جدول فراوانی داده‌های دسته‌بندی شده زیر اگر به تمام داده‌ها $1/5$ واحد اضافه شود، میانگین داده‌های جدید برابر ۱۰ می‌شود. فراوانی

۳۵۴

دسته سوم کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۸/۱۰

۴ (۲)

۳ (۱)

$$3 \times 1 + 5 \times 5 + 11A + 3 \times 10 = 10$$

$$12 + A = 10 - 10$$

$$12 + 10 + 11A + 10 = 10 - 10 + 10A$$

$$\bar{x} = a\bar{X} + b$$

$$2,5A = 10 \rightarrow A = 4$$



۳۵۵

نمره کل آزمون عمومی یک داوطلب مطابق جدول زیر ۵۸ درصد

است. نمره آزمون زبان انگلیسی او چند است؟

تجربی ۸۱

درس	ادبیات	عربی	معارف اسلامی	زبان انگلیسی
درصد	۶۵	۵۲	۷۰	؟
نمره				
ضریب	۴	۲	۳	۲

۳۱ (۱)

۳۳ (۳)

$$\cancel{24.} \times 70 + \cancel{1.4} \times 52 + \cancel{21.} \times 70 + 2x = 58$$

$$\cancel{22.} + \cancel{1.4} + \cancel{21.} + 2x = 11 \times 58$$

$$\cancel{57.4} + 2x = \cancel{58.} + 58$$

$$x = 3 + 29 = 32$$



۳۵۶

میانگین ۵۰ داده دسته بندی شده زیر را روش سریع

کدام است؟

x	۱۱۰	۱۱۶	۱۲۲	۱۲۸	۱۳۴
f	۵	۸	۱۵	۱۲	۱۰

تجربی ۹۱

۱۹۲

$$\cancel{5 \times (-12)} + \cancel{8 \times (-6)} + \cancel{15 \times 0} + \cancel{12 \times 6} + \cancel{10 \times 12}$$

۱۲۴/۰۶ (۲)

۱۲۳/۶۲ (۱)

۱۲۳/۶۸ (۴) ✓

۱۲۴/۰۲ (۳)

$$\frac{12}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{128}{100} = 1,28$$

۱۲۲ = ۱۲۳,۲۸



۳۵۷

اگر میانگین اعداد $a+3$ ، $a+2$ ، $a-1$ و $a-4$ برابر ۵ باشد، واریانس آن ها کدام است؟

۸/۵ (۴)

۸ (۳)

۷/۵ (۲) ✓

۷ (۱)

$$1, 4, 7, 8 \rightarrow \bar{x} = 5$$

$$\frac{a-4 + a-1 + a+2 + a+3}{4} = 5$$

$$s^2 = \frac{(1-5)^2 + (4-5)^2 + (7-5)^2 + (8-5)^2}{4}$$

$$\frac{4a + 0}{4} = 5$$

$$= \frac{12}{4} = 3$$

$$a = 5$$



هرگاه مجموع مربعات ۱۰ داده آماری ۲۰۰ و مجموع این ۱۰ داده برابر ۴۰ باشد، واریانس این ۱۰ داده کدام است؟

۳۵۸

۱۶ (۴)

۸ (۳)

۴ (۲) ✓

۲ (۱)

$$n = 10$$

$$\sum x_i = 40$$

$$\bar{x} = \frac{40}{10} = 4$$

$$s^2 = \frac{200}{10} - 14 = 20 - 14 = 6$$

فرمول واریانس

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$



اگر بین X و Y رابطه $Y = 2X - 1$ برقرار باشد و واریانس X برابر ۸ باشد، آنگاه واریانس Y کدام است؟

۳۵۹

۸ (۴)

۱ (۳)

۱۶ (۲)

۳۲ (۱) ✓

$$1 \times 8 = 32$$

$$x \rightsquigarrow ax + b$$

$$\sigma^2 \rightsquigarrow a^2 \sigma^2$$

$$\sigma \rightsquigarrow |a| \sigma$$

نکته ✓



مجموع مربعات ۱۰ داده آماری برابر $96/4$ و میانگین آن ها ۳ می باشد. انحراف معیار این ۱۰ داده کدام است؟

۳۶۰

۰/۴ (۴)

۰/۱۶ (۳)

۰/۸ (۲) ✓

۰/۶۴ (۱)

$$s^2 = \frac{96,4}{10} - 3^2$$

$$= 9,64 - 9 = 0,64$$

$$s = \sqrt{0,64} = 0,8$$



۳۶۱

میانگین و انحراف معیار ۱۸ داده آماری به ترتیب ۲۵ و ۳ می باشد. اگر داده های ۲۰، ۲۷ و ۲۸ به آنان افزوده شود، واریانس

خرج ۹۳

۲۱ داده جدید کدام است؟

۹/۶۳ (۴)

۹/۵۲ (۳) ✓

۹/۳۶ (۲)

۹/۲۵ (۱)

$$\frac{28 + 27 + 20}{3} = 25$$

$$\begin{aligned} n &= 18 \\ \bar{x} &= 25 \\ \sigma &= 3 \end{aligned}$$

$$9 = \sigma^2 = \frac{(x_1 - 25)^2 + (x_2 - 25)^2 + \dots + (x_{18} - 25)^2}{18}$$

$$\frac{9 \cdot 18 + 28^2}{18} = \frac{162 + 784}{18} = \frac{946}{18} = \frac{473}{9}$$

$$\sigma^2 = \frac{9 \cdot 18 + (20 - 25)^2 + (27 - 25)^2 + (28 - 25)^2}{21} = \frac{162 + 25 + 4 + 9}{21} = \frac{200}{21}$$



۳۶۲

در ۵۰ داده آماری مجموع تمام داده‌ها برابر ۱۰۰ و مجموع مجذورات این داده‌ها برابر ۲۷۲ می‌باشد، ضریب تغییرات کدام است؟

۰/۳ (۱) ۰/۴ (۲) ۰/۵ (۳) ۰/۶ (۴) ✓

بارداری :

$$\sigma^2 = \frac{272}{50} - 2^2 = 0,44 - 4 = -3,56$$

↓ ۳۳

$$\frac{272}{50} \times \frac{2}{2} = \frac{544}{100} = 0,544$$

$$\sigma^2 = 1,44 \rightarrow \sigma = 1,2 \rightarrow CV = \frac{1,2}{2} = 0,6$$

CV = $\frac{\sigma}{\bar{x}}$

$n = 50$

$$\bar{x} = \frac{100}{50} = 2$$

مجموع مجذورات = ۲۷۲



۳۶۳

میانگین اضلاع مربع هایی برابر ۸ و میانگین مساحت آن ها ۶۵/۴۴ می باشد. ضریب تغییرات در طول اضلاع این مربع ها، کدام

خارج ۹۴

است؟

۰/۲۵ (۴)

۰/۲ (۳)

۰/۱۵ (۲) ✓

۰/۱۲ (۱)

$$\bar{x} = 8$$

مجموع کمزورات

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

$$\sigma^2 = \frac{\text{مجموع کمزورات}}{n} - \bar{x}^2$$

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}{n} = 70,44$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1,5}{8} = 0,1875 = 18,75\%$$

$$\sigma = 1,5$$



۳۶۴

ریاضی ۹۳

A: ۱۵, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۹

نمرات آزمون مهارت فنی دو کارگر A و B به صورت زیر است:

B: ۱۶, ۱۴, ۱۷, ۱۴, ۱۷, ۱۸

دقت عمل کدام بیشتر است؟

یکسان (۳)

B (۲۷)

A (۱)

(۴) غیرپیش بینی

$$A: \bar{x} = \frac{10 + 12 + 10 + 14 + 17 + 19}{6} = 14$$

$$s^2 = \frac{(10-14)^2 + (12-14)^2 + \dots + (19-14)^2}{6} = \frac{16 + 4 + \dots + 25}{6}$$

$= \frac{14}{6} \rightarrow$

$$B: \bar{x} = \frac{14 + 12 + 17 + 12 + 17 + 18}{6} = 14$$

$$s^2 = \frac{0 + 4 + 1 + 4 + 1 + 4}{6} = \frac{14}{6}$$

نتیجه: B (۲۷)



در منحنی نرمال تقریباً چند درصد از افراد جامعه در فاصله ای به مرکز میانگین و به شعاع ۳ برابر انحراف معیار قرار

۳۶۵

سنجش ۹۵

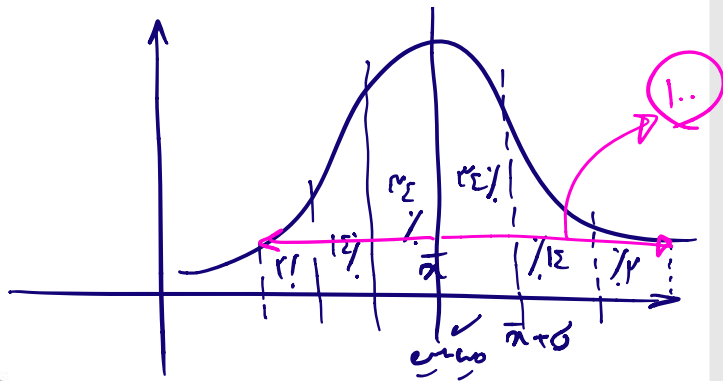
دارند؟

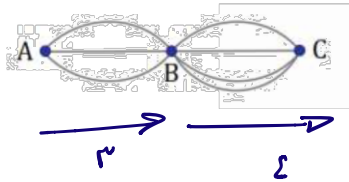
۱۰۰ (۴) ✓

۹۶ (۳)

۸۴ (۲)

۶۸ (۱)





مطابق شکل بین شهرهای A و B، ۳ مسیر و بین شهرهای B و C، ۴ مسیر مختلف

۳۶۶

وجود دارد. به چند طریق می‌توانیم از A به C برویم و به A بازگردیم؟

۴۸ (۴)

۱۴۴ (۳) ✓

۷۲ (۲)

۱۶ (۱)



$$3 \times 4 = 12$$



۱۲

$$12 \times 12 = 144$$

اصولاً ضد : از A به B، ۳ طریق، از B به A، ۴ طریق
تین انجام بدست کثیر و در ۱۴۴ به
طریق تین انجام دهند.



در تست قبل به چند طریق می‌توانیم از A به C برویم و دوباره به A بازگردیم به طوری که از هر مسیر بیش از یک بار عبور نکنیم؟

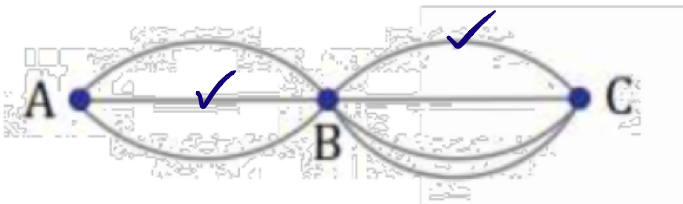
۳۶۷

۹۶ (۴)

۴۸ (۳)

۱۴۴ (۲)

۷۲ (۱) ✓



$$12 \times 6 = 72$$



$$3 \times 4 = 12$$



$$4 = 2 \quad \times \quad 2$$



اگر $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 72$ باشد، مقدار n کدام است؟

۳۶۸

-۹ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲) ✓

۷ (۱)

$$(n+1)! = \cancel{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1)} \times (n)(n+1)$$

$$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = n!$$

$$(n-1)! = \cancel{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1)}$$

$$n(n+1) = 72 \Rightarrow n^2 + n - 72 = 0 \Rightarrow (n+9)(n-8) = 0$$

$$n = -9 \quad \times$$

$$n = 8 \quad \checkmark$$



به چند طریق می‌توان حروف کلمه SALAMATI را کنار هم قرار داد به طوری که حروف یکسان کنار هم باشند؟

۳۶۹

۱۲۰ (۴)

۷۲۰ (۳) ✓

۳۶۰ (۲)

۴۸۰ (۱)

AAA SLMTI

۳!

جایگاه: ۳ مرتبه‌ای! با صَبَدِ خطی دارد
abcd ~ ۴!



با حروف a و b و c و d و e چند کلمه ۵ حرفی می توان ساخت که a و b کنار هم نباشند؟

۳۷۰

۷۲ (۴) ✓

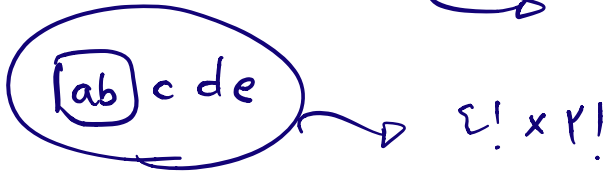
۶۸ (۳)

۶۲ (۲)

۵۴ (۱)

$$5! - 2! \times 4! = 120 - 48 = 72$$

اصول مستقیم





با ارقام ۷، ۷، ۰، ۶ و ۶ چند عدد پنج رقمی فرد می توان نوشت؟

۳۷۱

۲۴ (۴)

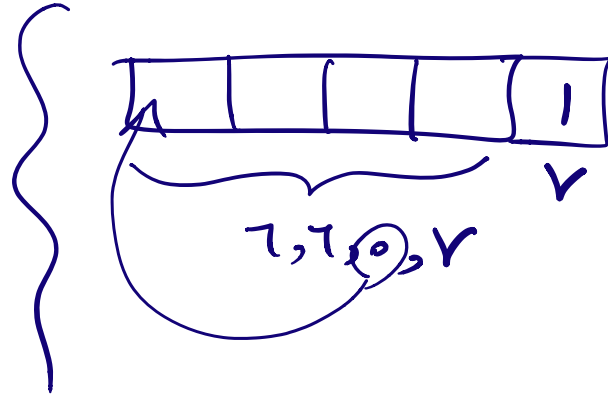
۱۲ (۳)

۹ (۲) ✓

۶ (۱)

در نهایت صندلی‌ها - ۲۴ و ۱۲

$$\frac{24}{2!} - \frac{12}{2!} = 12 - 6 = 6$$





۳۷۲

به چند طریق می توان ۶ کلید متمایز را در یک جا کلیدی مدور جا داد؟

۷۲۰ (۱)

۳۶۰ (۲)

۱۲۰ (۳)

۶۰ (۴) ✓

$$\frac{(n-1)!}{2} = \frac{5!}{2} = 60$$

بازگردد به دوره n و $(n-1)!$ به دوره n و $(n-1)!$ به دوره n

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

به دوره n و $(n-1)!$ به دوره n و $(n-1)!$ به دوره n



۳۷۳

از هر یک از مدارس A , B , C , D و E ، چهار نفر به اردوگاه دانش آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان سه

تجربی ۹۲

دانش آموز که دو به دو غیر هم مدرسه ی باشند، انتخاب کرد؟

۶۴۰ (۴) ✓

۴۸۰ (۳)

۳۲۰ (۲)

۱۶۰ (۱)

$$\binom{5}{4} \times \binom{4}{3} \times \binom{3}{2} \times \binom{2}{1}$$

A D E

$$= 1 \times 4 \times 3 \times 2 = 24$$

انتخاب سه نفر

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$



به چند طریق می‌توان از میان ۵ پسر و ۴ دختر، ۵ نفر انتخاب کرد که در بین آن‌ها حداقل ۳ پسر باشند؟

۳۷۴

۸۱ (۴۷)

۲۱ (۳)

۶۱ (۲)

۶۰ (۱)

$\begin{matrix} ۳ \\ ۳ \\ ۲ \end{matrix}$ $\begin{matrix} ۳ \\ ۳ \\ ۲ \end{matrix}$ $\begin{matrix} ۳ \\ ۳ \\ ۲ \end{matrix}$ $\begin{matrix} ۳ \\ ۳ \\ ۲ \end{matrix}$ $\begin{matrix} ۳ \\ ۳ \\ ۲ \end{matrix}$ $\begin{matrix} ۳ \\ ۳ \\ ۲ \end{matrix}$

$$\binom{5}{3} \binom{4}{2} + \binom{5}{4} \binom{4}{1} + \binom{5}{5}$$

$$1 \cdot 6 + 0 \cdot 4 + 1 = 6 + 0 + 1 = 7$$



به چند طریق می توان ۳ پسر و ۴ دختر را در یک صف قرار داد به طوری که هیچ دو پسری کنار هم نباشند؟

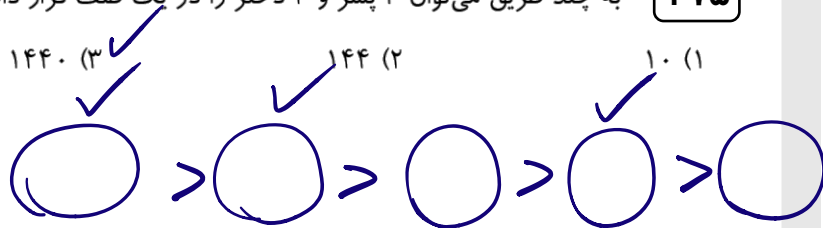
۳۷۵

۲۸۸ (۴)

۱۴۴۰ (۳)

۱۴۴ (۲)

۱۰ (۱)



$$3! \times \binom{5}{3} \times 3!$$

$$= 6 \times 10 \times 6 = 360$$



آزاد ۸۹

چند عدد سه رقمی با ارقام ۱، ۱، ۲، ۲، ۳، ۳ می توان نوشت؟

۳۷۷

۲۴ (۱)

۳۰ (۴)

۱۸ (۳)

۱۲ (۲)

$$\Delta \square \square \rightarrow \xrightarrow{۱, ۲, ۳} ۳! = ۶$$

$$\underline{\Delta \Delta \Delta} \rightarrow \binom{۳}{۱} \binom{۲}{۱} \times \frac{۳!}{۲!} = ۲ \times ۲ \times ۳ = ۱۸$$

$$۱۸ + ۶ = ۲۴$$



تعداد جایگشت‌های سه حرفی، از حروف کلمه SERESHT کدام است؟

۳۷۸

۹۶ (۴)

۸۴ (۳) ✓

۷۲ (۲)

۶۰ (۱)

S S E E R H T

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \square \circ \longrightarrow \\ \Delta \Delta \circ \longrightarrow \end{array} \right\} \begin{array}{l} \binom{5}{3} \times 3! = \frac{5!}{\cancel{3!} 2!} \times \cancel{2!} = 6 \\ \binom{2}{1} \binom{4}{1} \times \frac{3!}{2!} = 2 \times 2 \times 3 = 12 \end{array}$$



تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر عدد اول بیاید ۲ سکه و در غیراینصورت یک تاس را پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟

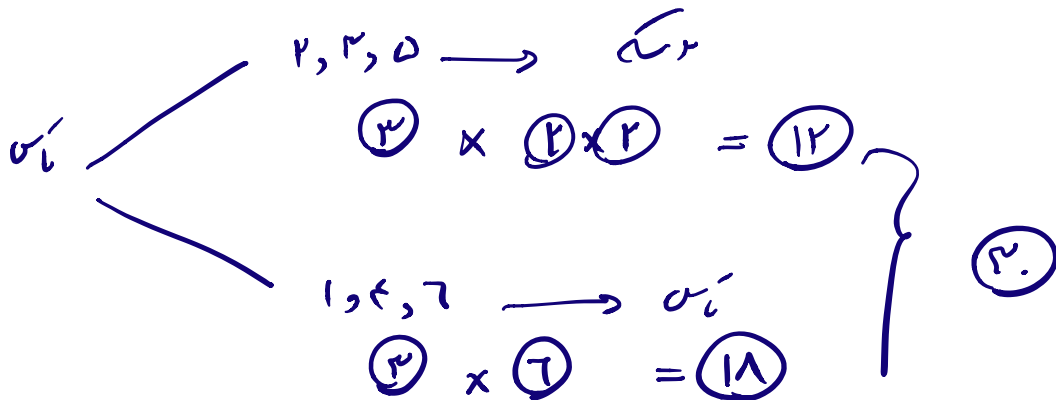
۳۷۹

۳۶ (۴)

۳۲ (۳)

۳۰ (۲) ✓

۲۸ (۱)





از بین اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ به تصادف ۳ عدد انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه مجموع سه عدد فرد باشد کدام است؟

۳۸۰

$$\frac{\binom{4}{2} + \binom{3}{2} \binom{4}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{6 + 3 \times 4}{21} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$$

$\frac{2}{5} (4)$ $\frac{16}{25} (3)$ ✓ $\frac{4}{9} (2)$ $\frac{2}{7} (1)$

$\frac{4 \times 3 \times 2}{2 \times 1} = 6$
 $\frac{3 \times 2 \times 4}{2 \times 1} = 12$
 $\frac{6 + 12}{21} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$



۳۸۱

در جعبه‌ای ۳ مهره سفید ۲ مهره سیاه ۵ مهره قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم، با کدام احتمال این دو مهره

هم‌رنگ نیستند؟

تجربی ۹۴

$$1 - \frac{\binom{22}{2} + \binom{31}{2} + \binom{5}{2}}{\binom{45}{2}} = 1 - \frac{1 + 3 + 1}{45}$$

قوانین احتمال

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$= 1 - \frac{14}{45} = \frac{31}{45}$$



در ظرفی ۳ مهره سفید و X مهره سیاه وجود دارد. ۲ مهره از ظرف خارج می‌کنیم اگر احتمال سیاه بودن هر دو مهره $\frac{5}{14}$ باشد، X کدام است؟

۳۸۲

$$\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+3}{2}} = \frac{5}{14} \rightarrow \frac{n(n-1)}{(n+3)(n+2)} = \frac{5}{14}$$

$$14n^2 - 14n = 5n^2 + 10n + 6 \rightarrow 9n^2 - 24n - 6 = 0$$

$$3n^2 - 12n - 2 = 0 \rightarrow \Delta = 144 - 4(3)(-2) = 216$$

$$n = \frac{12 \pm \sqrt{216}}{6} = \frac{12 \pm 6\sqrt{6}}{6} = 2 \pm \sqrt{6}$$

$$n = 2 + \sqrt{6} \approx 4.45$$

$$n = 2 - \sqrt{6} \approx -0.45$$

Since n must be a positive integer, $n = 4$.



حروف کلمه ATAXIA را بریده و به طور تصادفی کنار هم قرار می دهیم. با کدام احتمال هر سه حرف A کنار هم قرار

۳۸۳

تجرب ۸۹

می گیرند؟

$$\frac{1}{3} (4)$$

$$\frac{1}{4} (3)$$

$$\frac{1}{5} (2) \checkmark$$

$$\frac{1}{6} (1)$$

AAAX T I



$$\frac{2!}{6!} = \frac{2! \times \cancel{4!}}{6!} = \frac{2!}{5 \times 4!} = \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{5}$$



پدر و مادر و چهار فرزندشان به طور تصادفی یک صف می‌نشینند. چقدر احتمال دارد دقیقاً یک نفر بین پدر و مادر نشسته باشد؟

۳۸۴

$\frac{4}{15}$ (۴) ✓

$\frac{2}{15}$ (۳)

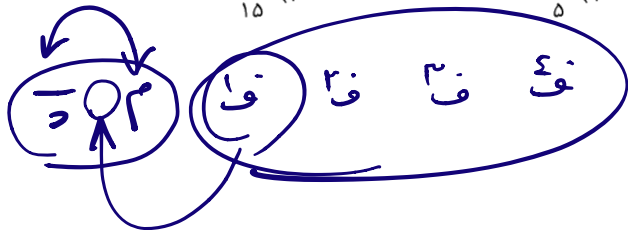
$\frac{1}{15}$ (۲)

$\frac{1}{5}$ (۱)

$$\frac{\binom{4}{1} \times \cancel{2!} \times \cancel{2!}}{\cancel{4!}}$$

$\cancel{1!} \times \cancel{4} \times \cancel{3}$

$\frac{2}{15}$



$\binom{4}{1}$



۳۸۵

کتاب درسی

خانواده‌ای دارای سه فرزند است. چقدر احتمال دارد هر سه فرزند آنان در یک فصل از سال متولد شده باشند؟

$$\frac{1}{27} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{16} \quad (۳) \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{81} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{64} \quad (۱)$$

$$\frac{\Sigma \times 1 \times 1}{\Sigma \times \Sigma \times \Sigma} = \frac{1}{16}$$



احتمال آنکه وحید در درس ریاضی بیست بگیرد $\frac{1}{4}$ و احتمال وحید در درس فیزیک بیست بگیرد $\frac{1}{5}$ است. اگر احتمال

۳۸۶

اینکه هر دو درس را بیست شود $\frac{1}{10}$ باشد احتمال آنکه حداقل در یکی از این دو درس بیست بگیرد کدام است؟

$$\frac{2}{5} \text{ (۴)}$$

$$\frac{23}{60} \text{ (۳) ✓}$$

$$\frac{1}{4} \text{ (۲)}$$

$$\frac{2}{5} \text{ (۱)}$$

$$P(R) = \frac{1}{4} \quad P(F) = \frac{1}{5}$$

$$P(R \cap F) = \frac{1}{10}$$

$$P(R \cup F) = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10}$$

$$= \frac{10 + 12 - 4}{40} = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$$

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Δ



اگر $P(A' \cap B') = \frac{1}{8}$ و $P(A') = \frac{5}{8}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ باشد، $P(B)$ کدام است؟

۳۸۸

$\frac{1}{2}$ (۱)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{2}{4}$ (۳) ✓

$\frac{2}{3}$ (۴)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{5}{8} = \frac{3}{8} + P(B) - \frac{1}{8}$$

$$\frac{5}{8} - \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = P(B)$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(A) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = \frac{1}{8}$$

$$P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$



در پرتاب ۲ تاس با هم احتمال آنکه حاصلضرب اعداد ظاهر شده مضرب ۳ باشد کدام است؟

۳۸۹

$$\frac{7}{9} (۴)$$

$$\frac{7}{9} (۳)$$

$$\frac{4}{9} (۲)$$

$$\frac{5}{9} (۱) \checkmark$$

صداقتی از آنرا مضرب سه باشد

$$1 - p$$

$$1 - \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} = 1 - \left(\frac{2}{4}\right)^2 = 1 - \frac{4}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

بیت مستقل A, B

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$



۳۹۰

تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم. پیشامدهای A و B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. کدام گزینه در مورد A و B صحیح است؟

B: عدد رو شده در پرتاب اول ۴ باشد.

A: مجموع اعداد رو شده در دو پرتاب ۷ باشد.

(۱) ناسازگار و مستقل اند. (۲) سازگار و مستقل اند.

(۳) ناسازگار هستند و مستقل نیستند. (۴) سازگار هستند و مستقل نیستند.

$$A: (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3) \rightarrow P(A) = \frac{7}{36} = \frac{1}{6}$$

$$B: (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6) \rightarrow P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{6}$$

$$A \cap B: (4, 3) \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{36} \quad P(A \cap B) = P(A)P(B)$$



۳۹۱

دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند. با کدام احتمال حداکثر در سه پرتاب

تجربی ۹۱

نتیجه حاصل می‌شود؟

$$\frac{27}{64} \quad (1)$$

$$\frac{27}{64} \quad (2) \quad \checkmark$$

$$\frac{19}{32} \quad (3)$$

$$\frac{29}{64} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{9}{2} = \frac{14 + 12 + 9}{2} = \frac{35}{2}$$

$$\frac{3}{2} = \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \rightarrow \left(\frac{1}{2} \right)$$



در پرتاب چهار تاس، چهار عدد متوالی ظاهر شده است. احتمال آنکه یکی از تاس‌ها عدد ۲ باشد چقدر است؟

۳۹۲

$$1 \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{4} \text{ (۳)}$$

$$\frac{2}{4} \text{ (۲)}$$

$$\frac{2}{3} \text{ (۱)}$$

۱, ۲, ۳, ۴

۲, ۳, ۴, ۵

۳, ۴, ۵, ۶

$$\frac{2}{3}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

احتمال وقوع A در B است (مساوی)



اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند و بدانیم $P(A) = \frac{3}{10}$ و $P(B|A) = \frac{2}{4}$ و $P(A|B) = \frac{1}{4}$ ،
آن‌گاه $P(B)$ کدام است؟

۳۹۳

- $\frac{1}{15}$ (۱) ✓
- $\frac{2}{12}$ (۲)
- $\frac{3}{10}$ (۳)
- $\frac{4}{55}$ (۴)
- $\frac{2}{1}$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow P(A \cap B) = 0,07$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow P(B) = \frac{0,07}{0,2} = 0,10$$



۳۹۴

از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان به تصادف یک کارت بدون جای گذاری بیرون می‌آوریم، سپس کارت دوم را

تجربی ۹۱

خارج می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو کارت هم رنگ هستند؟

$$\frac{4}{7} (4)$$

$$\frac{3}{7} (3) \checkmark$$

$$\frac{5}{14} (2)$$

$$\frac{2}{7} (1)$$

۳ سفید
۴ سبز

$$\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{6}$$

$$\frac{12}{42} + \frac{12}{42} = \frac{24}{42}$$

$$\frac{2}{7}$$

قاعده ضرب احتمال

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(B) P(A|B)$$



۳۹۵

در جعبه‌ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جای گذاری از آن بیرون می‌آوریم. با کدام

تجربی ۹۲

احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره خارج شده سفید است؟

$$\frac{2}{5} \quad (4) \quad \checkmark$$

$$\frac{3}{5} \quad (3)$$

$$\frac{3}{7} \quad (2)$$

$$\frac{5}{14} \quad (1)$$

اولین مهره

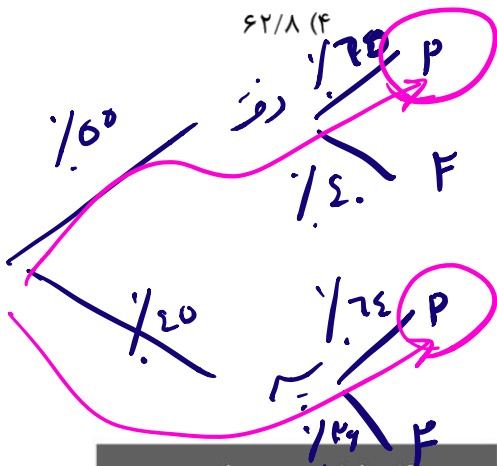
$$\frac{7}{10}$$

سفید
و سیاه



۳۹۶

۵۵ درصد دانشجویان سال اول دختر و بقیه پسر هستند. ۶۰ درصد دختران و ۶۴ درصد پسران تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند. چند درصد کل دانشجویان تمام واحدهای درسی را گذرانده‌اند؟
خرج ۸۸



۶۲/۴ (۳)

۶۱/۸ (۲) ✓

۶۱/۴ (۱)

$$\frac{55}{100} \times \frac{70}{100} + \frac{20}{100} \times \frac{75}{100}$$

$$\frac{11}{20} \times \frac{7}{10} + \frac{9}{50} \times \frac{15}{10}$$

$$\frac{77}{200} + \frac{27}{100} = \frac{170 + 132}{200} = \frac{302}{200} = 151\%$$



۳۹۷

ظرف A دارای ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است.

به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره‌های خارج شده سفید

است؟

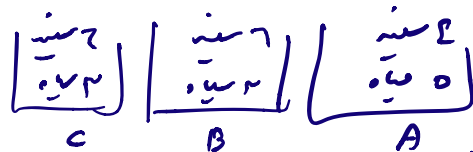
تجربی ۹۳

$$\frac{1}{3} \times \frac{\binom{6}{2} \binom{0}{0}}{\binom{9}{2}} + 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{\binom{4}{2} \binom{3}{0}}{\binom{9}{2}}$$

$$\frac{10}{21} \quad (3)$$

$$\frac{26}{63} \quad (2)$$

$$\frac{25}{63} \quad (1) \quad \checkmark$$



$$\frac{7 \times 10 + 2 \times 10 \times 4}{3 \times \binom{9}{2}} = \frac{7 + 4}{3 \times 9}$$

$$= \frac{25}{63}$$

$$\frac{7 \times 10 + 2 \times 10 \times 4}{3 \times 9} = \frac{70 + 80}{27} = \frac{150}{27} = \frac{25}{63}$$



۳۹۸

اگر جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت مقابل باشد، حاصل $P(X \geq 2)$ کدام است؟

X	۱	۲	۳
P	$\frac{1}{4}a^2$	a	$\frac{1}{2}a$

$$\frac{3}{4} \quad (4 \checkmark)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4}a^2 + a + \frac{1}{2}a = 1$$

$$\frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{2}a - 1 = 0$$

$$a = -1$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$\sum P(x) = 1$$

$$\frac{3}{2}a = \frac{3}{2}$$



۳۹۹

دانش آموزی به ۶ پرسش تستی سه گزینه‌ای به تصادف پاسخ می‌گوید. احتمال این که فقط به ۴ پرسش پاسخ درست دهد،

کدام است؟

تجربی ۸۸

$$\frac{20}{243} \quad (4) \quad \checkmark$$

$$\frac{16}{243} \quad (3)$$

$$\frac{5}{81} \quad (2)$$

$$\frac{4}{81} \quad (1)$$

$$p = \frac{1}{3} \quad q = \frac{2}{3}$$

$$n = 6 \quad k = 4$$

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{6}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= \cancel{15} \times \frac{1}{\cancel{27} \times 3} \times \frac{2}{3} = \frac{20}{243}$$

@alaa_sanatisharif

۳۹۹

اقل کبار بریزد در n بار تیرار

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

اقل بریزد

طلبت

$$p + q = 1$$

SanatiSharif.ir



اگر $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ باشند، حاصل $(AB)(CD)$ کدام است؟ آزاد ۷۹ **Foo**

~~(۴) غیر قابل انجام~~

$$\begin{bmatrix} -25 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (3) \\ (1) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 27 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} (2) \quad \begin{bmatrix} 29 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} (1)$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

2×2

$$\begin{bmatrix} -16 \end{bmatrix}$$

$$CD = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2×2 2×2 2×2



اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^2 = \alpha A + \beta I$ باشد، دو تایی (α, β) کدام است؟ **Fol**

(4, 13) (4)

(4, 11) (3)

(2, 13) (2) ✓

(2, 11) (1)

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = I_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مورد صحتی

$$\alpha = 2$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha + \beta & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha + \beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 21 &= 8 + \beta \\ \beta &= 21 - 8 = 13 \end{aligned}$$



ریاضی ۸۳

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، $A^7 - A^6$ کدام است؟ **F02**

$$A^7 - A^6 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}_I \underbrace{\begin{bmatrix} A^6 \\ A^6 - I \\ A \end{bmatrix}}_{A - I}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \quad (2) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^2 = I \rightarrow A^6 = \underbrace{A^2 \times A^2 \times A^2}_I = I$$

$$A^7 = A^6 \times A = I \times A = A$$

$$A^7 - A^6 = A - I = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$



تجربی ۹۴

اگر $A = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $(A - B)^{-1}$ کدام است؟ ۴۰۳

$\begin{bmatrix} 0/2 & 0/2 \\ -0/3 & 0/2 \end{bmatrix}$ (۴) ✓
 $\begin{bmatrix} 0/2 & -0/2 \\ 0/3 & 0/4 \end{bmatrix}$ (۳)
 $\begin{bmatrix} 0/3 & -0/2 \\ 0/2 & 0/4 \end{bmatrix}$ (۲)
 $\begin{bmatrix} -0/2 & 0/1 \\ 0/3 & 0/2 \end{bmatrix}$ (۱)

$A - B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$A \times A^{-1} = I$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$\frac{1}{2 - (-6)} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} =$



ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ مفروض است. اگر $A \times B$ ماتریس واحد باشد. مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس B ، کدام است؟

۴۰۴

تجربی ۹۳

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow B = A^{-1} = \frac{1}{2 \times 7 - 3 \times 4} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \quad (A) \times (B) = I$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (B) = A^{-1}$$

$$\frac{7}{2} + -\frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$



تجربی ۹۵

اگر $A = \begin{bmatrix} a & -۳ \\ ۵ & a+۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشند، به ازای کدام مقدار a ماتریس $A + ۲B$ وارونپذیر نیست؟ ۴۰۵

۷ و -۳ (۴)

۴ و -۷ (۳)

۷ و -۵ (۲)

۵ و -۷ (۱) ✓

$$\begin{bmatrix} a & -۳ \\ ۵ & a+۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۲ & ۶ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-۲ & ۳ \\ ۹ & a+۴ \end{bmatrix}$$

$$(a-۲)(a+۴) - ۲۷ = 0 \rightarrow a^2 + 2a - ۸ - ۲۷ = 0$$

$$a^2 + 2a - ۳۵ = 0 \rightarrow (a+۷)(a-۵) = 0$$

$$\begin{cases} a = -۷ \\ a = ۵ \end{cases}$$



خرج ۸۷

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس $(2A) \cdot (3A^{-1})$ کدام است؟ **۴۰۶**

۳۶ (۴)

۱۸ (۳)

۱۶ (۲)

۱۲ (۱)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$ad - bc$$

$$2A \times 3A^{-1} = 6 \times \underbrace{A \times A^{-1}}_I = 6I$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow 6 + 6 = 12$$



آزاد ۹۰

اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $(A^{-1} + I)(A + I)$ کدام است؟ **FoV**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \text{ (۴)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \text{ (۳) ✓}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ (۲)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (۱)}$$

$$(A^{-1} + I)(A + I) = I + A^{-1} + A + I = 2I + A + A^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{-1-4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$



خارج ۹۱

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس B از معادله $A \cdot B = 2I$ کدام است؟ **F08**

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \text{ (۴)}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \text{ (۳)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ (۲)}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ (۱) ✓}$$

$$A \times B = 2I \rightarrow \left(\frac{1}{2}A\right) \times B = I$$

$$\left(\frac{1}{2}A\right), B \rightarrow \text{مکس مرانه}$$

$$B = \left(\frac{1}{2}A\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \rightarrow \frac{1}{-\frac{1}{2} - 1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$