مقدمه:

چند نکته مهم در حل سؤالات ریاضی در کنکور تجربی

۱- سعی کنید سر جلسه آزمون دنبال بهینه زدن باشین یعنی اینکه از اول دنبال ۱۰۰ زدن نباشین، چرا ؟!!

زمان پاسخگویی به ۳۰ تست ریاضی ۴۵ الی ۵۰ دقیقه است، اگر بیشتر وقت بزارین در درس‌های بعدی دچار مشکل میشین!!!

برای پاسخگویی ابتدا سؤالات ساده، متوسط (راه حل طولانی) و سپس سؤالات دشوار و مفهومی و ترکیبی رو حل کنین، با این روش میشه حدود ۶۰ الی ۷۰ درصد زد.

۲- دنبال فرمول‌های زیاد و تکنیک‌های عجیب و غریب کنکوری نباشین، و با توجه به مفاهیم و آن چیزی که فهمیدین سؤالات رو حل کنید.

۳- تمارین مهم کتاب و سؤالات کنکورهای گذشته رو با دقت حل کنین (حفظ نکنید) معمولاً سؤال های جدید شبیه سؤال‌های کنکورهای گذشته است (به ۱۰ سال گذشته نگاه کنید.)

۴- با روحیه و قدرت ادامه بدین به زودی معجزه‌ای اتفاق می‌افتد.

فهرست

۱-آنالیز و احتمال

۲- تابع

تابع (بزرگترین مبحث کنکور تجربی) از شیر مرغ تا جون آدمیزاد رو شامل میشه!!

مباحثی که در این قسمت مطرح میشه به اختصار:

① تعیین علامت ② معادلهٔ درجه ۱ و ۲ ③ مفهوم تابع ④ توابع کسری و رادیکالی
⑤ اعمال جبری روی تابع و ترکیب تابع ⑥ تابع قدر مطلق ⑦ تابع براکت (جزء صحیح)
⑧ تابع یک به یک و تابع معکوس (وارون) ⑨ تابع نمایی و لگاریتمی
⑩ دنباله‌های (حسابی و هندسی) ⑪ توابع مثلثاتی

۳- حد و پیوستگی

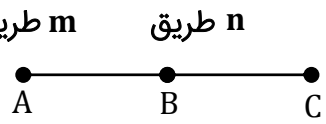
① مفهوم حد و حدهای یک طرفه ② محاسبه‌ی حد ③ رفع ابهام $\frac{0}{0}$ ④ هم ارزی‌ها
⑤ قضیه فشردگی (ساندویچ) ⑥ حد بی‌نهایت ⑦ حد در بی‌نهایت و رفع ابهام $\frac{\infty}{\infty}$
⑧ پیوستگی

۴- مشتق

① فرمول‌های مشتق ② عامل صفر شونده در مشتق گیری ③ تعریف حدی مشتق
④ مشتق چپ و راست ⑤ مشتق توابع قدر مطلق و براکت ⑥ تابع صعودی و نزولی
⑦ خط مماس و قائم بر منحنی از نقطه A روی منحنی ⑧ آهنگ تغییرات

نکات مهم فصل اول (آنالیز ترکیبی و احتمال)

۱- اصل ضرب و اصل جمع



اصل ضرب: (وَ) $(m\times n)$

اصل جمع: (یا) $(m+n)$ **طریق**

۲- جایگشت خطی بدون تکرار: به طرز قرار گرفتن n شیء متمایز کنار یکدیگر را جایگشت آن n شیء گویند. و برابر است با $n!$ (فاکتوریل =!)

$$n!=n(n-۱)(n-۲)\times.....\times۳\times۲\times۱ \qquad (۰!=۱)^*$$

جایگشت خطی با تکرار = اگر در میان n شیء شبیه هم وجود داشته باشد $\frac{n!}{r!}$ ← اگر در میان شی موجود r شی شبیه به هم وجود داشته باشد $\frac{n!}{r!}$

جایگشت دوری = تعداد حالت‌های متمایز قرارگیری n شیء دور میز گرد برابر $(n-۱)!$

۳- ترتیب و ترکیب

ترکیب
$$C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!\times r!}$$
↓
ترتیب انتخاب مهم نیست

,

ترتیب
$$p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$
↓
ترتیب انتخاب مهم است

☺ **روش محاسبه‌ی تستی ترکیب:**

$$C(۸,۳)=\binom{۸}{۳}=\frac{۶\times۷\times۸}{۱\times۲\times۳}=۵۶$$

۴- چند نکته مهمّ و کاربردی:

۱) $\binom{n}{۱}=\binom{n}{n-۱}=n \quad \rightarrow \binom{۸}{۱}=\binom{۸}{۷}=۸$

۲) $\binom{n}{۰}=\binom{n}{n}=۱ \quad \rightarrow \binom{۸}{۰}=\binom{۸}{۸}=۱$

۳) قاعده پاسکال $\rightarrow \binom{n}{k}+\binom{n}{k+۱}=\binom{n+۱}{k+۱}$

مثال : $\binom{۱۰}{۷}+\binom{۱۰}{۸}=\binom{۱۱}{۸}\rightarrow ۱۲۰+۴۵=۱۶۵$

روش محاسبه $\rightarrow \binom{۱۰}{۷}=\binom{۱۰}{۳}=\frac{۸\times۹\times۱۰}{۱\times۲\times۳}=۱۲۰$

$$\binom{۱۰}{۸}=\binom{۱۰}{۲}=\frac{۹\times۱۰}{۱\times۲}=۴۵$$

$$\binom{۱۱}{۸}=\binom{۱۱}{۳}=\frac{۹\times۱۰\times۱۱}{۱\times۲\times۳}=۱۶۵$$

۵- نکات زیر مجموعه:

تعداد زیر مجوعه‌های یک مجموعه n عضوی از رابطه ۲^n بدست می‌آید و تعداد زیر مجموعه‌های $۰<a<۱$ عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی از رابطه $\binom{n}{k}$ بدست می‌آید.

$$۲^n=\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\ldots+\binom{n}{n}$$

- $\binom{n}{۰}$: زیر مجموعه ۰ عضوی
- $\binom{n}{۱}$: زیر مجموعه ۱ عضوی
- $\binom{n}{۲}$: زیر مجموعه ۲ عضوی
- $\binom{n}{n}$: زیر مجموعه n عضوی

نکته: تعداد زیر مجموعه‌های فرد عضوی = تعداد زیر مجموعه‌های زوج عضوی = $۲^{n-۱}$

فقط حواسمون باشه که باید همه باشند یعنی از صفر عضوی تا n عضوی

۶- تعداد مربع‌ها در یک جدول مربعی $n\times n$ برابر است با:

$$n^۲+(n-۱)^۲+\ldots+۲^۲+۱^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

۷- تعداد مستطیل‌ها در یک جدول $m\times n$

$$\binom{m+۱}{۲}\binom{n+۱}{۲}$$

۸- روش متمم = در حل سؤالات آنالیز و احتمال بعضی اوقات محاسبه حالت مطلوب بسیار طولانی و وقت گیر می‌شود، در این مسائل بهتر است از روش متمم استفاده شود.

نعداد حالات نا مطلوب – تعداد کل حالات = تعداد حالات مطلوب $\rightarrow$ روش متمم

** احتمال ** (یعنی سهم)

۱- احتمال مقدماتی و قوانین آن:

$$۱)\ *p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{کل حالات ممکن}}$$

$$۰\le p(A)\le ۱$$

$$۲)\ p(A)+p(A')=۱\rightarrow p(A')=۱-p(A)$$

$p(A')$ = احتمال متمم = برخلاف سؤال عمل می‌کنیم

معمولاً هنگامی از احتمال متمم استفاده می‌کنیم که بدست آوردن احتمال خواسته شده در صورت سؤال طولانی و وقت‌گیر باشد.

نکته: سؤالاتی که با کلمه‌ی حداقل یا حداکثر همراه هستند با روش متمم بهتر حل می‌شوند.

۲- قانون جمع احتمالات

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$

احتمال رخ دادن A یا B (حداقل یکی) $=p(A\cup B)$

احتمال رخ دادن A و B $=p(A\cap B)$

نکته: اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند. $p(A\cap B)=\varnothing$

پس $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$

۳- دو پیشامد مستقل: وقتی دو پیشامد A و B تأثیری در احتمال دیگری نداشته باشند، پیشامدهای A و B را مستقل گویند.

$$p(A\cap B)=p(A).p(B)$$

نکته: اگر A و B مستقل باشند (A',B) و (A,B') و (A',B') نیز مستقل هستند.

۴- احتمال شرطی: احتمال وقوع پیشامد A اگر B اتفاق افتاده باشد را به صورت زیر نمایش میدهند.

$$p(A\mid B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

نکته: برای حل سؤالات احتمال شرطی از مفهوم احتمال شرطی استفاده کنید یعنی فضای نمونه‌ای کوچک‌تر می‌شود (دیدگاه شهودی)

۵- قاعده‌ی احتمال کل (نمودار درختی): برای حل این مسائل داده های مسأله را به صورت نمودار درختی مشخص می‌کنیم و سپس اعداد روی شاخه ها را در هم ضرب میکنیم و جواب‌های اصلی را با هم جمع می‌کنیم.

۶- جدول توزیع احتمال و متغیر تصادفی:

$$p(0\le x\le n)=p(X=0)+p(X=1)+....+p(X=n)=1$$

در جدول توزیع احتمال، جمع تمام احتمال‌ها همواره برابر یک است.

۷- توزیع دو جمله‌ای: اگر اتفاقی n بار تکرار شود، طوری که هر با مستقل از دفعات قبلی باشد و احتمال پیروزی P و احتمال شکست q باشد، احتمال k بار پیروزی برابر است.

$$p=\binom{n}{k}.p^k.q^{n-k}$$

$$\boxed{q=1-p}\ ,\ \boxed{p+q=1}$$

شکست — پیروزی

قوانین برنولی: اگر $p=q=\frac{1}{2}$

$$p=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

(مسائل سکه و فرزندو ..... مسائل ۵۰-۵۰)

شانس پیروزی و شکست برابر باشد.

۹- چند نکته مهم

قوانین دمرگان

۱) $(A\cup B)' = A'\cap B'$

۲) $(A\cap B)' = A'\cup B'$

۳) $(A-B) = A\cap B'$

نکته: علامت پریم ($'$) معنای نَه می‌دهد. مانند A' که خوانده می‌شود A نه

چند نکته کاربردی:

***

۱) $\left.\begin{array}{l} p(A-B) = p(A) - p(A\cap B) \\ p(A-B) = p(A\cup B) - p(B) \\ p(A-B) = p(A\cap B') \end{array}\right\}$ احتمال آنکه پیشامد A اتفاق بیافتد ولی پیشامد B اتفاق نیافتد.

***

۲) $p(A'\cap B') = p(A\cup B)'$ → احتمال آنکه نه پیشامد A و نه پیشامد B اتفاق بیفتد

***

۳) $p(A\Delta B) = p(A) + p(B) - ۲p(A\cap B)$ احتمال آنکه پیشامد A یا B رخ دهد (دقیقاً یکی رخ دهد) تفاضل متقارن

***

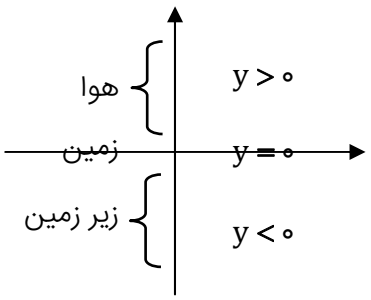
۱۰- نکته مهم

می توان فرمول های بالا را بر حسب $n(A)$ و $n(B)$ نیز نوشت.

$$n(A-B) = n(A\cap B') = n(A) - n(A\cap B)$$

فصل۲- تابع

قسمت اول: تعیین علامت



۱- تعیین علامت معادله درجه اول

$y = ax + b$

$y = ۰ \rightarrow ax + b = ۰ \rightarrow x = \frac{-b}{a}$ (ریشه)

نکته: درتعیین علامت حواسمون به علامت a باشه ☺

x		x	
p	a مخالف علامت	۰	a موافق علامت

۲- تعیین علامت معادله درجه دوم

$y = ax^۲ + bx + c$

۱) $\Delta > ۰ \rightarrow$ ۲ ریشه متمایز

x		$x_۱$		$x_۲$	
P	موافق a علامت	۰	مخالف a علامت	۰	موافق a علامت

۲) $\Delta = ۰ \rightarrow$ ۱ ریشه مضاعف

x		$x_۱ = x_۲$	
P	موافق a علامت	۰	موافق a علامت

۳) $\Delta \rightarrow$ ۰ریشه

x	$-\infty$	$+\infty$
P	همواره موافق علامت a	

* تعیین علامت به روش ریشه‌های زوج و فرد:

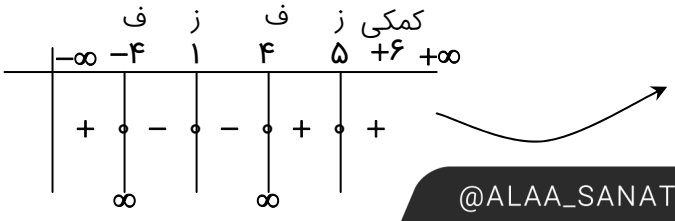
$P = \frac{(x-۱)^۲ |x-۵|}{x^۲ - ۱۶}$

ریشه زوج $(x-۱)^۲ = ۰ \rightarrow x = ۱$

ریشه زوج $|x-۵| = ۰ \rightarrow x = ۵$

$x^۲ - ۱۶ = ۰ \rightarrow x = \pm ۴$

سوال
ریشه‌ی زوج چیه!!!؟؟
عزیزم اگر کل عبارت داخل قدر مطلق یا داخل پرانتز با توان زوج باشد ریشه زوج تولید می‌کند.



نکته: حواسمون به ریشه‌های مخرج باشه که غیر قابل قبول هستند.

روش محاسبه: یه عدد کمکی اینجا ($x = ۶$) را داخل سوال انداختیم حاصل مثبت شد بعد اگر بـه ریـشه زوج رسـیدیم علامـت عوض نمی‌شه اما اگر به ریشه فرد برخورد کردیم علامت عوض می‌شه به همین راحتی (گلابی!!)

نکته: تعیین علامت در قسمت‌های زیادی استفاده میشه مثل تعیین دامنه و حل نا معادلات و ...

(قسمت دوم تابع) معادله و تابع درجه دوم

۱- رسم تابع درجه دوم:

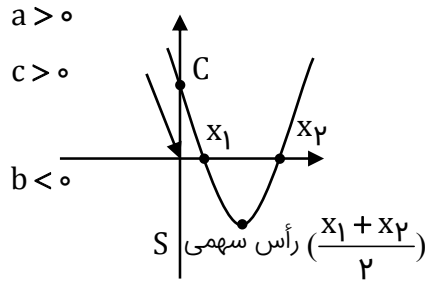
$y = ax^۲ + bx + c$

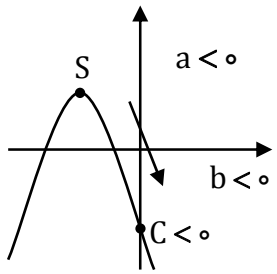
قدم اول $\rightarrow a = x^۲$ ضریب $\rightarrow$
- $a > ۰$ (دسته‌ها روبه بالا)
- $a < ۰$ (دسته‌ها روبه پایین)

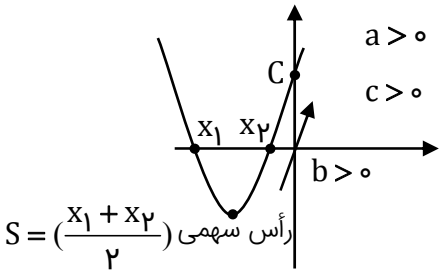
قدم دوم $\rightarrow b = x$ ضریب $\rightarrow x = \frac{-b}{۲a}$ (رأس سهمی)

روش تستی برای تشخیص جهت b از چپ به راست به نقطه C نزدیک شو اگر سربالایی رفتی $b > ۰$ اگر سرپایینی رفتی $b < ۰$.

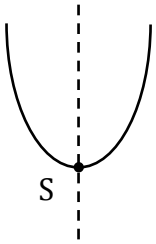
قدم سوم $= c \rightarrow$ ضریب ثابت $\rightarrow$ ها y همیشه روی محور







نکته: نقطه رأس سهمی یا (S)



$S \begin{cases} x = \frac{-b}{۲a} & \text{(طول رأس سهمی) = محور تقارن سهمی} \\ y = f(x) = \frac{-\Delta}{۴a} & \text{(عرض رأس سهمی)} \end{cases}$

۲- حل معادله درجه دوم (بدست آوردن ریشه‌ها)

برای حل معادله درجه دوم راه‌های زیادی وجود دارد.

از جمله استفاده از Δ، استفاده از اتحاد و تجزیه، استفاده از روش هندسی .

روش دلتا:

$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow$

- $\Delta > 0 \rightarrow x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ ← ۲ ریشه متمایز
- $\Delta = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ ← ۱ ریشه مضاعف (مماس)
- $\Delta < 0 \rightarrow x_1, x_2$ ندارد ← بدون ریشه

استفاده از اتحاد و تجزیه: این قسمت رو اکثر عزیزان اطلاعات کافی دارند و فقط چند مثال می‌زنم.

۱) $x^2 + 5x + 6 = 0$

$(x+2)(x+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases}$

۲) $2x^2 - 5x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{A روش تستی به‌جای روش}} 2x^2 - 5x + 2 = 0$

$x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow (x-1)(x-4) = 0$

$\rightarrow (\textcircled{2}x - 1)(x - \frac{4}{\textcircled{2}}) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$

۳) $3x^2 - 2x - 8 = 0 \xrightarrow{\text{A روش تستی به‌جای روش}} 3x^2 - 2x - 8 = 0$

$x^2 - 2x - 24 = 0 \rightarrow (x-6)(x+4) = 0$

$(3x+4)(x - \frac{6}{3}) = 0 \rightarrow \begin{cases} 3x + 4 = 0 \rightarrow x = -\frac{4}{3} \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$

۳- روابط بین ریشه‌های معادله درجه دوم

نکته:

$* S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

$* P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

$* d = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$

$x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS$

$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$

۴- نوشتن معادله از روی ریشه‌ها:

* نوشتن معادله با داشتن S و P

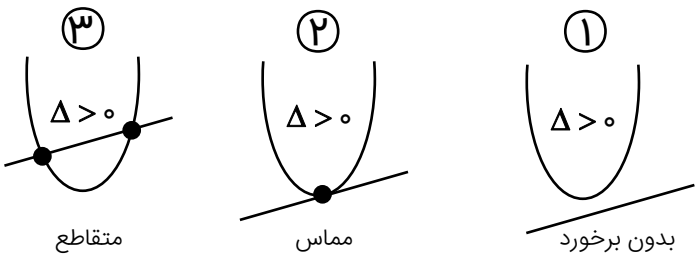
$x^2 - Sx + P = 0$

* اگر α و β ریشه‌های متمایز معادله باشند. $\boxed{K(x-\alpha)(x-\beta)=0}$

* معادله با ریشه مضاعف (تکراری) مانند α $\boxed{K(x-\alpha)^2=0}$

نکته: هنگامی معادله ریشه مضاعف دارد که $\Delta=0$ باشد.

۵- وضعیت نسبی خط و صفحه:



مثلاً تو سوال مطرح میشه: خط به معادله‌ی $y=m+4$ با منحنی به معادله‌ی $y=-x^2+2x$ هیچ نقطه مشترک ندارند، خب بچه‌ها این یعنی چی!!!!؟ یعنی اگر این منحنی و خط را مساوی هم قرار بدیم $\Delta<0$ میشه.

۶- تحلیل علامت ریشه‌ها با S و P:

$$\Delta>0\rightarrow\begin{cases}S>0,P>0\rightarrow & \text{هر دو ریشه مثبت}\\ S<0,P>0\rightarrow & \text{هر دو ریشه منفی}\end{cases}$$

و مدل‌های دیگر: عزیزم کمی فکر کن و برای خودت مثال بزن، راحت به جواب می‌رسی. مثلاً اگر جمع ریشه‌ها مثبت و ضرب ریشه‌ها مثبت یعنی هر دو مثبت دیگه !!!

۷- دو حالت مهم برای یافتن سریع جواب در معادلات درجه دوم:

$y=ax^2+bx+c$

۱) $a+b+c=0\rightarrow x_1=1\ ,\ x_2=\frac{c}{a}$

۲) $a+c=b\rightarrow x_1=-1\ ,\ x_2=\frac{-c}{a}$

۸- حل معادلات به فرم $a\bigcirc^2+b\bigcirc+c=0$

مثال: مجموع ریشه‌های حقیقی $(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0$

حل: اینجا دایره ما (x^2+x) هستش

$x^2+x=t$

$t=6\ ,\ t=12 \qquad t^2-18t+72=0\rightarrow(t-6)(t-12)=0$

$x^2+x=12\rightarrow x^2+x-12=0\rightarrow S=\frac{-b}{a}=\frac{-1}{1}=-1\rightarrow$ مماس $=-1-1=-2$

$x^2+x=6\rightarrow x^2+x-6=0\rightarrow S=\frac{-b}{a}=\frac{-1}{1}=-1$

*** دنباله‌ها (تصاعد)

این قسمت به دو بخش دنباله‌ی حسابی و دنباله‌ی هندسی دسته‌بندی می‌شود

نکته: در این قسمت باید مفهوم جمله، قدر نسبت و مجموع جمله را خوب درک کنید تا به راحتی سوال‌های این قسمت را حل کنید.

۱- دنباله‌ی حسابی

$$\overset{d}{\curvearrowright}\ \overset{d}{\curvearrowright}\ \overset{d}{\curvearrowright}$$
$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$$
$$5\quad 10\quad 15\quad 20$$

۱) $a_n = a_1 + (n-1)d \longrightarrow$ قدر نسبت $\rightarrow$ $\boxed{a_n = nd + (a_1 - d)}$

جمله عمومی — جمله اول — شماره جمله

۲- قدر نسبت: مقدار عددی (ثابت) که به جملات در دنباله‌ی حسابی اضافه یا کم می‌شود و معمولاً به سه مدل مطرح می‌شود.

مثال:

d

- جملات متوالی $\rightarrow a_1, a_2, a_3, \ldots$ (۵ ۱۰ ۱۵) $\quad d = $ جمله‌ی قعبی $-$ جمله جلویی $= ۱۰ - ۵ = ۵$
- جملات غیر متوالی ..... a_n ..... a_m ..... $\boxed{d = \frac{a_m - a_n}{m-n}}$ مثال $d = \frac{۱۱۰ - ۱۰}{۲۲ - ۲} = \frac{۱۰۰}{۲۰} = ۵$

  ($a_2 = ۱۰$, $a_{22} = ۱۱۰$)
- m جمله زوج — جمله $m = ۱۹$ — $\boxed{d = \frac{b-a}{m+1}}$

$a_1, \square - \square - \square - \square, b$ (۱۰۲)

a_1: ۲ جمله اول — b: جمله آخر

به عنوان مثال $d = \frac{۱۰۲ - ۲}{۱۹ + ۱} = \frac{۱۰۰}{۲۰} = ۵$

واسطه‌ی حسابی:

$a_1, \overset{\frown}{(a_2)}, a_3 \rightarrow ۲a_2 = a_1 + a_3$

$a_1, a_2, \overset{\frown}{(a_3)}, a_4, a_5 \rightarrow ۲a_3 = a_1 + a_5 = a_2 + a_4$

$a_1, a_2, \ldots, \overset{\frown}{(a_{10})}, \ldots, a_{18}, a_{19} \rightarrow ۲a_{10} = a_1 + a_{19} = a_2 + a_{18} = \ldots$

$\underbrace{۲a_{10}}_{۲۰} = \underbrace{a_1 + a_{19}}_{۲۰}$

***قانون اندیس‌ها (شماره جمله‌ها)**

خلاصه اگر c و b و a سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی باشند $۲b = a + c$

جملات مشترک بین دو دنباله:

$$a_n : \overset{+۳}{\curvearrowright}\ ۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, \ldots$$
$$a'_n : \overset{+۲}{\curvearrowright}\ ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, \ldots$$

$\xrightarrow[\text{جملات مشترک}]{\text{ک‌م‌م}}$ $\overset{+۶\ +۶}{\curvearrowright}\ ۵, ۱۱, ۱۷, \ldots$

اولین جمله مشترک

* ابتدا اولین جمله مشترک را نوشته و سپس به اندازه ک‌م‌م دو قدر نسبت بالا ادامه می‌دهیم.

روابط گاوس (مجموع جملات):

گاوس:

- $\overbrace{1+2+3+\ldots+n}^{n\text{ جمله}}=\frac{n(n+1)}{2}$ دنباله مثلثی
- $\overbrace{2+4+6+\ldots+2n}^{n\text{ جمله}}=n(n+1)$
- $\overbrace{1+3+5+\ldots+(2n-1)}^{n\text{ جمله}}=n^2$ دنباله مربعی

به عنوان مثال: $1+2+3+\ldots+100=\frac{\overset{50}{\cancel{100}}(101)}{\underset{1}{\cancel{2}}}=5050$

دنباله فیبونانچی=$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,\ldots$

مجموع جملات در یک دنباله‌ی حسابی

جملات $\rightarrow a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,\ldots,a_n$

مجموع جملات $S_1=a_1$ (نکته مهم: a_1 همیشه برابر S_1 است)

$$S_2=a_1+a_2=S_1+a_2$$
$$S_3=a_1+a_2+a_3=S_2+a_3$$
$$S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=S_3+a_4$$
$$\vdots$$
$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=S_{n-1}+a_n$$

$$\boxed{a_n=S_n-S_{n-1}}$$

* ۲ فرمول مهم در S_n (مجموع جملات دنباله‌ی حسابی)

۱) $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$ (a_1: جمله اول، a_n: جمله آخر)

$$\Rightarrow \boxed{S_n=\frac{d}{2}n^2+Kn}$$
شبیه معادله‌ی درجه دوم

۲) $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$ (a_1: جمله اول، d: قدر نسبت)

نکته: برای استفاده از فرمول S_n باید از جمله‌ی اول تا جمله‌ی n ام را جمع کنیم.

دنباله‌ی هندسی:

$$\underset{\text{۲}}{a_1}\overset{q}{\rightarrow}\underset{\text{۴}}{a_2}\overset{q}{\rightarrow}\underset{\text{۸}}{a_3}\overset{q}{\rightarrow}\underset{\text{۱۶}}{a_4},...,a_n$$

$$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, ...$$

جمله اول — جمله دوم — جمله سوم — جمله چهارم

$$a_n = a_1q^{n-1}$$

- a_1: جمله‌ی اول
- q: قدر نسبت
- a_n: جمله‌ی n ام دنباله‌ی هندسی

نکته: اگر در دنباله‌ی هندسی $q > 0$ (دنباله یکنوا)

اگر در دنباله‌ی هندسی $q < 0$ (دنباله غیر یکنوا)

واسطه‌ی هندسی:

$$a_1, \underbrace{a_2}, a_3 \rightarrow (a_2)^2 = a_1 \times a_3$$

$$a_1, a_2, \underbrace{a_3}, a_4, a_5 = (a_3)^2 = a_{10} \times a_5 = a_{20} \times a_4$$

ضابطه اگر c و b و a سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند $b^2 = a.c$

قدر نسبت (q):

q {

- جملات متوالی $a_1, a_2, a_3, ...$ $\quad q = \frac{\text{جمله جلویی}}{\text{جمله عقبی}}$
- جملات غیر متوالی $.....a_n .....a_m .....$ $\quad q = \frac{a_m}{a_n}$
- درج m جمله $\quad a, \overbrace{\square - \square - \square - \square}^{\text{تا } m}, b \quad q^{m+1} = \frac{b}{a}$

جمله اول — جمله آخر

مجموع جملات در دنباله‌ی هندسی (S_n):

$$a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

- a_1: جمله‌ی اول
- q: قدر نسبت

حد مجموع جملات دنباله‌ی هندسی:

$$\lim_{n\to a} S_n = \frac{a_1}{1-q} \xrightarrow{\text{شرط}} -1 < q < +1$$

نکته: جملات m ام و n ام و k ام دنباله‌ی حسابی به ترتیب جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی هستند، قدرنسبت دنباله‌ی هندسی از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

حسابی: $a_m ... a_n ... a_k$

هندسی: $a_m, a_n, a_k \rightarrow q = \frac{k-n}{n-m}$

نکته: اگر S_n مجموع جملات دنباله‌ی هندسی به صورت $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ آنگاه: $S_{2n} = S_n(1+q^n)$

لگاریتم

۱)

$\log_b^a = c \Rightarrow$ برخلاف عقربه‌های ساعت $\Rightarrow a = b^c$

$a =$ صورت لگاریتم $a > 0$

$b =$ مبنای لگاریتم $b > 0$ و $b \neq 1$

۲) قوانین لگاریتم

۱) $\log_a^a = 1 \Rightarrow \log_5^5 = \log_{10}^{10} = \log_x^x = 1$

۲) $\log_a^1 = 0 \Rightarrow \log_2^1 = \log_{10}^1 = 0$

۳) $\log_{\bigcirc}^a + \log_{\bigcirc}^b = \log_{\bigcirc}^{ab}$ (یادمان باشد ضریب‌ها ۱ باشد)

۴) $\log_{\bigcirc}^a - \log_{\bigcirc}^b = \log_{\bigcirc}^{\frac{a}{b}}$ (یادمان باشد ضریب‌ها ۱ باشد)

۵) $\log_{b^n}^{a^m} = \frac{m}{n}\log_b^a$ (توان‌ها ضریب می‌شوند)

نکته: $\log_{ab}^a = 1 - \log_{ab}^b$

به عنوان مثال:

۱) $\log_{\underset{2\times5}{10}}^2 = 1 - \log_{10}^5$

۲) $\log_{\underset{3\times7}{21}}^3 = 1 - \log_{21}^7$

نکته:

$$\log_y^x = \log_{y^n}^{x^n} = \log_{\sqrt[n]{y}}^{\sqrt[n]{x}}$$

اگر به صورت و مبنای لگاریتم هر چیزی از جنس توان اضافه کنیم تساوی برقرار است.

(مثال $\longrightarrow \log_{\sqrt{2}}^x = \log_4^{2.5} \longrightarrow \lim_{x\to\infty}$ **از ۲ طرف جذر بگیریم**

۲ طرف را به توان ۲ برسانیم

$$\log_2^{x^2} = \log_2^5 \longrightarrow x^2 = 5 \longrightarrow x = \sqrt{5}$$

نکته:

۱) $a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}$

۲) $a^{\log_a^b} = b^{\log_a^a} = b^1$

۳) $\overset{\log^b}{\text{☁}} = b$

دامنه‌ی تابع لگاریتمی

$y = \log_{\text{مبنا}}^{\text{صورت}} \longrightarrow \begin{cases} \text{صورت} > 0 \\ \text{مبنا} > 0, \text{مبنا} \neq 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}}$ دامنه را می‌سازد

نامعادلات لگاریتمی

۱) $y = \log_a^x \xrightarrow{a>1} \log_a^{x_1} < \log_a^{x_2} \longrightarrow x_1 < x_2$

۲) $y = \log_a^x \xrightarrow{0<a<1} \log_a^{x_1} < \log_a^{x_2} \longrightarrow x_1 > x_2$

حواسمان به مبنا باشد در حالت $0 < a < 1$ جهت نامعادله عرض می‌شود.

نکته:

$\log_{\text{مبنا}}^{a} < c \longrightarrow \begin{cases} \text{مبنا} > 1 \longrightarrow a < (\text{مبنا})^c \\ 0 < \text{مبنا} < 1 \quad a > (\text{مبنا})^c \text{ (تغییر جهت علامت)} \end{cases}$

فرمول‌های تغییر مبنا در لگاریتم:

$\log_b^a = \dfrac{\log_c^a}{\log_c^b} \longrightarrow$ مبنای b به مبنای c تغیر کرد.

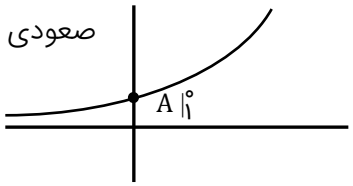
نتیجه ۱) $\log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a$

نتیجه ۲) $\log_b^a = \dfrac{1}{\log_a^b}$

معادلات نمایی و معادلات لگاریتمی(تابع لگاریتمی معکوس تابع نمایی است)

تابع نمایی: $y = a^x \longrightarrow$

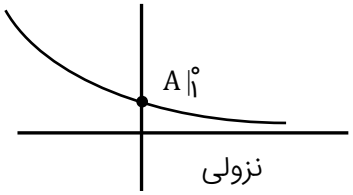
$a > 1$ (صعودی)



دامنه $= R$

برد $= (0, +\infty)$

$0 < a < 1$ (نزولی)



دامنه $= R$

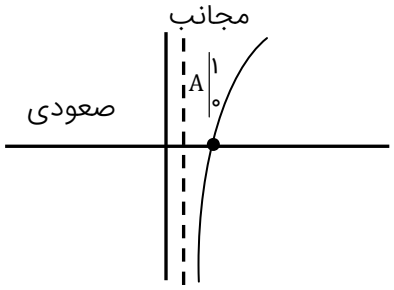
برد $= (0, +\infty)$

نکته:

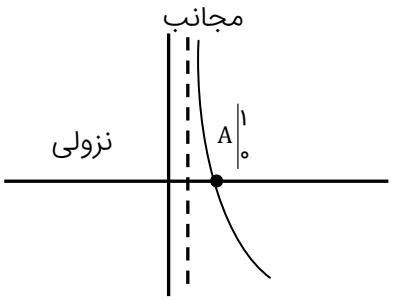
$\begin{cases} \log_b^a = c \Rightarrow a = b^c \\ \log_b^a = \log_b^c \Rightarrow a = c \end{cases}$

$y = \log_a^x$: (تابع لگاریتمی) ⟶

$a > 1$



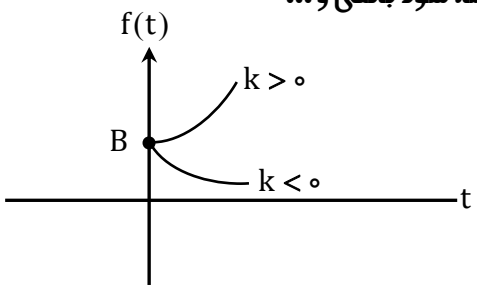
$0 < a < 1$



توابع رشد و زوال:

مسائل کاربردی توابع نمایی مانند رشد باکتری‌ها، سود بانکی و ...

تابع رشد $f(t) = Be^{kt} (k > 0)$



تابع زوال $f(t) = Be^{kt} (k < 0)$

نکته: e عدد نپر است که عددی گنگ است. $e \simeq ۲/۷۱$

$$y = e^x \xrightarrow{\text{معکوس}} y = \log_e^x = Lnx$$

پس حواسمان باشد Ln تابع لگاریتمی است که مبنای آن e (عدد نپر است) و خصلت لگاریتمی دارد و معروف به لگاریتم طبیعی است.

* $Ln\, e = \log_e^e = ۱$
* $e^{Lna} = e^{\log_e^a} = a$

نکته: در مسائل زلزله M (بزرگی زلزله - قدرت زلزله) در واحد ریشتر و E انرژی آزاد شده می‌باشد و داریم: $\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$

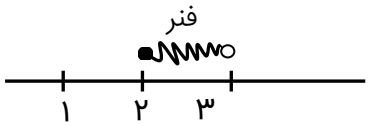
تابع جزء صحیح: (براکت)

$$[x] = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{عدد صحیح سمت چپ} & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

معادلات و نامعادلات جزء صحیح

۱) $[x]=n \longrightarrow n \le x < n+1$

مثال: $[x]=۲ \longrightarrow ۲ \le x < ۳$



۲) $[x] \le n \longrightarrow x \ge n$

۳) $[x] \le n \longrightarrow x < n+۱$

ویژگی‌های جزء صحیح:

۱) $[x+k]=[x]+k$ اگر k عدد صحیحی باشد از براکت خراج می‌شود.

۲) $[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & x \in \mathbb{Z} \\ -۱ & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

۳) $۰ \le x-[x] < ۱ \xrightarrow{\text{یا}} [x] \le x \le [x]+۱$

جزء اعشاری

نکته: ☁ **می‌تواند هر عبارتی باشد.**

$۰ \le$ ☁ $-[$ ☁ $] < ۱$

نمودار توابع جزءصحیح:

$y=a[bx]$

طول پله $=\frac{۱}{b}$

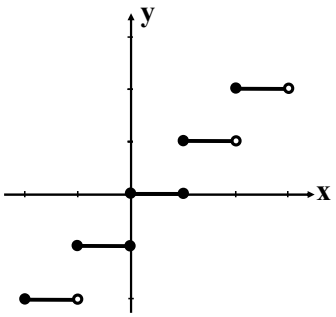
فاصله عرضی $=a$

طول نقطه ناپیوستگی $\Rightarrow bx=k \Rightarrow x=\frac{k}{b}$

چند نمودار مهم توابع جزء صحیح:

۱)

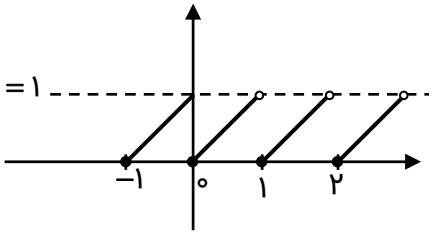
$y=[x]$



در این نمودار همیشه نقاط سمت چپ پاره خط‌ها توپر و شکل تابع شبیه پله است و طول هر پله نیز ۱ است.

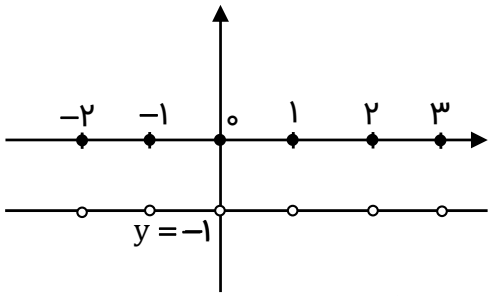
۲)

$y=x-[x]$



۳)

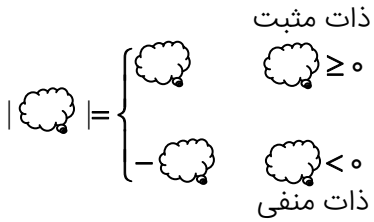
$y=[x]+[-x]$



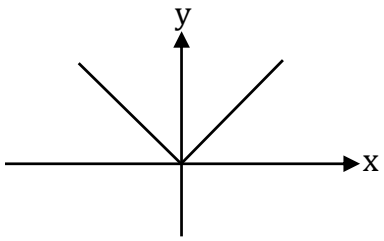
در این نمودار به ازای اعداد صحیح صفر و به ازای بقیه ۱- می‌شود.

قدر مطلق:

تعریف:



$$|x|=\begin{cases}+x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$$



چند ویژگی ساده قدر مطلق:

۱) $|a|\geq 0$

۲) $|a|=|-a|$

۳) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$

۴) $|ab|=|a||b|$

معادلات قدر مطلق:

۱) $|f(x)|=a \xrightarrow{a\geq 0} f(x)=\pm a$ (با شرط)

۲) $|f(x)|=|g(x)| \longrightarrow f(x)=\pm g(x)$ (بدون هیچ قیدوشرطی)

نامعادلات قدر مطلق:

۱) $|f(x)|<a \xrightarrow{a>0} -a\leq f(x)\leq +a$

۲) $|f(x)|>a \xrightarrow{a>0} \begin{cases}f(x)>a\\ a(x)<-a\end{cases}$

نکته: برای نامعادلات بالا: ⇐

۱) $a<0$ ← با معنی است.

۲) $a>0$ همیشه برقرار است.

۳) $|f(x)|<|a| \longrightarrow x^2<a^2$

به روش اتحاد مزوج حل می‌کنیم. $(x^2-a^2)<0 \rightarrow (x-a)(x+a)<0$

نامساوی مثلثی:

۱) $|a+b| \leq |a|+|b|$

اگر $ab < 0$ (مختلف العلامه) باشد علامت نامساوی برقرار است و اگر $ab > 0$ (متحدالعلامه) علامت مساوی برقرار است.

تابع یک به یک و تابع معکوس

تابع یک به یک: تابعی که در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی، مؤلفه‌ی دوم تکراری نداشته باشند، البته حواسمان باشد که خود زوج مرتب باید تابع باشد.

بررسی یک به یک بودن از روی نمودار: هر خطی موازی محور xها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

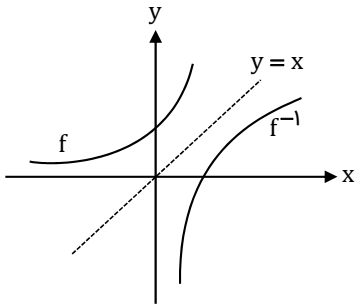
نکته: تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی (یکنوا) یک به یک است.

نکته: تابعی وارون‌پذیر است که یک به یک باشد (اگر f یک به یک باشد، f^{-1} تابع خواهد بود)

پیداکردن تابع وارون

۱- زوج مرتب: کافی است که جای مؤلفه‌های اول و دوم یعنی x و y را عوض کنیم.

۲- نمودار: نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه می‌کنیم.



$$f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$$

۳- ضابطه: برای یافتن ضابطه‌های تابع وارون از روی ضابطه ۲ روش وجود دارد.

روش اول: ابتدا x را برحسب y محاسبه می‌کنیم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم (x را تنها می‌کنیم)

مثال $\rightarrow y = 2x - 3 \rightarrow y + 3 = 2x \rightarrow x = \dfrac{y+3}{2}$

حالا جای x و y را عوض می‌کنیم

$$f^{-1}(x) = y = \frac{x+3}{2}$$

نکته: برای حل تست‌های این قسمت می‌توان از روش عددگذاری هم استفاده کرد.

روش دوم:

مثال $\rightarrow y = -4x + 5$

$$x = -4y + 5 \rightarrow 4y = -x + 5 \rightarrow y = \frac{-x+5}{4} \rightarrow$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-x+5}{4}$$

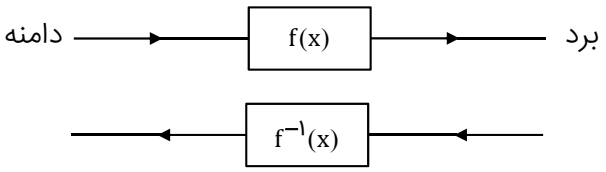
نکته: $D_f = R_{f^{-1}}$ و $R_f = D_{f^{-1}}$ و $f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$

نکته: در تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a+d=0$ باشد، آن‌گاه وارون تابع با خود آن برابر می‌شود.

نکته: ترکیب f و f^{-1}

۱) $f^{-1}of(x)=fof^{-1}(x)=x$

نکته: استفاده از تابع f و f^{-1} به شکل ماشین



مسیر حرکت عوض شود تابع معکوس می‌شود.

اعمال جبری روی توابع و ترکیب توابع

منظور از اعمال جبری یعنی $(f \overset{+}{\underset{\times}{\underset{-}{\div}}} g)$ می‌باشد که برای این منظور ابتدا باید شرط $Df \cap Dg$ را بررسی کنیم و سپس اعمال جبری را روی توابع اجرا می کنیم.

$$(f \overset{+}{\underset{\times}{\underset{-}{\div}}} g)(x)=f(x) \overset{+}{\underset{\times}{\underset{-}{\div}}} g(x) \xrightarrow{\text{به شرط}} Df \cap Dg$$

$$\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{\text{به شرط}} Df \cap Dg - \{g(x)=0\}$$

نکته ۱: برای محاسبه اعمال جبری در توابع زوج مرتبی ابتدا زوج‌های مرتبی که مؤلفه‌ی اول یکسان دارند را مشخص می‌کنیم و سپس مؤلفه‌های دوم آن را $+$ یا $-$ یا $\times$ یا $\div$ می‌کنیم.

خلاصه در دامنه مشترک، اعمال جبری روی برد انجام می‌شود.

نکته ۲: تساوی دو تابع: هنگامی دو تابع f و g با هم برابراند که دو شرط زیر برقرار باشد.

$$\begin{cases} \text{اول} \rightarrow Df=Dg \\ \text{دوم} \rightarrow \text{ساده شده تابع } f = \text{ساده شده تابع } g \text{ باشد} \end{cases}$$

ترکیب دو تابع

ترکیب دو تابع به صورت ضابطه: ترکیب دو تابع f و g را به صورت

$$fog(x)=f(g(x)) \qquad x \rightarrow \boxed{g} \rightarrow \boxed{f} \rightarrow fog$$

$$gof(x)=g(f(x)) \qquad x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow gof$$

دامنه‌ی ترکیب توابع

$$f(g(x))=$$

$$Dfog=\{x \mid x \in Dg, g(x) \in Df\} \rightarrow$$

روش حفظ‌کردن متوجه‌شدن

$$x \rightarrow \boxed{g} \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \text{خروجی}$$

روش حفظ‌کردن متوجه‌شدن مسیر حرکت ماشین است.

$Dgof = \{x \mid x \in Df, f(x) \in Dg\} \rightarrow$
$g(f(x))$

$x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow$ خروجی

پیداکردن $f(x)$ یا $g(x)$ با داشتن $fog_{(x)}$ و یکی از آن دو تابع:

برای حل این گونه سؤالات بدون توجه به فرمول ترکیب تابع مرکب را خودمان بازسازی کنیم تا به جواب برسیم یا با استفاده از رفتار ماشین به جواب برسیم؛ البته باید با حل سؤال‌های گوناگون به این روش مسلط شوید.

مثال: $f(x) = ۳x - ۱ \quad f(g(x)) = x^۲ + ۲ \quad g(x) = ?$

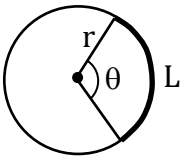
$f(g(x)) \Rightarrow ۳(g(x)) - \overbrace{۱ = x^۲ + ۲}$

$۳(g(x)) = x^۲ + ۳ \rightarrow g(x) = \frac{x^۲ + ۳}{۳}$

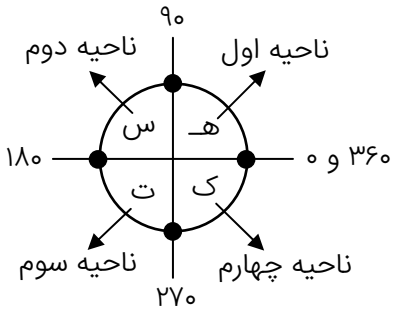
مثلثات

۱- زاویه برحسب رادیان

شعاع ↑
$L = r \times \theta \rightarrow$
↓ طول کمان



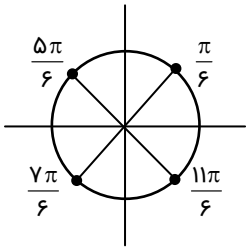
۲- شناخت دایره



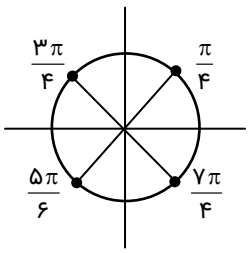
هـ = همه مثبت
س = sin مثبت
ت = tan و cot مثبت
ک = cos مثبت

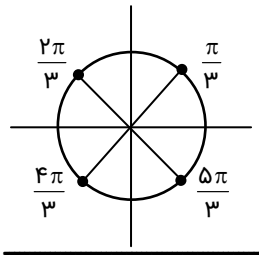
۳- زاویه‌های مهم در مثلثات

دایره برحسب ۳۰ درجه $(\frac{\pi}{۶})$



دایره برحسب ۴۵ درجه $(\frac{\pi}{۴})$





دایره برحسب ۶۰ درجه $(\frac{\pi}{3})$

روابط مثلثاتی

بسته ۱

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha$$
$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha$$

بسته ۲

$$\sin^2\alpha=\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{1+\cot^2\alpha}$$
$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}$$

بسته ۳

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha.\cos\beta\boxed{\pm}\cos\alpha.\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha.\cos\beta\boxed{\mp}\sin\alpha.\sin\beta$$
$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\boxed{\pm}\tan\beta}{1+\boxed{\mp}\tan\alpha.\tan\beta}$$

بسته ۴

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

بسته ۵

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

بسته ۶

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \quad \text{(یادآوری)}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \quad \textbf{(یادآوری)}$$

بسته ۷

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$$

بسته ۸

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha = 1-2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha = 1-\frac{2}{4}\sin^2 2\alpha$$

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha = 1-3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha = 1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$$

بسته ۹

$$(\sin\alpha \pm \cos\alpha)^2 = 1 \pm \sin 2\alpha$$

$$\tan\alpha+\cot\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$\tan\alpha-\cot\alpha = -2\cot 2\alpha$$

بسته ۱۰

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

حل معادلات مثلثاتی (عقربه‌های n سر)

(۱) $\sin x = \sin\alpha \begin{cases} x = 2k\pi+\alpha \\ x = 2k\pi+\pi-\alpha \end{cases}$

(۲) $\cos x = \cos\alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$

(۳) $\tan x = \tan\alpha \rightarrow x = k\pi+\alpha$

نکات رسم نمودار: در رابطه با نمودارهای $y = aSin(bx+c)+d$ و $y = aCos(bx+c)+d$

۱) $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ ← ضریب x

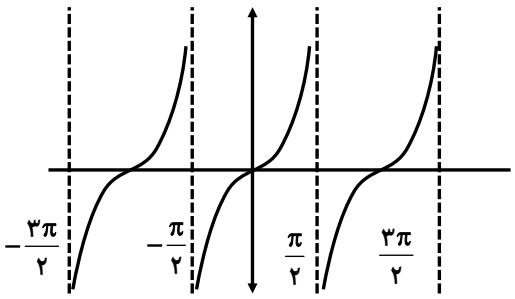
۲) $Max = |a| + d$ ، $Min = -|a| + d$

۳) $d = \frac{Max + Min}{۲}$ ، $|a| = \frac{Max - Min}{۲}$

تبصره ۱: نمودار $Sin\,x$ در آغاز رسم (a و b هم علامت) و اگر به صورت (a و b مختلف العلامه)

تبصره ۲: نمودار $Cosx$ در آغاز رسم ($a > ۰$) و اگر به صورت ($a < ۰$) است.

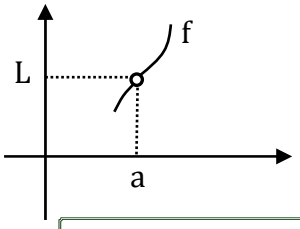
نکته : نمودار $y = \tan x$ به صورت زیر می باشد.
این تابع در هر بازه‌ای که تعریف شده باشد اکیداً صعودی است اما در R اکیداً صعودی نیست.



فصل ۳ : حد و پیوستگی

تعریف حد: تابع f در $x = a$ دارای حد L است هرگاه وقتی از روی نمودار f به عدد حقیقی a نزدیک می‌شویم، مقادیر f به عدد حقیقی و منحصر به فرد L نزدیک شوند.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = L \\ \lim\limits_{x\to a^+} = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L \end{cases}$$



محاسبه حد از روی ضابطه

برای محاسبه حد $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ اول باید ضابطه‌ی f را تا حد ممکن ساده کنیم حتماً باید قدرمطلق و براکت (جزءصحیح) را برداریم و در توابع چندضابطه‌ای باید معلوم کنیم که از کدام ضابطه استفاده می‌کنیم.

رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ جبری (هوپیتال)

اگر حد به صورت $\frac{۰}{۰}$ رسید می‌توانیم از رفع ابهام Hop استفاده کنیم.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{Hop} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

حالا اگر در حد جدید $x = a$ را قرار دادیم و باز هم $\frac{۰}{۰}$ شده می‌توانیم دوباره Hop بزنیم.

نکته: هوپیتال در دو جا عمل نمی‌کند.

۱- اگر عبارت زیر رادیکال صفر شود ⟵ باید رادیکال را از بین ببریم.

مثال:

$$۱)\sqrt{x^۲-۲x+۱}=\sqrt{(x-۱)^۲}=|x-۱|$$

$$۲)\sqrt{۱+\cos x}=\sqrt{۲\cos^۲\frac{x}{۲}}=\sqrt{۲}\,|\cos\frac{x}{۲}|$$

۲- اگر چند عبارت در هم ضرب شوند که حد همگی صفر باشد ⟵ باید حدها را به چند قسمت تفکیک کرده یا کسر را ساده کرد.

رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ مثلثاتی

اگر f یا g شامل توابع مثلثاتی باشند و حاصل $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ به صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ درآمد به یکی از دو روش ابهام را انجام داده و حاصل حد را می‌یابیم.

۱- هم‌ارزی (بدل)

	هم‌ارزی اولیه	هم‌ارزی ثانویه
$\sin x$	x	$x-\frac{x^۳}{۳!}\to x-\frac{x^۳}{۳!}=x-\frac{x^۳}{۶}$
$\tan x$	x	$x+\frac{x^۳}{۳}$

$x^۳-x^۲-۲x\sim -۲x$ جبری
$x\to ۰$ کم‌توان

$\sin \square \simeq \square$ $\quad$ $\tan \square \simeq \square$ (□ → ۰)

هم‌ارزی کسینوس:

$۱-\cos \square \simeq \frac{\square^۲}{۲!}$ (□ → ۰)

* □ = بسته = یا هر عبارتی که به سمت صفر میل کند.

$\cos^m \square \simeq ۱-m(\frac{\square^۲}{۲})$ (□ → ۰)

هم‌ارزی برنولی $\longrightarrow (۱+x)^n\sim ۱+nx$

$\tan \square - \sin \square \sim \frac{\square^۳}{۲}$ (□ → ۰)

۲- استفاده از روش Hop

حد بی‌نهایت

در این نوع حدها که معمولاً حد توابع کسری هستند به این حالت‌ها برخورد می‌کنیم.

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty \qquad \frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty \qquad \frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$$

حد در بی‌نهایت و رفع ابهام $\frac{\infty}{\infty}$

۱)

$$\lim \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + c}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots} \xrightarrow{\text{قضیه پرتوان}} \begin{cases} 0 & m > n \\ \frac{a}{a'} & m = n \\ \infty & m < n \end{cases}$$

۲)

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[P]{ax^P + bx^{P-1} + \dots} \simeq \sqrt[P]{a}\left(x + \frac{b}{aP}\right)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[2]{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\left|x + \frac{b}{2a}\right| \quad \text{(فرجه‌های زوج قدر مطلق دارد)}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{ax^3 + bx^2 + cx + d} = \sqrt[3]{a}\left(x + \frac{b}{3a}\right)$$

۳) حد توابع جزءصحیح:

$$\left[\text{☁}\right] \sim \text{☁} \qquad \text{☁} \to \pm\infty$$

پیوستگی

۱–پیوستگی در یک نقطه: تابع $f(x)$ در $x = a$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ یعنی حد تابع در نقطه $x = a$ با مقدار تابع در آن نقطه برابر باشد. اگر تابعی در تمام نقاط دامنه‌ی خود پیوسته باشد آن را تابعی پیوسته می‌گوییم.

۲–پیوستگی در یک بازه: در این سوال‌ها وظیفه ما بررسی پیوستگی در نقاط شکستگی دامنه f است و به سایر نقاط دامنه کاری نداریم.

$$f(x) = \begin{cases} \triangle & x \geq a \\ \bigcirc & x < a \end{cases} \Rightarrow \text{بررسی در نقطه } x = a$$

نکته: بنابراین هرگاه تابعی روی یک بازه تعریف شده باشد و در یک نقطه از دامنه خود حداقل یکی از دو شرط (حد داشتن و برابری حد با مقدار) را نداشته باشد پیوسته نیست.

فصل ۴ – مشتق

۱) فرمول‌های مشتق‌گیری

۱) $y=c \rightarrow y'=0$

۲) $y=x \rightarrow y'=1$

۴) $y=k\square^{n} \rightarrow y'=Kn\square^{n-1}\times\square'$ هر عبارت ← □

۵) $y=\frac{1}{x} \rightarrow y'=-\frac{1}{x^2}$ و $y:\frac{1}{\square} \rightarrow y'=\frac{-\square'}{\square^2}$

۶) $y=\frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

۷) ضرب دو عبارت $\bigcirc\times\Delta \rightarrow y'=\bigcirc'\Delta+\bigcirc\Delta'$

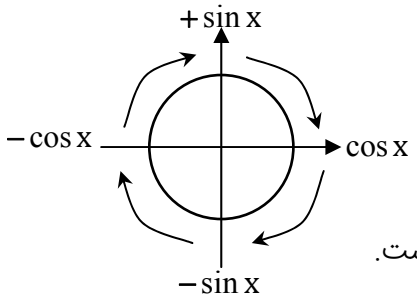
۸) تقسیم دو عبارت $\frac{\bigcirc}{\Delta} \rightarrow y'=\frac{\bigcirc'\Delta-\bigcirc\Delta'}{\bigcirc^2}$

۹) جمع و تفریق $\bigcirc\pm\Delta \rightarrow y'=\bigcirc'\pm\Delta'$

۱۰) $y=\overset{\text{فرجه ۲}}{\sqrt{x}} \rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad y=\overset{\text{فرجه ۲}}{\sqrt{\square}} \rightarrow y'=\frac{\square'}{2\sqrt{\square}}$

۱۱) $y=\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}} \rightarrow y'=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$ $\quad y=\sqrt[n]{\square^m}=\square^{\frac{m}{n}} \rightarrow y'=\frac{m}{n}\square^{\frac{m}{n}-1}\times\square'$

۱۲) $\begin{cases} y=\sin x \rightarrow y'=\cos x \\ y=\cos x \rightarrow y'=-\sin x \end{cases}$



جهت چرخش ساعتگرد مشتق است.

۱۳) $\begin{cases} y=\sin\square \rightarrow y'=\square'\cos\square \\ y=\cos\square \rightarrow y'=-\square'\sin\square \end{cases}$

۱۴) $\begin{cases} y=\tan x \rightarrow y'=1+\tan^2 x \\ y=\cot x \rightarrow y'=-(1+\cot^2 x) \end{cases}$

۱۵) $\begin{cases} y=\tan\square \rightarrow y'=\square'(1+\tan^2\square) \\ y=\cot\square \rightarrow y'=-\square'(1+\cot^2\square) \end{cases}$

نکته: عامل صفرشونده در مشتق‌گیری : (مشتق در ریشه)

در هنگام مشتق‌گیری(معمولاً عبارت‌های طولانی) اگر مشتق تابع را در نقطه $x=a$ از ما بخواهند، اگر تابع در نقطه $\underline{x=a}$ صفر شود از این روش استفاده می‌کنیم.

(مقدار تابع در نقطه $x=a$) × مشتق عامل صفرشونده

مثال: اگر $f(x)=(x^2-x-2)\sqrt[3]{x^2-7x}$ باشد مقدار $f'(-1)=?$

$$f(-1)=(x^2-x-2)=\cancel{(-1)^2}^{+1}-\cancel{(-1)}^{+}-2=0 \quad \text{(عامل صفرشونده)}$$

$$f'(-1)=\underbrace{(2x-1)}_{\text{مشتق عامل صفرشونده}}\times\underbrace{\sqrt[3]{(-1)^2-7(-1)}}_{\text{مقدار تابع در نقطه } x=-1}\rightarrow -3\times 2=-6$$

چند نکته مهم در مشتق‌گیری

۱- اگر قدرمطلق و براکت در تابع وجود داشت اول تکلیف آن‌ها را مشخص کنید و سپس مشتق بگیرد.

۲- تا آنجائی که می‌توان ابتدا تابع را ساده می‌کنیم و سپس مشتق می‌گیریم مخصوصاً در توابع مثلثاتی

مشتق تابع مرکب

اگر y تابعی از u و u تابعی از x باشد آن‌گاه مشتق y نسبت به x را از فرمول زیر به دست می‌آوریم.

$$*\ y=f(u),u=g(x)\rightarrow y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

$$*\ (fog)'_{(x)}=(f(g(x)))'\rightarrow g'(x)\times f'(g(x))$$

تعریف حدی مشتق

مشتق تابع $y=f(x)$ را در $\underline{x=a}$ را به یکی از صورت‌های زیر تعریف می‌کنند:

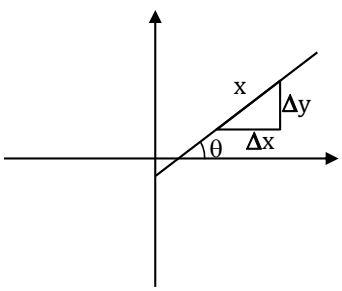
$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{یا} \quad f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

تعریف مشتق چپ و راست.

$$\text{مشتق چپ } f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

$$\text{مشتق راست } f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

نکته: تعبیر هندسی مشتق : شیب خط مماس در نقطه مورد نظر است.



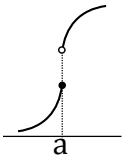
$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(a)=\tan$$

نکته: شرایط مشتق‌پذیری (نگاه ساده) تابعی در نقطه a مشتق‌پذیر است که ۴ مرحله ساختمان روبرو را طی کند.

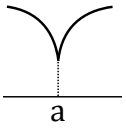
۴	مشتق
۳	مماس‌پذیری
۲	پیوستگی
۱	حد

چند چهره معروف مشتق‌ناپذیری (نمودارشناسی)

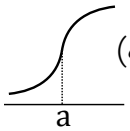
۱- نقاط ناپیوسته (a)

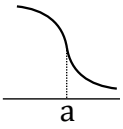


۲- نقاط گوشه یا زاویه‌دار (a)

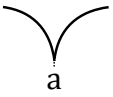


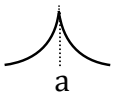
۳- نقاط عطف قائم (برکشیده)





۴- نقاط بازگشتی (a)





آهنگ تغییر تابع

۱- آهنگ تغییر متوسط $[a,b]$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

۲- آهنگ آنی: (لحظه‌ای) = مشتق تابع در آن نقطه (لحظه)

نکته: اگر f تابع درجه دوم (سهمی) باشد آهنگ متوسط در بازه $[a,b]$ با آهنگ لحظه‌ای در $x=\frac{a+b}{2}$ برابر است.

معادله خط مماس و خط قائم

۱- معادله خط مماس و قائم بر منحنی از نقطه A روی منحنی

قائم $m=\frac{-1}{f'(x_A)}$ مماس $m=f'(x_A)$

معادله خط مماس $\Rightarrow y-y_A=f'(x_A)(x-x_A)$

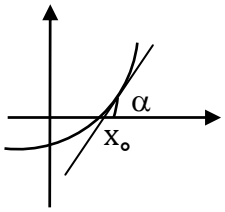
معادله خط قائم $\Rightarrow y-y_A=\frac{-1}{f'(x_A)}(x-x_A)$

زاویه منحنی $f(x)$ با محور xها

زاویه منحنی $f(x)$ با محور xها، همان زاویه خط مماس بر نمودار تابع با محور xها در محل برخورد منحنی f و محور xها می‌باشد.

$$f(x)=0\Rightarrow x=x_0$$

$$f'(x_0)=\tan\alpha$$



زاویه بین دو منحنی

اگر توابع f و g در نقطه‌ای به طول a متقاطع باشند، تانژانت زاویه‌ی بین دو منحنی در نقطه تقاطع برابر است با :

$$\tan\theta = \left|\frac{f'(a)-g'(a)}{1+f'(a).g'(a)}\right|$$

کاربرد مشتق:

۱- نقطه بحرانی:

نقطه‌ای از دامنه‌ی تابع است که در آن نقطه مشتق صفر می‌شود یا مشتق وجود ندارد و هم‌چنین نقاط ابتدایی و یا انتهای دامنه‌ی تابع نقطه‌ی بحرانی محسوب نمی‌شوند.

*** نکته: روش محاسبه‌ی نقاط بحرانی بدین‌صورت است که سریعاً از تابع مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های $f'(x)=0$ طول نقاط بحرانی محسوب می‌شوند.**

***تذکر: ریشه‌های به دست آمده باید عضو دامنه‌ی تابع f باشند.**

۲- اکسترمم‌های مطلق (Max – Min مطلق)

نقطه‌ای اکسترمم مطلق است که عرض آن نقطه بیشتر (Max) یا کم‌تر (Min) از عرض بقیه‌ی نقاط باشد.

***نکته: برای به دست آوردن نقاط اکسترمم مطلق در بازه‌ی $[a,b]$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم:**

۱- طول نقاط بحرانی تابع f را به دست آورده و در تابع f جایگزین می‌کنیم تا عرض آن نقاط به دست آید.

۲- عرض تابع f را در نقاط ابتدا و انتهای بازه یعنی $f(a)$ و $f(b)$ را به دست می‌آوریم.

۳- عرض‌های مرحله ۱ و ۲ را مقایسه می‌کنیم. بیشترین و کم‌ترین عرض‌ها اکسترمم مطلق می‌باشند.

۳- اکسترمم‌های نسبی

محاسبه اکسترمم نسبی:

۱- از تابع مشتق گرفته و جدول تعیین‌علامت رسم می‌کنیم. حال اگر علامت f' در عبور از نقطه (ریشه) تغییر کند اکسترمم نسبی است.

x		a		b		c	
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	−
	↘	Min	↗	Max	↘	هیچ کدام	↘

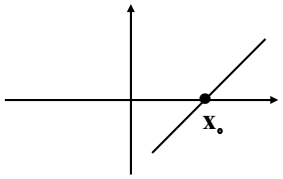
۲- ریشه‌ی مشتق اول $f'(x)$ را در $f''(x)$ مشتق دوم تابع قرار می‌دهیم اگر $f''(x_0)>0 \rightarrow$ ∪ Min

اگر $f''(x_0)<0$ ∩ Max

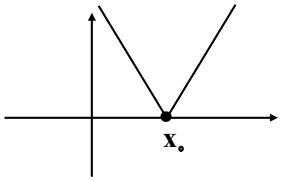
***تذکر: اگر $A(x_A, x_B)$ نقطه‌ی اکسترمم تابع مشتق‌پذیر $y=f(x)$ باشد، آن‌گاه مختصات A در تابع اصلی (f) صدق می‌کند و هم‌چنین $f'(x_A)=0$**

(نمودارشناسی قسمت ۳):

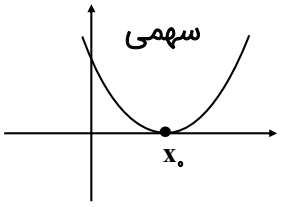
۱) $y = x - x_0$



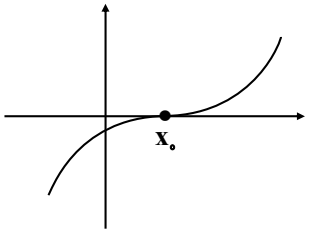
۲) $y = |x - x_0|$



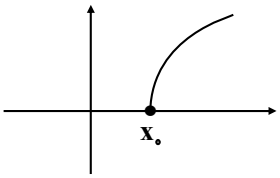
۳) $y = (x - x_0)^2$



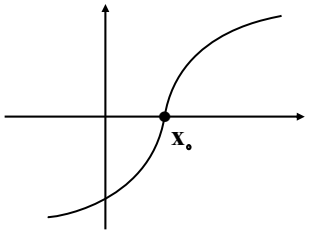
۴) $y = (x - x_0)^3$



۵) $y = \sqrt{x - x_0}$



۶) $y = \sqrt[3]{x - x_0}$



مقاطع مخروطی:

دایره:

۱- معادله‌ی دایره به مرکز $O'(\alpha,\beta)$ و R شعاع دایره: $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$

۲- معادله دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع R: $x^2 + y^2 = R^2$

۳- معادلات دایره‌هایی که بر محورهای مختصات مماس‌اند: $(x \pm \alpha)^2 + (y \pm \alpha)^2 = \alpha^2$

۴- اگر دایره‌ای به شعاع معلوم R در نقطه‌ای به طول α بر محور xها مماس باشد، آن‌گاه: $(x-\alpha)^2 + (y \pm R)^2 = R^2$

۵- اگر دایره‌ای به شعاع معلوم R در نقطه‌ای به عرض β بر محور oy مماس باشد، آن‌گاه: $(x \pm R)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$

۶- ص۳ورت گسترده معادله دایره (ضمنی): $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ و شعاع دایره: $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$ و شرط وجود دایره به معادله‌ی فوق: $a^2 + b^2 - 4c > 0$ و مختصات مرکز $O'(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2})$

۷- بیشترین فاصله یک نقطه تا محیط دایره: $d + R$ و کم‌ترین فاصله یک نقطه از محیط دایره: $|d - R|$ (d فاصله مرکز تا نقطه)

۸- فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ از رابطه‌ی $AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست می‌آید.

۹- بررسی وضع خط و دایره: فاصله‌ی مرکز دایره یعنی $O'(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2})$ را از خط به دست آورده و آن را d می‌نامیم و سپس با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم. اگر $d < r$ خط و دایره متقاطع‌اند، اگر $d = r$ خط بر دایره مماس و اگر $d > r$ نقطه مشترکی ندارند.

۱۰- روابط بین شعاع‌ها و فاصله بین دو دایره‌ی متخارج $|oo'| > r + r'$ و بین دو دایره مماس خارج $|oo'| = r + r'$ و بین دو دایره متقاطع $|r - r'| < oo' < r + r'$ و بین دو دایره مماس داخل $|oo'| = |r - r'|$ و بین دو دایره متداخل $|oo'| < |r - r'|$

۱۱- برای به دست آوردن معادله‌ی وتر مشترک دو دایره‌ی متقاطع و معادله‌ی مماس مشترک داخلی دو دایره‌ی مماس خارج و مماس مشترک دو دایره‌ی مماس داخل، معادله‌ی دو دایره را از هم کم می‌کنیم: $\Delta : (a - a')x + (b - b')y + c - c' = 0$

۱۲- $2\sqrt{R^2 - OH^2}$ = طول وترمشترک دو دایره متقاطع (OH فاصله مرکز دایره تا وترمشترک)

بیضی:

تعریف: مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه ثابت به نام کانون برابر مقدار ثابتی باشد را بیضی گویند.

مقدار ثابت: $2a$، کانون‌ها: F و F'، فاصله‌ی کانونی: $FF' = 2c$، P نقطه دلخواهی از بیضی: $PF + PF' = 2a$

قطر کوچک بیضی: $2b$، قطر بزرگ بیضی: $2a$، رابطه بین a, b, c: $a^2 = b^2 + c^2$، خروج از مرکز بیضی $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

*** بیضی افقی:** محور کانونی FF' موازی محور xها است.

بیضی قائم: محور کانونی FF' موازی محور yها است.

* اگر $2a$ طول قطر بزرگ و $2b$ طول قطر کوچک و $2c$ فاصله کانونی بیضی باشند: $a < b + c, a > |b - c|$

* مساحت بیضی با قطر بزرگ $2a$ و قطر کوچک $2b$: $S = \pi ab$

* در هر بیضی داریم: $AF = a - c$ و $AF' = a + c$ و $FB = FB' = a$

* با بزرگ شدن خروج از مرکز شکل بیضی کشیده‌تر می‌شود و با کوچک شدن آن بیضی به دایره نزدیک‌تر می‌شود.

*طول وتر کانونی در هر بیضی: $\frac{2b^2}{a}$

*بررسی وضعیت یک دایره و یک بیضی نسبت به هم: اگر $2a$ و $2b$ قطرهای بیضی و R شعاع دایره بوده و مرکز دایره و بیضی بر هم منطبق باشند، آن‌گاه:

۱) $R < b$ دایره داخل بیضی است.

۲) $b < R < a$ دایره و بیضی چهار نقطه مشترک دارند.

۳) $R = a$ یا $R = b$ دایره و بیضی در رئوس بیضی بر هم مماس‌اند.

۴) $R > a$ بیضی داخل دایره است.

جمع‌بندی نکته‌های مبحث آمار:

مفاهیم اولیه: دسته‌بندی داده‌ها و جدول

جامعه‌ی آماری: به مجموعه‌ای از اشیاء که می‌خواهیم اطلاعاتی درباره‌ی آن‌ها به دست آوریم گوییم، به تعداد اعضای جامعه، اندازه‌ی جامعه گوییم. یک جامعه می‌تواند محدود یا نامحدود، شما را با غیرقابل شمارش باشد. به عنوان مثال شرکت‌کنندگان در مسابقه‌ی پرش در یک مسابقه، یک جامعه‌ی متناهی شما را خواهد بود. اما اعداد حقیقی بازه‌ی $|۳,۴|$ شما را نیست.

متغیر تصادفی: مشخصه‌ی ویژه‌ای از افراد جامعه را که می‌خواهیم مورد مطالعه قرار دهیم، متغیر تصادفی می‌نامیم، به عنوان مثال ارتفاع پرش ورزشکاران در مسابقه‌ی پرش ارتفاع، یک متغیر تصادفی است، متغیرها به دو دسته‌ی کمی و کیفی تقسیم می‌شوند:

الف) متغیر کمی:

۱- متغیر کمی پیوسته: این نوع متغیرها قابل اندازه‌گیری‌اند، مانند حجم، طول، وزن و ...

۲- متغیر کمی گسسته: که قابل شمارش هستند. مانند تعداد افراد دارای مدرک لیسانس در یک اداره

ب) متغیر کیفی:

۱- متغیر کیفی ترتیبی: در این نوع متغیرها نوعی ترتیب مطرح است. مانند مراحل تحصیلی، مراحل رشد یک انسان

۲- متغیر کیفی اسمی: در این نوع متغیرها ترتیب مطرح نیست. مانند گروه خونی افراد، سردی و گرمی هوا

بنابراین به طور کلی متغیرهای کمی، قابل اندازه‌گیری با شمارش هستند ولی متغیرهای کیفی قابل اندازه‌گیری یا شمارش نیستند.

*** نمونه:** اگر به علت وسعت جامعه، نتوانیم تمام آن را مطالعه کنیم، بخشی از آن را به عنوان نمونه انتخاب می‌کنیم. اطلاعات حاصل از نمونه را داده می‌نامیم و با x_i نمایش می‌دهیم. تعداد افراد یا اشیایی را که در نمونه انتخاب می‌کنیم، حجم یا اندازه‌ی نمونه می‌نامیم. آمارگیری را به دو روش انجام می‌دهیم. یک به روش نمونه‌گیری که بخشی از جامعه را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و دیگری به روش سرشماری که تمام افراد جامعه مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

شاخص‌های آماری:

شاخص‌های مرکزی:

مهم‌ترین شاخص‌های مرکزی را در زیر می‌بینیم.

۱- مُد: داده‌ای که فراوانی آن از همه‌ی داده‌ها بیشتر است را مُد یا نما گوییم.

در مثال نمونه‌ی (۲)، عدد ۱۵ چهار بار تکرار شده است. پس مَد آن ۱۵ است.

***تذکر (۲): ممکن است یک جامعه‌ی چندمدی باشد یا اصلاً مد نداشته باشد؟!**

۲- میانه: چنان‌چه داده‌ها را به ترتیب صعودی مرتب کنیم، عنصر وسط (وقتی تعداد داده‌ها فرد است) یا میانگین دو عنصر وسط (وقتی تعداد داده‌ها زوج است) را میانه می‌گوییم.

در مثال نمونه‌ی (۲)، تعداد داده‌ها ۳۰ تاست. پس دو عنصر پانزدهم و شانزدهم در وسط قرار می‌گیرند که ۱۸ و ۱۸ خواهند بود. پس میانه ۱۸ ا ست.

***نکته: اگر به داده‌های آماری K واحد بیفزاییم، مُد و میانه به اندازه‌ی K واحد افزایش می‌یابند.**

اگر داده‌ها را K برابر کنیم، میانه و مُد، K برابر می‌شوند.

۳- چارک‌ها: میانه‌ی نیمه‌ی اول داده‌ها را چارک اول (Q_1) و میانه‌ی نیمه‌ی دوم داده‌ها را چارک سوم (Q_3) می‌نامیم. چارک دوم همان میانه است.

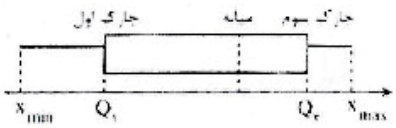
*** مثال: چارک اول و دوم و سوم داده‌های $(1,1,2,4,5,8,9,11,13)$ را بیابید.**

* **حل:** از آن‌جایی که ۹ داده داریم، چارک دوم دقیقاً میانه یعنی ۵ است. چارک اول میانه‌ی چهار عدد اول است و چارک سوم میانه‌ی چهار عدد سمت راست چارک دوم است.

$$\text{چارک اول} = \frac{۱+۲}{۲} = \frac{۳}{۲} \quad \text{میانه} \quad ۵ \quad \text{چارک سوم} = \frac{۹+۱۱}{۲} = ۱۰$$

$$۱,۱,۲,۴, \quad ۵ \quad ,۸,۹,۱۱,۱۳$$

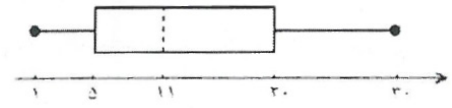
۴- نمودار جعبه‌ای: نموداری است که بر روی آن پارامترها به شکل زیر نمایش داده می‌شود.



در این نمودار باید پنج مقدار، کوچک‌ترین داده (a)، چارک اول Q_1، میانه، چارک سوم (Q_3) و بزرگ‌ترین داده (b) را در نظر بگیریم.

*** مثال: نمودار جعبه‌ای داده‌های ۱,۵,۹,۱۱,۱۷,۲۰,۳۰ را رسم کنید.**

***حل:** در این داده‌ها $a = ۱$، $b = ۳۰$ و میانه و چارک اول $Q_1 = ۵$ و چارک سوم $Q_3 = ۲۰$ است. پس:



۵- میانگین: برای داده‌های $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ میانگین n داده برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}$$

در مثال نمونه‌ی (۱)، میانگین ۳,۳,۱,۲,۵,۴ برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{۳+۳+۱+۲+۵+۴}{۶} = ۳$$

***تذکر (۳): با استفاده از جدول توزیع فراوانی میانگین برابر است با:**

مرکز	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
فراوانی	f_1	f_2	$\cdots$	f_n

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i}$$

که در آن $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$، مرکز دسته‌ها را نمایش می‌دهد.

در مثال نمونه‌ی (۲)، با توجه به جدول توزیع فراوانی میانگین برابر است با:

مرکز	۷	۱۳	۱۹	۲۵	۳۱	۳۷
فراوانی	۴	۹	۷	۴	۳	۳

$$\bar{x} = \frac{۷\times۴ + ۱۳\times۹ + ۱۹\times۷ + ۲۵\times۴ + ۳۱\times۳ + ۳۷\times۳}{۴+۹+۷+۴+۳+۳}$$

$$\bar{x} = ۱۹/۴$$

***نکته:**

۱- اگر همه‌ی داده‌های آماری با هم برابر باشند، میانگین برابر یکی از آن‌هاست.

۲- اگر همه‌ی داده‌ها را در a ضرب کنیم، میانگین a برابر می‌شود و اگر به هر یک از داده‌ها عدد b اضافه کنیم به میانگین b واحد اضافه می‌شود. $(a \neq ۰)$

*** مثال: میانگین $x_1, x_2, \ldots, x_{۱۰}$ برابر ۵ است. میانگین $۱ + ۲x_1, ۱ - ۲x_2, \cdots, ۱ - ۲x_{۱۰}$ را بیابید.**

*** حل:** با توجه به نکته‌ی (۲)، میانگین برابر $۱ - ۲\times۵ = -۹$ است.

***نکته:**

۳- اگر داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند، آن‌گاه میانگین برابر است با: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_n}{2}$

*** مثال:** میانگین اعداد زوج ۲ تا ۲۰۰ را بیابید.

*** حل:** چون اعداد فوق تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند بنابراین $\bar{x} = \frac{2+200}{2} = 101$ خواهد بود.

***نکته:**

۴- اگر داده‌های آماری $1, 2, \cdots, n$ باشند، آن‌گاه: $\bar{x} = \frac{n+1}{2}$

***نکته:**

۵- اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ برابر $\bar{x}$ و $a_1, a_2, \ldots, a_n$، دنباله‌ی حسابی تشکیل دهند، آن‌گاه میانگین $x_1 + a_1, x_2 + a_2, \ldots, x_n + a_n$ برابر است با: $\bar{y} = \bar{x} + \frac{a_1 + a_n}{2}$

شاخص‌های آماری:

شاخص‌های پراکندگی:

شاخص‌های پراکندگی، میزان اختلاف بین داده‌ها را نمایش می‌دهند، مهم‌ترین شاخص‌های پراکندگی به شرح زیر است:

۱- دامنه‌ی تغییرات: اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده است. یعنی $R = b - a$.

***نکته:**

۱- اگر به همه‌ی داده‌های آماری یک عدد بیفزاییم، دامنه‌ی تغییرات تغییر نمی‌کند ولی اگر همه‌ی داده‌های آماری را در یک عدد ثابت ضرب کنیم، دامنه‌ی تغییرات در قدرمطلق آن عدد ضرب می‌شود.

۲- اگر دامنه‌ی تغییرات صفر باشد، همه‌ی داده‌ها با هم برابرند، در این حالت میانگین، میانه و مُد بر هم منطبق‌اند.

۲- انحراف از میانگین: یعنی اختلاف هر داده از میانگین با $x_i - \bar{x}$.

*** مثال:** در داده‌های $1, 2, 3, 4, 5$ انحراف از میانگین داده‌ها را بیابید.

*** حل:** در این داده‌ها میانگین $\bar{x} = \frac{1+5}{2} = 3$ است. پس انحراف از میانگین داده‌ها برابر است با:

$1-3=-2\ ,\ 2-3=-1\ ,\ 3-3=0\ ,\ 4-3=1\ ,\ 5-3=2$

به وضوح دیده می‌شود که مجموع انحراف از میانگین‌ها صفر است.

*نتیجه‌ی ۱: در حالت کلی مجموع انحراف از میانگین‌ها صفر است. یعنی $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0$. $\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x}) = 0$

۳- واریانس: واریانس داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad \text{یا} \quad \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

*** مثال:** واریانس داده‌های $1, 2, 3, 4, 5$ را بیابید.

*** حل:** میانگین داده‌ها $\bar{x} = 3$ است. پس:

$$\sigma^2 = \frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{5} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = 2$$

*** تذکر (٤): اگر جدول توزیع فراوانی موجود باشد، آن‌گاه واریانس برابر است با:**

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} \quad \text{یا} \quad \sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2$$

*** مثال:** واریانس داده‌های جدول روبه‌رو را بیابید.

مرکز	۱	۳	۵	۷	۹
فراوانی	۳	۶	۴	۲	۱

*** حل:**

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{1\times 3 + 3\times 6 + 5\times 4 + 2\times 7 + 9\times 1}{16} = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{3(1-4)^2 + 6(3-4)^2 + 4(5-4)^2 + 2(7-4)^2 + 1(9-4)^2}{16} = \frac{80}{16} = 5$$

۴- انحراف معیار: به جذر واریانس، انحراف معیار می‌گوییم. بنابراین:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad \text{یا} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}}$$

***نکته:**

۱- اگر همه‌ی داده‌های آماری با هم برابر باشند، واریانس و انحراف معیار صفرند.

۲- اگر به همه‌ی داده‌های آماری عددی را بیفزاییم واریانس و انحراف معیار تغییر نمی‌کنند.

۳- اگر همه‌ی داده‌های آماری را در عدد $a \neq 0$ ضرب کنیم واریانس در a^2 و انحراف معیار در $|a|$ ضرب می‌شود.

٤- اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ تشکیل دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت d بدهند، آن‌گاه واریانس برابر است با: $\sigma^2 = \frac{d^2(n^2-1)}{12}$

*** مثال:** واریانس داده‌های $1,3,5,7,9$ را بیابید.

*** حل:** از آن‌جایی که $d = 2$ و $n = 5$ است، پس $\sigma^2 = \frac{2^2(5^2-1)}{12}$ یا $\sigma^2 = 8$.

۵- ضریب تغییرات: انحراف معیار به میانگین را ضریب تغییرات گویند. هرچه ضریب تغییرات به صفر نزدیک باشد داده‌ها، استانداردترند.

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

***نکته: اگر ضریب تغییرات داده‌ها صفر باشد، داده‌ها با هم برابرند.**