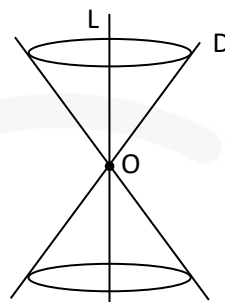
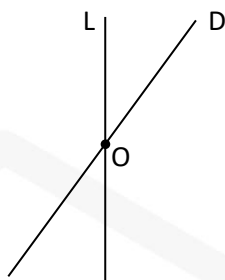


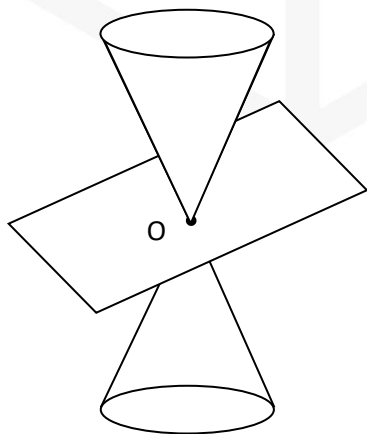


تعریف: فرض کنید دو خط L و D در نقطه O متقاطع‌اند، اگر خط D حول خط L دوران کند، یک رویه مخروطی تشکیل می‌شود.



به نقطه O رأس رویه مخروطی به خط L محور و به خطهای D که در هر لحظه از دوران می‌توان آنها را در نظر گرفت مولدهای رویه مخروطی می‌گوئیم.

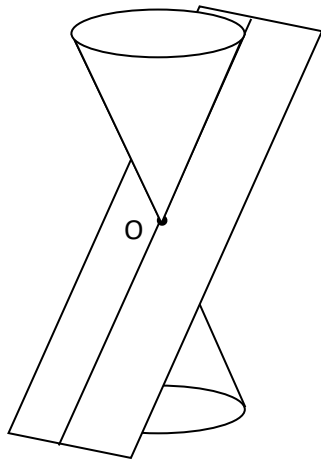
اگر یک صفحه را با یک رویه مخروطی قطع دهیم، مقطع صفحه با رویه یکی از ۷ شکل زیر خواهد بود.



۱- نقطه: اگر اشتراک صفحه با رویه

مخروطی فقط رأس رویه باشد، مقطع

حاصل یک نقطه خواهد بود.

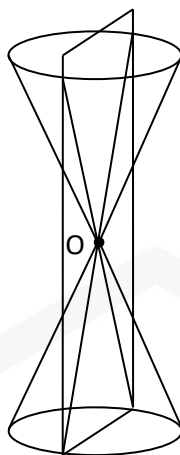


۲- یک خط: اگر صفحه فقط شامل

یک مولد باشد آنگاه صفحه بر رویه

مماس خواهد بود و اشتراک آن با رویه

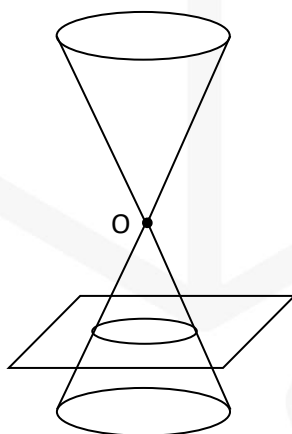
یک خط راست است.



۳- دو خط متقاطع: اگر صفحه شامل

محور رویه باشد، آنگاه اشتراک آن با

رویه دو خط متقاطع است.

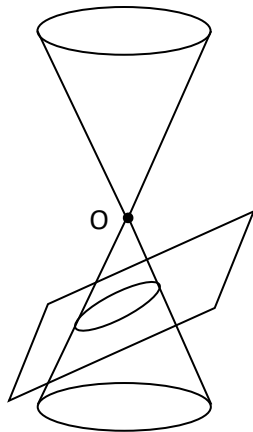


۴- دایره: اگر صفحه عمود بر محور،

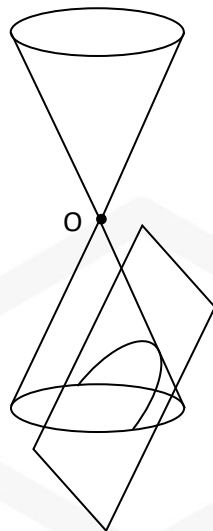
رویۀ مخروطی را قطع کند و از رأس نیز

نگذرد، اشتراک آن با رویه یک دایره

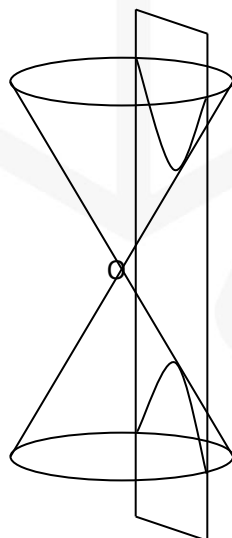
خواهد بود.



۵- بیضی: اگر صفحه بر محور عمود نباشد و با مولد نیز موازی نباشد، و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، اشتراک آن با رویه یک بیضی خواهد بود.



۶- سهمی: اگر صفحه به موازات یکی از مولدها، رویه مخروطی را قطع کند و از راس عبور نکند، اشتراک آن با رویه یک سهمی است.



۷- هذلولی: اگر صفحه هر دو دامنه رویه را قطع کند و شامل محور رویه نباشد، اشتراک آن با رویه دو منحنی مجزا خواهد بود که به آن هذلولی می گوئیم.



مکان هندسی:

مجموعه نقطه‌هایی از صفحه یا فضا است که دارای ویژگی مشترکی هستند، هر نقطه در این مجموعه دارای این ویژگی است و هر نقطه که این ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه می‌باشد.

مکان هندسی‌های معروف:

- ۱- مکان هندسی نقاطی از صفحه که به فاصله ثابتی از یک نقطه قرار دارند: **دایره**
- ۲- مکان هندسی نقاطی از صفحه که به فاصله ثابتی از یک خط قرار دارند: **دو خط موازی**
- ۳- مکان هندسی نقاطی از فضا که به فاصله ثابتی از یک نقطه قرار دارند: **کره**
- ۴- مکان هندسی نقاطی از فضا که به فاصله ثابتی از یک خط قرار دارند: **سطح استوانه‌ای**
- ۵- مکان هندسی نقاطی از فضا که به فاصله ثابتی از یک صفحه قرار دارند: **دو صفحه موازی**
- ۶- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو نقطه به یک فاصله باشند: **عمود منصف پاره خط حاصل**
- ۷- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط موازی به یک فاصله باشند: **خط وسط دو خط موازی**
- ۸- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع به یک فاصله باشند: **نیمسازهای دو خط**
- ۹- مکان هندسی نقاطی از فضا که از دو نقطه به یک فاصله باشند: **صفحه عمود منصف پاره خط حاصل**
- ۱۰- مکان هندسی نقاطی از فضا که از دو صفحه موازی به یک فاصله باشند: **صفحه وسط دو صفحه موازی**
- ۱۱- مکان هندسی نقاطی از فضا که از دو خط متقاطع به یک فاصله باشند: **صفحات گذرنده از نیمسازها و عمود بر صفحه دو خط**
- ۱۲- مکان هندسی نقاطی از فضا که از دو خط موازی به یک فاصله باشند: **صفحه گذرنده از خط وسط و عمود بر صفحه دو خط**

مثال: مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که در یک نقطه مشخص بر یک خط داده شده مماس باشند، کدام است؟
(۱) یک نیم خط (۲) یک دایره (۳) یک خط (۴) دو خط موازی



مثال: مکان هندسی اوساط پاره‌خط‌هایی که نقطه مفروض P را به نقاط مختلف دایره‌ای وصل می‌کنند، عبارت است از:

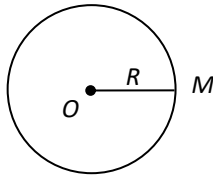
- (۱) دو خط (۲) یک خط (۳) یک نیم‌خط (۴) یک دایره

مثال: مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع مربعات فواصل آنها از دو نقطه ثابت A و B مقداری ثابت باشد؟

- (۱) دایره‌ای به قطر AB (۲) دو خط موازی AB
(۳) خطی عمود بر AB (۴) دایره‌ای به مرکز وسط AB

مثال: دو خط موازی d و d' به فاصله ۵ از یکدیگر مفروض‌اند، مکان هندسی نقاطی از صفحه که تفاضل فواصل آنها از دو خط ۴ باشد کدام است؟

- (۱) یک خط موازی d (۲) دو خط موازی d (۳) یک خط عمود بر d (۴) تهی



دایره: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطه ثابت به فاصله R باشد.

$$OM = R \rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

مثال: معادله دایره ای بنویسید که مرکز آن $O(1, 2)$ باشد و از نقطه $A(2, -1)$ بگذرد

مثال: معادله دایره ای بنویسید که $A(2, -1)$ و $B(4, 1)$ دو سر قطر دایره باشد؟

معادله گسترده

$$OM = R \rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

$$\rightarrow x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 = R^2$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0$$

$$(-2\alpha = a, -2\beta = b, \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = c) \rightarrow \boxed{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0} \quad *$$

$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c$$

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

نکته: شرط اینکه معادله * دایره باشد.

$$(1) \text{ ضریب } x^2 \text{ و } y^2 \text{ برابر یک باشد} \quad (2) \quad a^2 + b^2 - 4c > 0$$

مربع کامل کردن:

$$x^2 + ax = x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$x^2 + 6x = x^2 + 6x + 9 - 9 = (x + 3)^2 - 9$$

$$x^2 - 4x = x^2 - 4x + 4 - 4 = (x - 2)^2 - 4$$



مثال : در دایره‌های زیر مختصات مرکز و شعاع دایره را بیابید.

$$x^2 + y^2 = 10$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 1 = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 - 8x + 1 = 0$$

مثال : به ازای کدام مقدار a نمودار $x^2 + y^2 - 2x + 5y + a = 0$ معادله دایره است؟

نکته: معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ می‌تواند نشان‌دهنده نمودار دایره، نقطه یا تهی باشد.

مثال: نمودار کدام معادله نشان‌دهنده یک دایره است؟

$$2x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 3y + 4 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + 3x - 4y + 5 = 0 \quad (4)$$

$$2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 4 = 0 \quad (3)$$

مثال: معادله دایره ای بنویسید که مرکز آن $O(1,1)$ باشد و بر خط $y = 3x + 3$ مماس باشد.

(1) فاصله‌ی مرکز دایره از خط مماس برابر است با شعاع دایره.

(2) فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با :



$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



مثال: معادله دایره ای بنویسید که مرکز آن $O(1,1)$ باشد و خط $3x + 4y + 3 = 0$ از دایره وتری به طول ۶ جدا کند.

مثال: معادله دایره‌ای که از سه نقطه $(1,6)$ ، $(5,0)$ و $(1,0)$ می‌گذرد کدام است؟

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 13 \quad (2)$$

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 32 \quad (1)$$

$$(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9 \quad (4)$$

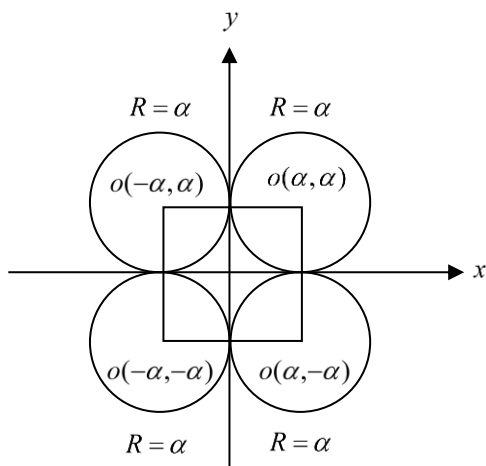
$$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 4 \quad (3)$$

مثال: معادله دایره ای که از دو نقطه $A(1, 2)$ و $B(3, 0)$ بگذرد و مرکز آن روی خط $y = 2x - 1$ باشد، کدام است؟

مثال: شعاع دایره هایی را بیابید که بر محورهای مختصات مماس باشد و از نقطه $M(2, 1)$ بگذرد؟



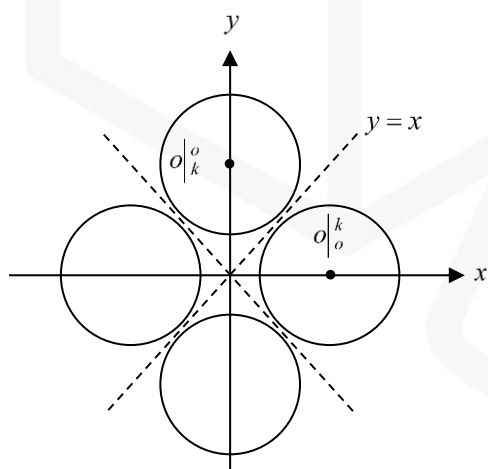
معادله دایره های که بر محورهای مختصات مماس است.



مثال: معادله دایره ای که در ناحیه چهارم بر محورهای مختصات مماس باشد و مرکز دایره روی $y = x - 2$ واقع باشد.

مثال: معادله دایره ای بنویسید که بر نیمسازهای ناحیه اول و چهارم مماس باشد و شعاع دایره $2\sqrt{2}$ باشد.

نکته: معادله دایره ای مماس بر نیمسازها



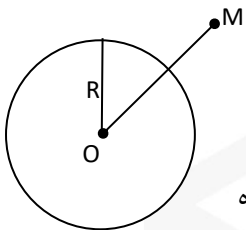
$$R = \frac{|k|}{\sqrt{2}} \text{ شعاع}$$



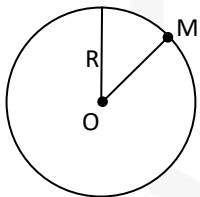
مثال: مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آنها از نقطه $A(2,4)$ به اندازه $\sqrt{2}$ برابر فاصله آنها تا نقطه $B(1,2)$ باشد؟

وضعیت نسبی یک نقطه و یک دایره:

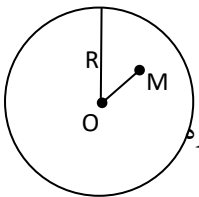
نقطه $M(x_0, y_0)$ و دایره C به معادله $F(x, y) = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - R^2 = 0$ مفروض است، می‌خواهیم وضعیت M را نسبت به دایره بررسی کنیم:



خارج دایره $M \Leftrightarrow OM > R \Leftrightarrow OM^2 > R^2 \Leftrightarrow (x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 > R^2 \Leftrightarrow \underline{F(x_0, y_0) > 0}$



روی دایره $M \Leftrightarrow OM = R \Leftrightarrow OM^2 = R^2 \Leftrightarrow (x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 = R^2 \Leftrightarrow \underline{F(x_0, y_0) = 0}$



داخل دایره $M \Leftrightarrow OM < R \Leftrightarrow OM^2 < R^2 \Leftrightarrow (x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 < R^2 \Leftrightarrow \underline{F(x_0, y_0) < 0}$

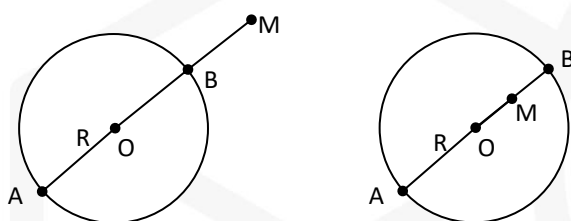


بنابراین برای یافتن وضعیت یک نقطه نسبت به یک دایره کافیست مختصات نقطه را در معادله استاندارد یا گسترده دایره قرار دهیم (در حالتیکه ضریب x^2 و y^2 مثبت باشند) اگر حاصل بزرگتر از صفر شد نقطه خارج دایره، برابر صفر شد نقطه روی دایره و کوچکتر صفر شد نقطه داخل دایره است.

مثال: نقطه $(-3, 2)$ نسبت به دایره $x^2 + y^2 - x + 2y - 16 = 0$ چه وضعیتی دارد؟

دورترین و نزدیکترین نقاط یک دایره نسبت به یک نقطه:

اگر نقطه M و دایره $C(O, R)$ مفروض باشند، برای یافتن بیشترین و کمترین فاصله نقطه M تا یکی از نقاط دایره کافیست نقطه M را به مرکز دایره وصل کنیم و امتداد دهیم تا دایره را در نقاط A و B قطع کند، مطابق شکل‌ها AM بیشترین و BM کمترین فاصله M از نقاط دایره‌اند:



بیشترین فاصله M از نقاط دایره $= OM + R$

کمترین فاصله M از نقاط دایره $= |OM - R|$

مثال: بیشترین و کمترین فاصله نقاط دایره $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ از نقطه $(6, 4)$ کدام است؟

۴ و ۸ (۴)

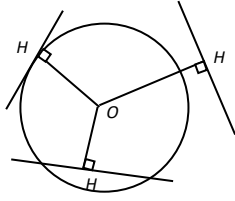
۱ و ۵ (۳)

۳ و ۷ (۲)

۲ و ۶ (۱)



اوضاع نسبی خط و دایره



$OH > R$ خط و دایره متخارج اند.

$OH = R$ خط بر دایره مماس است.

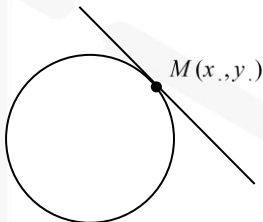
$OH < R$ خط و دایره متقاطع اند.

مثال: خط $3x + 4y + 3 = 0$ و دایره $x^2 + y^2 - 2x - 7 = 0$ نسبت بهم چه وضعی دارد؟

مثال: طول وتری که خط $3x + 4y + 3 = 0$ روی دایره $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$ جدا می کند را بیابید.

معادله خط مماس :

از نقطه روی دایره



کافی است شیب پاره خط OM را بدست آوریم و آن را قرینه معکوس کنیم و سپس با داشتن شیب و یک نقطه ، معادله خط مماس را بنویسیم.

مثال: معادله خطی که از نقطه $M(2, 1)$ بر دایره $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$ رسم می شود را بیابید.



از نقطه خارج دایره

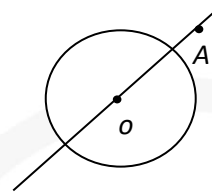
معادله خط‌های گذرنده از نقطه M را با شیب مجهول m نوشته و فاصله مرکز دایره را از این خط برابر شعاع دایره قرار می‌دهیم، از حل این معادله m بدست آمده و می‌توانیم معادله خط مماس را بنویسیم.
مثال: معادلات مماس بر دایره $x^2 + (y - 1)^2 = 5$ را از نقطه $M(0, 4)$ بدست آورید.

معادله خط قائم:

خط قائم همواره از مرکز دایره می‌گذرد و برای نوشتن معادله خط قائم کافی است معادله خطی که از M و مرکز دایره می‌گذرد را بنویسیم.

شیب خط
$$m = \frac{y_m - y_o}{x_m - x_o}$$

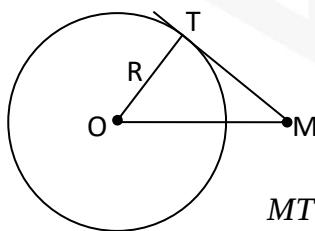
معادله خط قائم
$$y - y_m = m(x - x_m)$$



مثال ۱۸: معادله خط قائم که از نقطه $M(3, 1)$ بر دایره $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ رسم می‌شود را بیابید.

طول مماس بر دایره از یک نقطه مفروض:

اگر $M(x_o, y_o)$ نقطه‌ای خارج دایره به معادله $F(x, y) = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - R^2 = 0$ باشد، طول مماس MT مطابق شکل از روابط زیر بدست می‌آید:



$$MT = \sqrt{OM^2 - R^2} = \sqrt{(x_o - \alpha)^2 + (y_o - \beta)^2 - R^2} = \sqrt{F(x_o, y_o)}$$



یعنی کافیست مختصات نقطه M را در معادله دایره قرار داده و از آن جذر بگیریم.

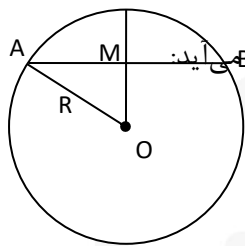
$$MT = \sqrt{F(x_o, y_o)}$$

نکته: اگر بجای معادله استاندارد، معادله گسترده دایره داده شده باشد، برای استفاده از فرمول بالا باید ضرائب x^2 و y^2 در معادله گسترده برابر ۱ باشد.

مثال: طول مماسی که از نقطه $M(1, 3)$ بر دایره $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ رسم می شود را بیابید؟

طول کوتاهترین وتر گذرنده از یک نقطه داخل دایره:

اگر $M(x_o, y_o)$ نقطه‌ای داخل دایره $F(x, y) = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - R^2 = 0$ باشد، کوتاهترین وتر



گذرنده از نقطه M ، وتر عمود بر قطر گذرنده از M است که طول آن مطابق شکل از روابط زیر بدست می آید:

$$AB = 2AM = 2\sqrt{R^2 - OM^2} = 2\sqrt{R^2 - (x_o - \alpha)^2 - (y_o - \beta)^2} = 2\sqrt{-F(x_o, y_o)}$$

$$AB = 2\sqrt{-F(x_o, y_o)}$$

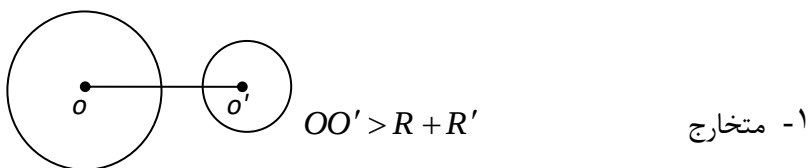
نکته: اگر بجای معادله استاندارد، معادله گسترده دایره داده شده باشد، برای استفاده از فرمول بالا ضرائب x^2 و y^2 در معادله گسترده برابر ۱ باشد.

مثال: طول کوتاه ترین وتری از دایره $x^2 - 4x + y^2 - 2y = 4$ که از نقطه $A(1, 1)$ می گذرد را بیابید.

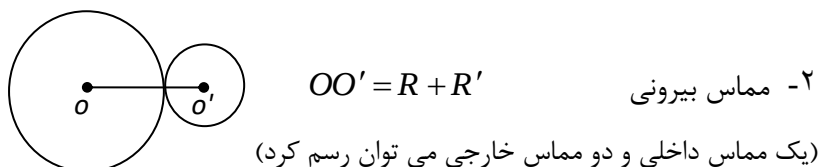
مثال: چند وتر به طول ۳ در دایره $x^2 + (y-1)^2 = 25$ می توان رسم کرد که از نقطه $(2, 3)$ بگذرد؟



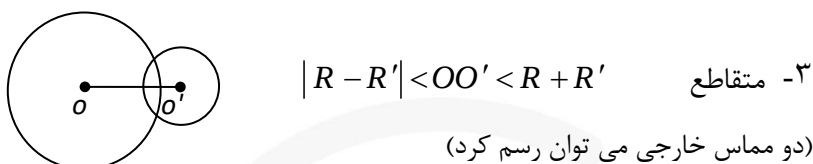
اوضاع نسبی دو دایره :



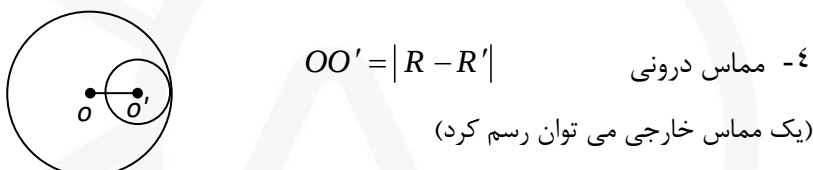
(دو مماس داخلی و دو مماس خارجی می توان رسم کرد)



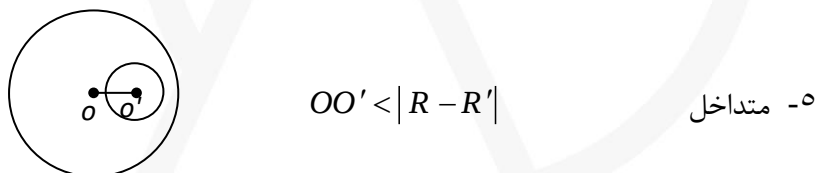
(یک مماس داخلی و دو مماس خارجی می توان رسم کرد)



(دو مماس خارجی می توان رسم کرد)



(یک مماس خارجی می توان رسم کرد)



مثال: دو دایره $x^2 + y^2 + 2x = 0$ و $x^2 + y^2 - 2x = 0$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

مثال: مقدار k برای آنکه دو دایره $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 2y = k$ و $C_2: x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0$ بر هم مماس خارج باشند را بیابید.



مثال: به ازای کدام مقدار b دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ و $x^2 + y^2 - 4y + b = 0$ مماس داخل‌اند؟

(۱) ۵- (۲) ۴-

(۳) ۳- (۴) ۲-

مثال: دو دایره C و C' در نقطه $(0, 1)$ مماس برونی هم هستند. اگر قائم‌های بر دایره C همواره از نقطه $(2, -3)$ بگذرد.

مرکز دایره C' با شعاع $\sqrt{5}$ کدام است؟

(۱) $(-1, 3)$ (۲) $(-1, 2)$

(۳) $(1, -2)$ (۴) $(1, -1)$

طول مماس مشترک‌های داخلی و خارجی دو دایره:

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2}$$

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2}$$

مثال: دو دایره $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ و $x^2 + y^2 - 10x + 21 = 0$ مفروض‌اند، الف) دو دایره نسبت به هم چه

وضعی دارند؟ ب) طول مماس مشترک دو دایره را بدست آورید.

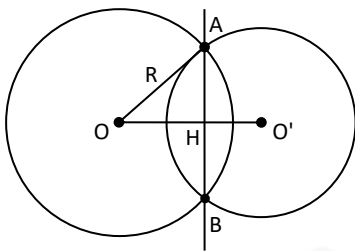


معادله و طول وتر مشترک دو دایره متقاطع:

برای یافتن معادله وتر مشترک دو دایره کافی است با کم کردن معادلات دو دایره از یکدیگر ضرائب x^2 و y^2 را حذف کنیم.

مثال: معادله وتر مشترک دو دایره $x^2 + y^2 - 2x + y - 3 = 0$ و $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ را بدست آورید.

برای بدست آوردن طول وتر مشترک دو دایره، بعد از بدست آوردن معادله وتر مشترک، فاصله مرکز یکی از دایره‌ها را از خط وتر مشترک بدست آورده و با نوشتن رابطه فیثاغورس، نصف وتر مشترک و در نتیجه طول وتر مشترک بدست می‌آید.



$$AH = \sqrt{R^2 - OH^2}$$

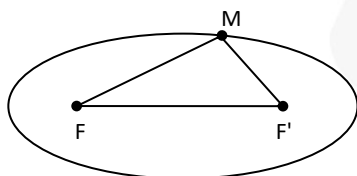
$$AB = 2\sqrt{R^2 - OH^2}$$

نکته: در حالتی که دو دایره مماس داخل یا مماس خارج باشند، با کم کردن معادلات دو دایره از یکدیگر و حذف ضرائب x^2 و y^2 به ترتیب معادله مماس مشترک خارجی و معادله مماس مشترک داخلی بدست می‌آید.

مثال: طول وتر مشترک دو دایره $x^2 + y^2 - 2x = 0$ و $x^2 + y^2 - 2y = 1$ را بیابید.

بیضی

تعریف: مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آنها از دو نقطه ثابت، مقداری ثابت باشد. به دو نقطه ثابت کانونهای بیضی و به مجموع ثابت مقدار ثابت بیضی می‌گوئیم.

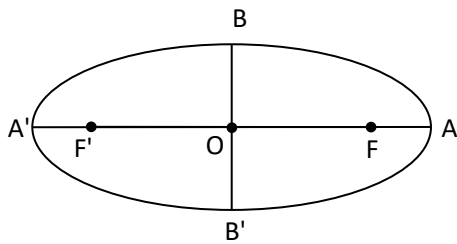


$$MF + MF' = 2a \text{ مقدار ثابت}$$



نکته: مقدار ثابت بیضی را با $2a$ و فاصله دو کانون را با $2c$ نشان می‌دهیم.

نکته: در بیضی طبق نامساوی مثلث همواره $2a > 2c$ و در نتیجه $a > c$ است.



اجزای بیضی:

- ۱- نقاط F و F' کانونهای بیضی نامیده می‌شوند.
- ۲- نقطه O وسط FF' مرکز بیضی نامیده می‌شود که مرکز تقارن بیضی نیز می‌باشد.
- ۳- خط FF' محور کانونی و خط BB' محور ناکانونی بیضی نامیده می‌شوند که این دو خط محورهای تقارن بیضی نیز می‌باشند.
- ۴- نقاط A و A' که محل تلاقی محور کانونی با بیضی هستند، رئوس کانونی و نقاط B و B' که محل تلاقی محور ناکانونی با بیضی هستند رئوس ناکانونی نامیده می‌شوند.
- ۵- هر خط گذرنده از مرکز بیضی قطر بیضی نامیده می‌شود که AA' بزرگترین قطر و BB' کوچکترین قطر بیضی است.
- ۶- طول قطر بزرگ بیضی AA' برابر مقدار ثابت $2a$ است و طول قطر کوچک یعنی BB' را با $2b$ نشان می‌دهند.
- ۷- فاصله هر رأس ناکانونی بیضی از کانونها یعنی BF و BF' برابر a است.
- ۸- فاصله هر کانون از رأس کانونی مجاورش $a - c$ و از رأس کانونی غیرمجاورش $a + c$ است.
- ۹- بین اعداد A و B و C همواره رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است.

خروج از مرکز بیضی :

به نسبت $e = \frac{c}{a}$ خروج از مرکز بیضی گویند و میزان کشیدگی بیضی را مشخص می‌کند. چون $c < a$ است پس

$0 < e = \frac{c}{a} < 1$ است هرچه e بزرگتر باشد بیضی کشیده تر است.

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} \rightarrow e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \rightarrow e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$



مثال: در بیضی با خروج از مرکز $\frac{2}{3}$ ، $e = \frac{2}{3}$ ، فاصله کانون تا نزدیکترین رأس برابر ۲ است، طول قطر بزرگ بیضی چقدر است؟

۱۲ (۴)

۱۸ (۳)

۱۶ (۲)

۸ (۱)

مثال: اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{1}{4}$ و طول قطر کوچک آن ۲ باشد، فاصله کانونی چقدر است؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\sqrt{3}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲)

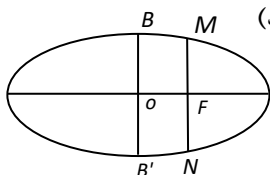
$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۱)

مثال: در یک بیضی با فاصله کانونی ۱۶، مساحت لوزی حاصل از بهم وصل کردن سر قطرها برابر ۱۲۰ می باشد، خروج از مرکز بیضی را بدست آورید.

وتر کانونی :

در یک بیضی با قطرهای $2a$ و $2b$ طول وتر کانونی (وتری که در کانون بر قطر بزرگ عمود می شود)

برابر است با $\frac{2b^2}{a}$.





مثال: در بیضی با قطرهای AA' و BB' ، F کانون و مساحت مثلث $A'BF$ چهاربرابر مساحت مثلث ABF است،

خروج از مرکز بیضی کدام می‌باشد؟

$\frac{3}{5}$ (۴)

$\frac{2}{5}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

مثال: نقطه M روی بیضی به کانون‌های F و F' به گونه‌ای قرار دارد که MF و MF' برهم عمودند، حاصل MF'

$MF \times$ کدام است؟

$ab\sqrt{a^2 + b^2}$ (۴)

$2c^2$ (۳)

$2b^2$ (۲)

$2a^2$ (۱)

مثال: اگر B و B' رئوس ناکانونی و F و F' کانون‌های یک بیضی و مثلث BFB' متساوی‌الاضلاع باشد، نسبت $\frac{c}{b}$ کدام

است؟

$\sqrt{3}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲)

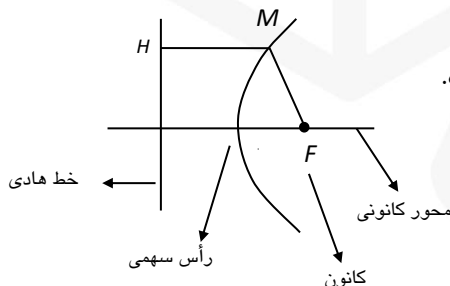
$\sqrt{2}$ (۱)

سهمی :

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطه و یک خط به یک فاصله است.

$$MF = MH$$

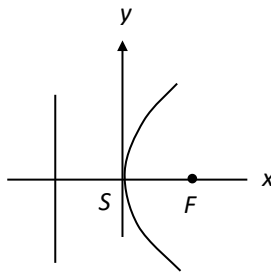
$$SF = a = \text{پارامتر سهمی}$$





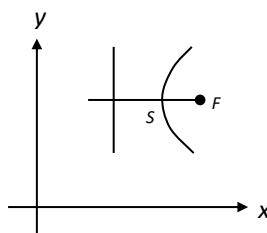
سهمی افقی :

حالت اول : محور کانونی منطبق بر محور x ها است.



$$\begin{array}{l} S \left| \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \quad F \left| \begin{array}{c} a \\ \cdot \end{array} \right. \\ \text{معادله سهمی} \quad y^2 = \pm ax \\ \text{معادله خط هادی} \quad x = -a \end{array}$$

حالت دوم : محور کانونی موازی محور x ها



$$\begin{array}{l} S \left| \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \right. \quad F \left| \begin{array}{c} \alpha + a \\ \beta \end{array} \right. \\ \text{معادله سهمی} \quad (y - \beta)^2 = \pm a(x - \alpha) \\ \text{معادله خط هادی} \quad x = \alpha - a \end{array}$$

ویژگی سهمی افقی :

- ۱- در معادله سهمی افقی توان y دو است.
- ۲- خط هادی موازی محور y ها است و معادله آن بصورت $x = \alpha - a$ است.
- ۳- اگر $a > 0$ تعقر به سمت راست است و $a < 0$ تعقر بسمت چپ است.

مثال: معادله سهمی بصورت $(y-1)^2 = 8(x+1)$ است مختصات رأس و کانون و معادله خط هادی را بیابید.

مثال: معادله سهمی بصورت $(y-1)^2 = -8(x+1)$ است مختصات رأس و کانون و معادله خط هادی را بیابید.



مثال: معادله سهمی بنویسید که $F(1, 3)$ کانون و $x = 5$ خط هادی آن باشد.

مثال: سهمی به کانون $(2, 1)$ و خط هادی به معادله $x = -3$ محور x ها را با کدام طول قطع می کند؟

$$\begin{array}{ll} -\frac{1}{2}(2) & \frac{1}{2}(1) \\ -\frac{1}{4}(4) & \frac{1}{4}(3) \end{array}$$

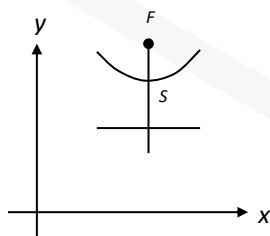
مثال: سهمی به کانون $F(3, 2)$ و خط هادی به معادله $x = -1$ ، محور x ها را در نقطه A قطع می کند. فاصله نقطه A تا

کانون سهمی کدام است؟

$$\begin{array}{ll} 2/5 (2) & 2/25 (1) \\ 3 (4) & 2/5 (3) \end{array}$$

سهمی قائم:

محور کانونی موازی محور y ها است.



$$S \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$$

معادله سهمی

معادله خط هادی

$$F \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta + a \end{vmatrix}$$

$$(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)$$

$$y = \beta - a$$

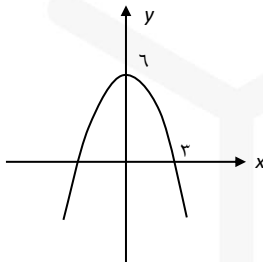


ویژگی سهمی قائم :

- ۱- در معادله قائم توان x دو است.
- ۲- خط هادی موازی محور x ها است و معادله آن بصورت $y = \beta - a$ است.
- ۳- اگر $a > 0$ تقعر به سمت بالاست و اگر $a < 0$ تقعر بسمت پایین است.

مثال : در سهمی $(x-1)^2 = -8(y+1)$ معادله خط هادی را بیابید.

مثال: معادله سهمی را بنویسید که $F(1, 2)$ و $y = -4$ خط هادی باشد.



مثال: در سهمی مقابل معادله خط هادی را بیابید.

مثال: معادله سهمی را بنویسید که بر محور x ها در نقطه ای به طول ۲ مماس باشد و از نقطه $M(0, 2)$ بگذرد.



مثال : - نقطه‌ی $S(2, 1)$ رأس یک سهمی است که محور تقارن آن موازی محور y ها است. و از نقطه‌ی $(5, 0)$ می

گذرد. معادله‌ی خط هادی آن، کدام است؟

$$y = \frac{1}{4} \quad (1) \quad y = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$y = \frac{3}{4} \quad (3) \quad y = \frac{3}{2} \quad (4)$$

معادله گسترده سهمی :

اگر از معادله گسترده سهمی بخواهیم پارامتر سهمی را بدست آوریم یا باید با مربع کامل کردن معادله را استاندارد کنیم و یا از رابطه زیر استفاده کنیم:

سهمی افقی بصورت $Ay^2 + By + Cx + D = 0$ است که $a = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } (y^2)}$

در سهمی قائم بصورت $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$ است که $a = -\frac{\text{ضریب } y}{\text{ضریب } (x^2)}$

مثال: معادله خط هادی سهمی $2y^2 - 3x - 4y = 1$ کدام است؟

مثال: راس و کانون سهمی $4x^2 - 8x + 3y + 1 = 0$ بیابید.

مثال: فاصله کانون سهمی به معادله $2y^2 + 15 = 3(x + 4y)$ از خط هادی آن کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (1) \quad \frac{2}{3} \quad (2) \quad \frac{4}{3} \quad (3) \quad \frac{2}{2} \quad (4)$$



مثال: به ازای کدام مقدار a در سهمی به معادله $y^2 = ay + 2x + 5$ خط هادی به معادله $x = \frac{-7}{2}$ است.

تشخیص وضعیت یک نقطه نسبت به سهمی:

یک نقطه در صفحه می‌تواند داخل سهمی، روی سهمی یا خارج سهمی باشد، فاصله نقاط داخل، رو و خارج سهمی از کانون به ترتیب کمتر، برابر و بیشتر از فاصله آنها از خط هادی است. برای شناسایی وضعیت نقطه $M(x_0, y_0)$ نسبت به سهمی $F(x, y) = 0$ هنگامی که ضریب درجه ۲ در معادله سهمی مثبت است، کفایت مختصات نقطه را در معادله سهمی قرار داده و $F(x_0, y_0)$ را بدست آوریم:

(۱) اگر $F(x_0, y_0) > 0$ باشد، نقطه خارج سهمی است.

(۲) اگر $F(x_0, y_0) = 0$ باشد، نقطه روی سهمی است.

(۳) اگر $F(x_0, y_0) < 0$ باشد، نقطه داخل سهمی است.

نکته: از نقاط خارج سهمی دو مماس و از نقاط روی سهمی یک مماس بر آن رسم می‌شود، از نقاط داخل سهمی هیچ مماسی بر سهمی نمی‌توان رسم کرد.

نکته: به موازات هر خط می‌توان بر سهمی مماس رسم کرد فقط خطی مماس بر سهمی به موازات محور تقارن نداریم.

مثال: از نقطه $A(k, k)$ دو مماس بر منحنی $y = 4x^2$ رسم می‌شود، حدود k کدام است؟

مثال: به ازای کدام مقدار m خطی با شیب m مماس بر سهمی $2y^2 - 3x + y - 2 = 0$ وجود ندارد؟

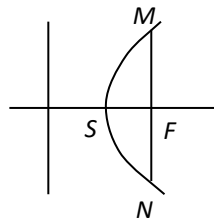
- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) -۲ (۴) ۰



مثال: مکان هندسی مراکز دایره‌هایی که از نقطه $(3,0)$ گذشته و بر خط $x=-1$ مماس باشند کدام است؟

$$(1) \quad y^2 = 8(x+1) \quad (2) \quad y^2 = 4(x-1) \quad (3) \quad y^2 = 8(x-1) \quad (4) \quad x^2 = 8(y+1)$$

وتر کانونی:



وتری که در کانون بر محور کانونی عمود است.

$$MN = \varepsilon |a|$$

مثال: از کانون سهمی به معادله $y^2 - 2y + 4x + 3 = 0$ عمودی بر محور سهمی خارج می‌کنیم تا سهمی را در

نقطه M قطع کند، فاصله M از خط هادی کدام است؟

۳ (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

۴ (۱)



تمرینات مهم کتاب درسی فصل دوم

۱- مکان هندسی هر یک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید :

الف) نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله اند.

ب) مرکزهای همه دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه ثابت A مماس اند.

پ) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس اند.

ت) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O, r)$ در صفحه این دایره مماس خارجی اند.

۲- نقاط A, B, C و D در صفحه مفروض اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).

۳- نقاط A, B, C در صفحه مفروض اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

۴- نقطه A و خط d در صفحه مفروض اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر و از d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

۵- هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چه شکل است؟

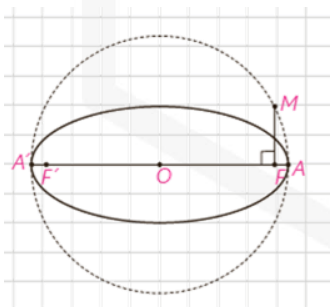
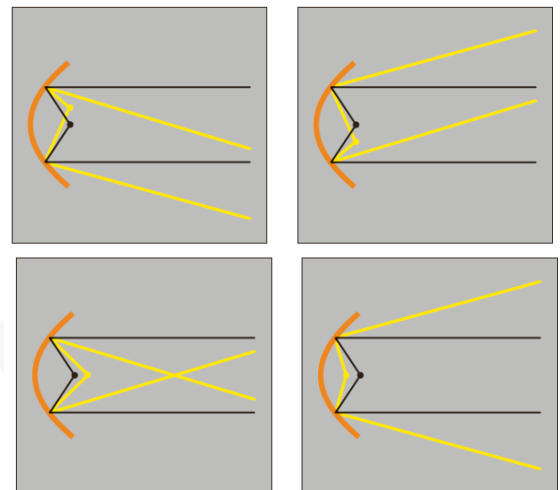
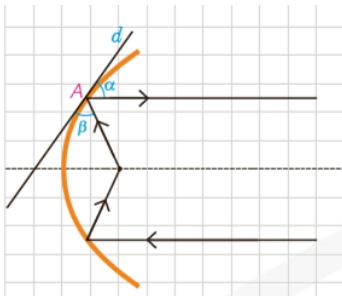
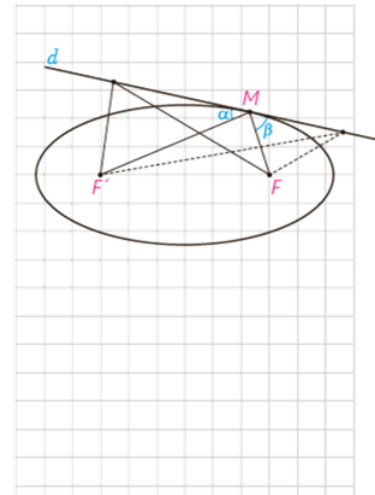
۶- هرگاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l سطحی ایجاد می‌شود که آن را یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال فرض کنید صفحه P ، یک سطح استوانه‌ای را قطع کند. در حالت‌های مختلف درباره سطح مقطع حاصل بحث کنید (چهار حالت).

۵- نقاط $A(-1, -1)$ و $B(1, 1)$ و $C(1, -3)$ رئوس مثلث ABC هستند. معادله دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید. سپس معادله مماس بر این دایره را در رأس B به دست آورید.

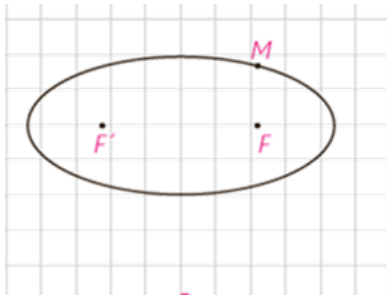


فعالیت ۴

- فرض کنیم خط d مانند شکل مقابل در نقطه M بر بیضی مماس باشد.
- ۱- مجموع فواصل کدام یک از نقاط خط d نسبت به دو کانون F و F' کمترین مقدار را دارد؟ چرا؟
 - ۲- دو زاویه α و β نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟
 - ۳- با توجه به آنچه گفته شد اگر بدنه داخلی یک بیضی آینه ای باشد و از یکی از کانون های بیضی اشعه نوری بر بدنه داخلی بیضی تابیده شود، انعکاس نور از کدام نقطه خواهد گذشت؟ چرا؟

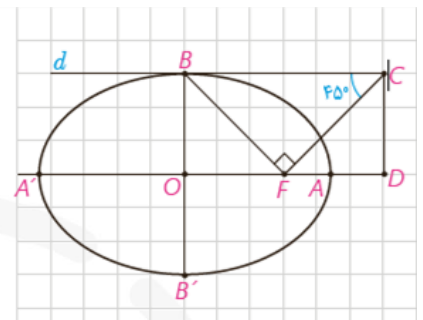


- ۲- قطر دایره C ، مانند شکل، قطر بزرگ بیضی e است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده ایم تا دایره را در نقطه ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



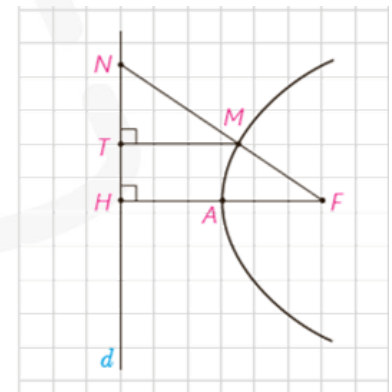
۳- در شکل مقابل نقطه M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF'$

۶- در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطر اند. خط d در نقطه B بر بیضی مماس است. پاره خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطه F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $\angle BCF = 45^\circ$ ، مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به دست آورید.



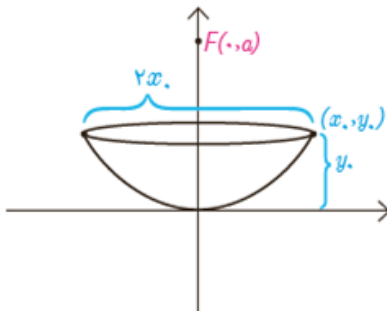
۱۰- سهمی $y^2 = 4x - 4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

۱۲- در شکل سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از نقطه M عمود بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH}$





۱۴- فرض کنید از مثلث ABC ، اندازه ضلع BC و ارتفاع AH و محیط مثلث، داده شده باشد، با استفاده از خواص بیضی شیوه رسم این مثلث را توضیح دهید.





ماتریس :

جدولی به شکل مستطیل که اعداد، با آرایش سطری و ستونی در آن نوشته شده است. به هر یک از این اعداد درایه یا مؤلفه یا عنصر گویند. و به تعداد سطرها ستون ها مرتبه و یا اندازه ماتریس گویند.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \rightarrow A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

a_{ij} منظور از درایه ای است که در سطر i ام و ستون j ام قرار دارد. به ماتریسی که m سطر و n ستون دارد، ماتریس مرتبه $m.n$ گویند.

مثال : ماتریس های $A = [i + j^2]_{2 \times 2}$ و $B = [2i + 3j]_{3 \times 3}$ را بصورت آرایه مستطیلی بنویسید.



چند ماتریس مهم :

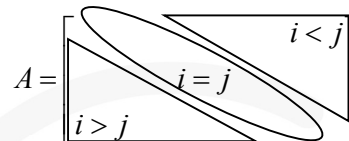
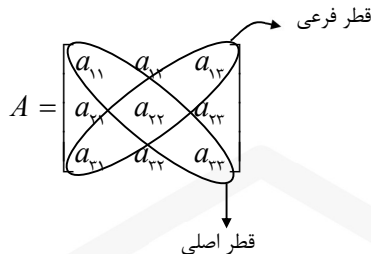
۱- ماتریس سطری : ماتریسی که فقط یک سطر دارد.

$$A_{1 \times n} = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}]_{1 \times n}$$

۲- ماتریس ستونی : ماتریسی که فقط یک ستون دارد.

$$A_{n \times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

۳- ماتریس مربعی : ماتریسی که تعداد سطرها و ستونهای آن برابر است.



اثر ماتریس Trace :

در ماتریس مربعی، مجموع عناصر قطر اصلی را اثر ماتریس می گویند.

مثال : در $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ $a_{ij} = \begin{cases} i+j & i \geq j \\ i-j & i < j \end{cases}$ ماتریس اثر ماتریس را بیابید.

۴- ماتریس قطری (قطر اصلی) : ماتریس مربعی که عناصر خارج قطر اصلی آن صفر باشند.

$$D = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & c \end{bmatrix} \quad a_{ij} = \cdot \quad i \neq j$$

۵- ماتریس قطر فرعی : ماتریس مربعی که عناصر خارج قطر فرعی آن صفر است.

$$D = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & a \\ \cdot & b & \cdot \\ c & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$



۶- ماتریس اسکالر : هر ماتریس قطری که عناصر اصلی آن برابر باشند.

$$D = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & a & \cdot \\ \cdot & \cdot & a \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} a_{ij} &= 0 & i \neq j \\ a_{ij} &= a & i = j \end{aligned}$$

ماتریس همانی (واحد) : هر ماتریس اسکالر که داراییه‌های روی قطر اصلی یک باشد.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

۷- ماتریس بالا مثلثی : ماتریس مربعی که عناصر زیر قطر اصلی آن صفر باشند.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ \cdot & d & e \\ \cdot & \cdot & f \end{bmatrix} \quad a_{ij} = 0 \quad i > j$$

۸- ماتریس پایین مثلثی : ماتریس مربعی که عناصر بالای قطر اصلی آن صفر باشند.

$$A = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ b & d & \cdot \\ c & e & f \end{bmatrix} \quad a_{ij} = 0 \quad i < j$$

مثال: ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ با داراییه‌های $a_{ij} = \begin{cases} a^2 - 3ai + 2i^2 & : i < j \\ a^2 - 3aj + 2j^2 & : i \geq j \end{cases}$ مفروض

است، به ازای کدام مقدار a ، ماتریس A یک ماتریس قطری است؟



تساوی دو ماتریس: دو ماتریس A و B مساوی اند هرگاه هم مرتبه بوده و درایه های متناظر آنها مساوی باشد.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} x+2y & -1 \\ t+1 & z \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & 2x+3y \\ y-1 & -t+1 \end{bmatrix}$ و $A=B$ باشد، حاصل $x+y+z+t$ را بدست آورید؟

جمع دو ماتریس: عمل جمع فقط برای دو ماتریس هم مرتبه تعریف می شود که در این صورت درایه های متناظر دو ماتریس باهم جمع شده و درایه های ماتریس مجموع را تشکیل می دهند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A_{m \times n} + B_{m \times n} = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

ضرب عدد در ماتریس: اگر $A = [a_{ij}]$ ماتریسی از مرتبه $m \times n$ و k عددی حقیقی باشد، ماتریس kA ماتریسی است از مرتبه $m \times n$ که درایه های آن از ضرب درایه های ماتریس A در عدد k بدست می آیند.

$$2 \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 10 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$kA_{m \times n} = k[a_{ij}] = [ka_{ij}]_{m \times n}$$

مثال: اگر $3A + 2B = I$ و $A - B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ مجموع درایه های ماتریس A کدام است؟



نکته: اعمال جمع، تفریق و ضرب عدد در ماتریس خواص مشابهی با این اعمال در اعداد حقیقی دارند،

بنابراین در ساده کردن عبارات ماتریسی که فقط شامل جمع، تفریق و ضرب عدد در ماتریس باشند می توان

آنها را عدد فرض نمود و عبارات را ساده کرد.

ضرب دو ماتریس: اگر $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ باشند، حاصلضرب AB ماتریسی است از

مرتبه $m \times p$ مانند $C = [C_{ij}]_{m \times p}$ که درایه های آن به شکل زیر محاسبه می شوند:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

به عبارت دیگر درایه سطر i ام و ستون j ام ماتریس حاصلضرب، عبارت است از ضرب سطر i ام ماتریس A

در ستون j ام ماتریس B :

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

مثال : ضرب های زیر را انجام دهید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} =$$

مثال : اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ باشد درایه سطر دوم ستون سوم (AB) را بیابید.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ باشد ثابت کنید: $AB=BA=O$



ویژگیهای ضرب ماتریسها:

- ۱- ضرب ماتریسها دارای خاصیت جابجائی نمیباشد:
- اگر برای دو ماتریس A و B داشته باشیم $AB=BA$ دو ماتریس را جابجاشونده یا تعویض پذیر می نامیم.
- ۲- ضرب ماتریسها دارای خاصیت شرکت پذیری می باشد:
- ۳- ضرب ماتریسها دارای خاصیت توزیع پذیری می باشد:
- ۴- ضرب ماتریسها دارای عضو خنثی می باشد:
- ۵- در ضرب ماتریسها خاصیت حذف برقرار نمی باشد:
- نکته:** در ضرب ماتریسها ممکن است $AB=0$ باشد ولی هیچکدام از ماتریسهای A یا B صفر نباشند.
- نکته:** اگر دو ماتریس جابجاشونده باشند، تمام قوانین ضرب اعداد حقیقی از جمله اتحادها در مورد آنها صادق خواهد بود، بعنوان مثال اگر $AB=BA$ باشد آنگاه:

$$(A - B)(A + \epsilon B) = A^{\epsilon} + \epsilon AB - \epsilon B^{\epsilon}$$

$$(A + B)^{\epsilon} = A^{\epsilon} + \epsilon AB + B^{\epsilon}$$

$$(AB)^n = A^n B^n$$

نکته: اگر ماتریسهای A و B جابجاشونده نباشند، حاصل عبارتهای بالا را باید بصورت زیر بنویسیم:

$$(A - B)(A + \epsilon B) = A^{\epsilon} - BA + \epsilon AB - \epsilon B^{\epsilon}$$

$$(A + B)^{\epsilon} = (A + B)(A + B) = A^{\epsilon} + AB + BA + B^{\epsilon}$$

$$(AB)^n = (AB)(AB)(AB) \dots (AB)$$

نکته: ماتریس I با هر ماتریس هم مرتبه اش جابجاشونده است:

$$(A - I)(A + I) = A^{\epsilon} - I^{\epsilon} = A^{\epsilon} - I$$



نکته: اگر ماتریس A را بتوان بصورت یک چندجمله‌ای برحسب ماتریس B نوشت آنگاه A و B

جابجاشونده‌اند:

$$A = \lambda B^2 - 2B + I \Rightarrow AB = BA$$

نکته: اگر A یک ماتریس مربعی باشد:

$$A^m \times A^n = A^n \times A^m = A^{m+n}$$

ماتریس خودتوان: ماتریس مربع A را خودتوان گوئیم هرگاه $A^2 = A$ ، مشخص است که اگر A خودتوان

$$A^n = A, \quad n \text{ عدد طبیعی}$$

ماتریس پوچ‌توان: ماتریس مربع A را پوچ‌توان گوئیم هرگاه توانی از این ماتریس برابر 0 شود $A^k = 0$ ، در

این‌صورت تمام توان‌های بزرگتر از k نیز در این ماتریس برابر 0 خواهند بود.

نکته: ماتریس‌های بالامثلثی یا پائین‌مثلثی که درایه‌های روی قطر اصلی آنها صفر است، ماتریس‌هایی

پوچ‌توان‌اند و اگر مرتبه ماتریس n باشد، حداکثر به ازاء عدد طبیعی n : $A^n = 0$.

ضرب ماتریس‌های مثلثی: اگر A و B دو ماتریس بالامثلثی باشند، حاصلضرب آنها نیز بالامثلثی است و اگر

دو ماتریس پائین‌مثلثی باشند، حاصلضرب آنها نیز پائین‌مثلثی است، در هر دو صورت درایه‌های روی قطر

اصلی ماتریس حاصل برابر است با حاصلضرب درایه‌های متناظر در قطر اصلی دو ماتریس A و B .

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & * & * \\ 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

نکته: در توان ماتریس‌های مثلثی، درایه‌های روی قطر اصلی به همان توان می‌رسند:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} a_{11}^k & & & \\ & a_{22}^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}^k \end{bmatrix}$$



ضرب ماتریس‌های قطری: اگر A و B دو ماتریس قطری باشند، حاصلضرب آنها نیز قطری است و درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس حاصل برابر است با حاصلضرب درایه‌های متناظر در قطر اصلی دو ماتریس A و B .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

توان ماتریس‌های قطری: اگر A یک ماتریس قطری باشد، A^k نیز یک ماتریس قطری است که هر درایه روی قطر اصلی آن برابر است با توان k ام درایه متناظر در قطر اصلی ماتریس A .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} a_{11}^k & & & \\ & a_{22}^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}^k \end{bmatrix}$$

نتیجه: اگر I ماتریس همانی باشد همواره $I^k = I$.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد درایه سطر دوم ستون سوم A^r را بیابید.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد ماتریس A^{100} کدام است؟

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد ماتریس A^{100} کدام است؟



مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ در ماتریس A^{100} حاصل جمع درایه ها کدام است؟

مثال: اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد در ماتریس A^{100} مجموع درایه ها کدام است؟

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد A^{100} را بیابید.

مثال: اگر A یک ماتریس مربع مرتبه n باشد و داشته باشیم $A^2 - A + I = O$ حاصل A^4 را بر حسب A به دست آورید.

مثال: مجموع ریشه های معادله $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۳ (۴) -۳



مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، درایهٔ سطر اول و ستون سوم A^3 کدام است؟

۲ (۴)

-۱ (۳)

۰ (۲)

۱ (۱)

مثال: اگر $A = A^2 - I$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

$A^5 = 5I + 3A$ (۴) $A^5 = 5I - 3A$ (۳) $A^5 = 5A + 3I$ (۲) $A^5 = 5A - 3I$ (۱)





دترمینان :

عددی است که به ماتریس های مربعی نسبت می دهند. با $|A|$ یا $\det A$ نمایش می دهند.

در ماتریس 2×2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

کهاد ij ام A : ماتریسی است که از حذف سطر i ام ستون j ام ماتریس A بدست می آید و با M_{ij} نمایش می دهند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

همسازه ij ام A : عددی است برابر $|M_{ij}|$ با $(-1)^{i+j}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6$$

وضعیت ضریب $(-1)^{i+j}$ در ماتریس 3×3

$$\begin{bmatrix} a_{11}^+ & a_{12}^- & a_{13}^+ \\ a_{21}^- & a_{22}^+ & a_{23}^- \\ a_{31}^+ & a_{32}^- & a_{33}^+ \end{bmatrix}$$



محاسبه دترمینان

روش بسط: اگر A یک ماتریس 3×3 (یا مراتب بالاتر) باشد دترمینان آن برابر است با مجموع حاصل ضرب درایه‌های یک سطر (یا یک ستون) در همسازهای خود مثلاً:

$$\text{بسط حول سطر اول} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = aA_{11} + bA_{12} + cA_{13}$$

دترمینان را می‌توان حول هر سطر یا هر ستون به شکل فوق بسط داد.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = +2 \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}}_{-3} - 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}}_{-6} + 4 \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}}_{-3} = -6 + 18 - 12 = 0$$

مثال: حاصل دترمینان مقابل را بیابید؟

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

مثال: به ازاء کدام مقدار a دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 9 & 7 & a \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ برابر ۲۲ است؟

مثال: به ازاء کدام مقدار K معادله دترمینان $\begin{vmatrix} x & 0 & k \\ 1 & x+1 & 0 \\ 2 & 0 & x+2 \end{vmatrix} = 0$ فقط یک ریشه دارد؟



دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس 3×3 :

ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ را در نظر گرفته و این ماتریس را دوبار کنار هم می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

مجموع حاصلضرب هریک از درایه‌های روی خط‌های مورب چپ و راست را محاسبه نموده و تفاضل این

مجموع را مطابق رابطهٔ زیر بدست می‌آوریم:

$$|A| = (aei + bfg + cdh) - (afh + bdi + ceg)$$

مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس A بر طبق روش ساروس به ترتیب زیر محاسبه

می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad |A| = (-12 - 18 + 20) - (12 + 45 + 8) = -75$$

مثال : حاصل دترمینان مقابل را بیابید.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} =$$



ویژگی های دترمینان :

(۱) اگر تمام درایه های یک سطر یا یک ستون ماتریس صفر باشد دترمینان ماتریس صفر است:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

(۲) اگر دو سطر یا دو ستون ماتریس برابر باشد دترمینان ماتریس صفر است.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

(۳) اگر یک سطر (یا یک ستون) ماتریس، مضربی از یک سطر (یا ستون) دیگر باشد، دترمینان صفر خواهد بود.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ka & kb & kc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & ka & d \\ b & kb & e \\ c & kc & f \end{vmatrix} = 0$$

(۴) اگر درایه های یک سطر یا یک ستون K برابر شود دترمینان ماتریس K برابر می شود.

(۵) اگر همه درایه ها K برابر شود دترمینان ماتریس K^n برابر می شود. (n مرتبه ماتریس است)

(اگر عددی از دترمینان خارج شود به توان مرتبه می رسد)

$$|KA| = K^n |A|$$

$$|A + B| \neq |A| +$$

$$|AB| = |A| |B|$$

$$|A_1 A_2 \dots A_n| = |A_1| |A_2| \dots |A_n|$$

$$|A^n| = |A|^n$$

$$|-A| = (-1)^n |A|$$

(۶) دترمینان ماتریس بالا مثلثی، پایین مثلثی برابر حاصل ضرب قطر اصلی است.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = adf$$



(۷) دترمینان ماتریس قطری برابر حاصل ضرب قطر اصلی است.

$$\begin{vmatrix} a & . & . & . \\ . & b & . & . \\ . & . & c & . \\ . & . & . & d \end{vmatrix} = abcd$$

دترمینان ماتریس قطر فرعی برابر :

$$\begin{vmatrix} . & . & a_1 & . \\ . & a_2 & . & . \\ a_3 & . & . & . \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_3 & . & . \\ . & a_2 & . \\ . & . & a_1 \end{vmatrix} = -a_1 a_2 a_3$$

مثال: اگر $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2$ باشد، حاصل $\begin{vmatrix} a_1 & -3b_1 & c_1 \\ -2a_2 & 6b_2 & -2c_2 \\ a_3 & -3b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ کدام است؟

مثال: اگر A و B دو ماتریس مربعی باشند بطوریکه $BAB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ . & 2 \end{bmatrix}$ و $AB = \begin{bmatrix} 2 & . \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ آنگاه $|A|$ کدام است؟

مثال: اگر A یک ماتریس 3×3 باشد، حاصل $-|A|$ و $|\frac{1}{|A|} A|$ را برحسب $|A|$ بدست آورید.



کاربرد دترمینان

۱- اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ و $C(x_3, y_3)$ سه رأس مثلث ABC باشد، مساحت مثلث برابر است

با :

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

مثال : اگر $A(1, 2)$ و $B(2, 3)$ و $C(1, 4)$ مختصات رئوس مثلث باشد، مساحت آن را بیابید؟

۲- معادله خطی که از نقاط (a, b) و (c, d) می‌گذرد برابر است با : $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$

قضیه کیلی-همیلتون :

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد. همواره $A^2 - (a+d)A + |A|I = 0$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & k \end{bmatrix}$ آنگاه برای چند مقدار k ، تساوی $A^2 + 2A - I = 0$ درست است؟



وارون یک ماتریس :

ماتریس مربعی A را وارون پذیر گوئیم اگر ماتریس مانند B وجود داشته باشد که $AB = BA = I$ در این صورت B را وارون A گوئیم و با A^{-1} نمایش می دهیم. پس $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
مثال: اگر $A^2 = AB + I$ باشد، وارون ماتریس A را بدست آورید.

مثال: اگر $A^2 = 2I$ باشد، $(I + A)^{-1}$ را بدست آورید.

محاسبه وارون ماتریس 2×2 :

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد وارون ماتریس A برابر است با:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

مثال: وارون ماتریس $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.



ویژگی های ماتریس وارون :

۱. اگر A ماتریسی وارون پذیر و k عددی حقیقی باشد: $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

۲. اگر A و B دو ماتریس وارون پذیر باشند: $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

۳. اگر A ماتریسی وارون پذیر و n عددی طبیعی باشد: $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

۴. اگر A ماتریسی وارون پذیر باشد: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

۵. اگر A ماتریسی وارون پذیر و B و C دو ماتریس باشند بطوریکه $AB=AC$ ، قانون حذف برقرار است:

$$AB = AC \Rightarrow B = C$$

نتیجه: اگر A ماتریسی وارون پذیر و خودتوان باشد آنگاه $A=I$.

نکته: اگر A و B دو ماتریس وارون پذیر باشند، در حالت کلی:

$$(A + B)^{-1} \neq A^{-1} +$$

$$B^{-1}$$

مثال: اگر A و B دو ماتریس باشند بطوریکه $A^T B = A + I$ ، وارون ماتریس A کدام است؟

$$BA+I \text{ (۴)}$$

$$AB-I \text{ (۳)}$$

$$BA-I \text{ (۲)}$$

$$AB+I \text{ (۱)}$$

مثال: اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد بطوریکه $A^3 = O$ ، حاصل $(A + I)^{-1}$ کدام است؟

$$A^T + A + I \text{ (۴)}$$

$$A^T - A + I \text{ (۳)}$$

$$A-I \text{ (۲)}$$

$$I-A \text{ (۱)}$$

مثال: اگر A ماتریسی 3×3 و وارون پذیر باشد بطوریکه $A^{-1} = 2A^T$ در اینصورت $|A|$ کدام است؟

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ (۴)}$$

$$\sqrt[3]{2} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۲)}$$

$$2 \text{ (۱)}$$



مثال: اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند بطوریکه $A+B=AB$ ، ثابت کنید با فرض وارون‌پذیری

$$A^{-1} + B^{-1} = I$$

A ، B نیز وارون‌پذیر است و داریم:

مثال: اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $(AB)^{-1}$ کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 64 & 64 \\ 64 & 0 \end{bmatrix} \quad (4) \quad \begin{bmatrix} 64 & -64 \\ 64 & 0 \end{bmatrix} \quad (3) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2) \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

سطر اول ماتریس A ، کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -21 & 30 \end{bmatrix} \quad (2) \quad \begin{bmatrix} 12 & -17 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 12 & -21 \end{bmatrix} \quad (4) \quad \begin{bmatrix} -17 & 30 \end{bmatrix} \quad (3)$$

دستگاه معادلات خطی :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \rightarrow AX = B$$

حل دستگاه معادلات خطی :



با استفاده از وارون ماتریس :

با شرط اینکه دترمینان ماتریس ضرائب مخالف صفر است و ماتریس A وارون پذیر است. جوابهای دستگاه را می توانیم از رابطه روبرو بدست آوریم:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

مثال: دستگاه مقابل را به روش ماتریس وارون حل کنید.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$$

تعداد جواب ها در دستگاه دو معادله دو مجهول:

هر دستگاه دو معادله و دو مجهول را می توان با معادلات $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ نشان داد که هر معادله

نشان دهنده یک خط است، بنابراین دو خط فوق می توانند متقاطع، موازی یا منطبق باشند و تعداد جواب ها در دستگاه بصورت زیر می باشد:

(۱) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ باشد، دستگاه بیشمار جواب دارد.

(۲) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ باشد، دستگاه جواب ندارد.

(۳) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ باشد، دستگاه دارای یک جواب است.

مثال: به ازای چند مقدار m ، دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} mx + 2y = m + 2 \\ 3x + (m + 5)y = 2 \end{cases}$ بیشمار جواب دارد؟

مثال: در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = 2 \\ cx + dy = -1 \end{cases}$ معکوس ماتریس ضرائب مجهولات به صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}$

است، $x+y$ را بدست آورید.



مثال: اگر دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + 2y = 4 \\ bx - 5y = 7 \end{cases}$ برابر ۱۷ باشد، آنگاه مقدار x کدام

است؟

تمرینات مهم کتاب درسی فصل اول

۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل ضرب $A \times B$ ماتریسی قطری باشد.

۸- اگر $A = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری باشد و B ماتریسی 3×3 و دلخواه باشد در این صورت ماتریس $(A \times B)$ را تشکیل دهید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۹- اگر A ماتریسی 3×3 و اسکالر باشد و B ماتریسی هم‌مرتبه A در این صورت الف) برای $A \times B$ و $B \times A$ قوانینی تعریف کنید.
ب) آیا تساوی $A \times B = B \times A$ برقرار است؟

۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A|^2 \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $(|A|^3 - 2)$ را بیابید.



نمایش نقاط در فضای

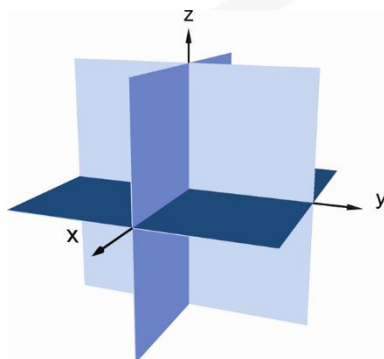
(۱) یک بعدی (R) فقط با یک مختص نمایش داده می شود (x)

(۲) دو بعدی (R^2) هر نقطه با یک زوج مرتب نمایش داد می شود (x, y)

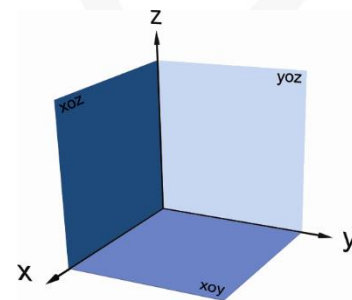
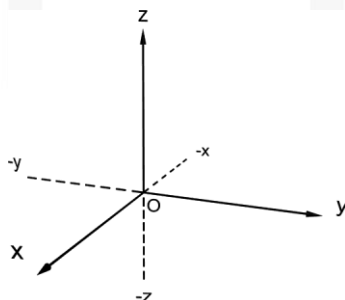
(۳) سه بعدی (R^3) هر نقطه با یک سه تایی مرتب نمایش داده می شود (x, y, z)

مختصات هر نقطه در فضای دلخواه در واقع آدرس نقطه است اگر $A(m, n, p)$ باشد از مبدأ m واحد در جهت محور x و سپس n واحد در جهت محور y ها سپس p واحد در جهت محور z ها حرکت می کنیم تا به نقطه A برسیم.

دستگاه مختصات قائم (راستگرد)



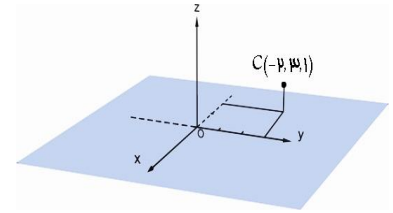
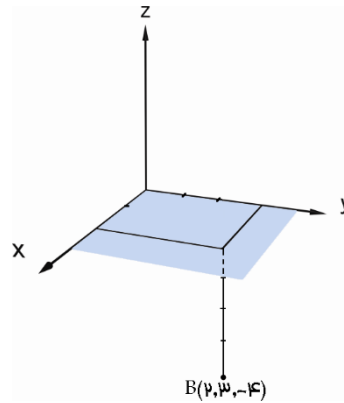
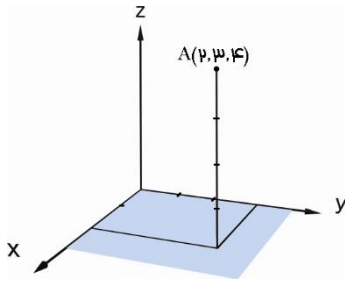
در دستگاه مختصات قائم سه محور هم مبدأ دو به دو عمود بر هم می باشند.



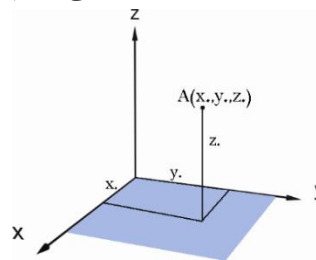
که نسبت محورها باید به نحوی باشند که اگر چهار انگشت دست راست با جهت محور y ها یکی باشد، انگشت شصت جهت محور z ها را نشان خواهد داد.



مثال : نقاط $A(2, 3, 4)$ و $B(2, 3, -4)$ و $C(-2, 3, 1)$ روی دستگاه مختصات قائم نمایش دهید.



برای یافتن مختصات یک نقطه در این فضا سه صفحه عبور می‌دهیم که از A بگذرد و بر محورهای مختصات عمود باشد.



$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

طول پاره خط



مثال : فاصله دو نقطه $A(-2, -2, 2)$ و $B(-1, 0, 4)$ برابر است با :

مثال ۱: $A(1, 4, 2)$ ، $B(2, 4, 2)$ ، $C(2, 0, -1)$ مختصات سه رأس مثلث باشند نوع مثلث را مشخص کنید

مثال ۲: روی محور x ها نقطه ای بیابید که از نقاط $A(1, 2, 3)$ و $B(-3, 3, 2)$ به یک فاصله باشد

مثال ۳: روی محور y ها نقطه ای بیابید که از نقطه $A(-1, 2, 1)$ به فاصله ۱۰ باشد



مختصات نقطه M وسط A و B

$$M = \frac{A+B}{2} \rightarrow M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

مثال : مختصات وسط $A(1, 1, 3)$ و $B(3, 1, -1)$ برابر است با :

$$M = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{1+1}{2}, \frac{3-1}{2} \right) = (2, 1, 1)$$



قرینه A نسبت به B

$$B = \frac{A+A'}{2} \rightarrow A' = 2B - A$$

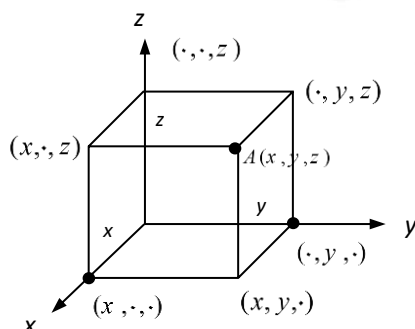
مثال : قرینه نقطه $A(1, 3, 1)$ نسبت به $B(0, 1, -1)$ برابر است با :

$$A' = 2B - A = (0, 2, -2) - (1, 3, 1) = (-1, -1, -3)$$

مثال ۴: $A(0, -1, -1)$ ، $B(2, 1, 1)$ ، $C(4, 3, -3)$ مختصات سه رأس مثلث باشد مختصات M وسط BC و AM میانه و قرینه A را نسبت به M را بیابید.

چند نکته :

- ۱- اگر نقطه روی محور x ها باشد ارتفاع و عرض آن صفر است.
- ۲- اگر نقطه روی محور y ها باشد طول و ارتفاع آن صفر است
- ۳- اگر نقطه روی محور z ها باشد طول عرض آن صفر است.
- ۴- اگر نقطه روی صفحه xy باشد ارتفاع آن صفر است.
- ۵- اگر نقطه روی صفحه yz باشد طول آن صفر است.
- ۶- اگر نقطه روی صفحه xz باشد عرض آن صفر است





تصاویر:

$A'(x, 0, 0)$	تصویر نقطه $A(x, y, z)$ روی محور x ها
$A'(0, y, 0)$	تصویر نقطه $A(x, y, z)$ روی محور y ها
$A'(0, 0, z)$	تصویر نقطه $A(x, y, z)$ روی محور z ها
$A'(x, y, 0)$	تصویر نقطه $A(x, y, z)$ روی صفحه xy
$A'(0, y, z)$	تصویر نقطه $A(x, y, z)$ روی صفحه yz
$A'(x, 0, z)$	تصویر نقطه $A(x, y, z)$ روی صفحه xz

برای یافتن تصویر نسبت به محورها و صفحات کافی است مؤلفه‌های غیرهمنام صفر قرار دهیم.

قرینه‌ها

$A''(x, -y, -z)$	قرینه $A(x, y, z)$ نسبت به محور x ها
$A''(-x, y, -z)$	قرینه $A(x, y, z)$ نسبت به محور y ها
$A''(-x, -y, z)$	قرینه $A(x, y, z)$ نسبت به محور z ها
$A''(x, y, -z)$	قرینه $A(x, y, z)$ نسبت به صفحه xoy
$A''(-x, y, z)$	قرینه $A(x, y, z)$ نسبت به صفحه yoz
$A''(x, -y, z)$	قرینه $A(x, y, z)$ نسبت به صفحه xoz
$A''(-x, -y, -z)$	قرینه $A(x, y, z)$ تا مبدأ مختصات

برای قرینه کردن کافی است مؤلفه‌های غیرهمنام قرینه شود.

مثال ۵: اگر نقطه $A(a-b, 3, b)$ قرینه نقطه $B(1, m, 2)$ نسبت به محور oz باشد $a+m$ را بیابید



مثال ۶: اگر نقطه $A(4, -1, 8)$ را بر صفحه xy تصویر کنیم B بنامیم اگر A بر محور Z تصویر کنیم C بنامیم فاصله مبدا از وسط BC چقدر است

مثال ۷: نقطه $A(1, -2, \sqrt{2})$ مفروض است.

الف) چند نقطه از صفحه xy وجود دارد که از A به فاصله ۱ باشد؟

ب) چند نقطه روی محور x ها وجود دارد که از A به فاصله ۲ باشد؟

فاصله ها

$\sqrt{y^2 + z^2}$	فاصله $A(x, y, z)$ تا محور x ها
$\sqrt{x^2 + z^2}$	فاصله $A(x, y, z)$ تا محور y ها
$\sqrt{x^2 + y^2}$	فاصله $A(x, y, z)$ تا محور z ها
$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	فاصله $A(x, y, z)$ تا مبدأ مختصات
$ z $	فاصله $A(x, y, z)$ تا صفحه xy
$ x $	فاصله $A(x, y, z)$ تا صفحه yz
$ y $	فاصله $A(x, y, z)$ تا صفحه xz

مثال ۸: چند نقطه روی محور z ها وجود دارد که فاصله آنها تا صفحه xy برابر ۱ باشد؟

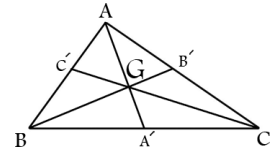
مثال ۹: چند نقطه روی صفحه xoy وجود دارد که از محور y ها به فاصله ۳ و از مبدأ مختصات به فاصله ۵ باشد؟



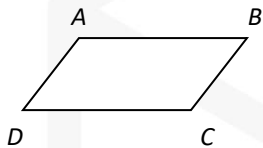
مثال ۱۰: فاصله A تا سه محور x, y, z به ترتیب z و 2 و 3 می باشد فاصله A تا مبدأ مختصات را بیابید.

مختصات G مرکز ثقل مثلث ABC

$$G = \frac{A+B+C}{3} \rightarrow G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}, \frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$$



مثال ۱۱: مختصات سه رأس مثلث باشد فاصله مرکز ثقل مثلث از مبدأ مختصات را بیابید



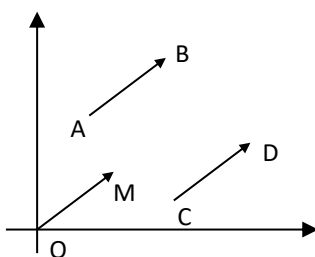
نکته: در متوازی الاضلاع $ABCD$ بین مختصات رئوس رابطه $A+C = B+D$ برقرار است

مثال ۱۲: مختصات سه رأس متوازی الاضلاع $ACBD$ است، مختصات D را بیابید.

بردار:

به هر پاره خط جهت دار یک بردار می گوئیم. توجه کنید که جهت به معنی راستا و سواست.

واضح است که همواره بی شمار بردار هم ارز (مساوی) با یک بردار می توان رسم کرد، که تنها یکی از آن ها از مبدأ مختصات شروع می شود که به آن نماینده بردار گوئیم.





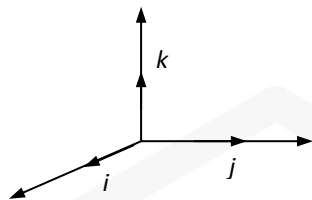
بردار : هر پاره خط جهت دار با نقطه شروع مبدأ مختصات $O(0,0,0)$ را یک بردار گوییم. (OM)

هر بردار با مختصات انتهای آن نمایش می دهیم.

اندازه بردار

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \text{اندازه (طول) بردار}$$

توجه : هر بردار $\vec{a}$ دارای سه مؤلفه است که جهت و راستا را مشخص می کند ولی $|\vec{a}|$ (اندازه بردار) کمیت است عددی.



توجه : بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای یکه محورها مختصات می باشد که بترتیب بردار یکه محوره های OX و OY و OZ هستند و هر بردار را می توان یک ترکیب خطی از i و j و k نوشت.

$$\vec{a}(a_x, a_y, a_z) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

ضرب عدد در بردار : اگر $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ و k عدد حقیقی باشد

$$k\vec{a} = k(a_x, a_y, a_z) = (ka_x, ka_y, ka_z)$$

$$|\vec{ka}| = |k| |\vec{a}|$$

مثال

$$|2\vec{a}| = 2|\vec{a}|$$

$$|-2\vec{a}| = 2|\vec{a}|$$

قرینه بردار $\vec{a}$ را با $-\vec{a}$ نمایش می دهیم $-\vec{a}(-a_x, -a_y, -a_z)$ باید بدانیم که $|\vec{a}| = |-\vec{a}|$



دو بردار هم ارز :

دو بردار که هم اندازه، هم جهت باشند هم ارز نامیده می شود.

دو بردار موازی :



$$\vec{v} \parallel \vec{v'} \Leftrightarrow \vec{v} = k\vec{v'} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k \longrightarrow \begin{cases} k > 0 & \text{موازی و هم جهت } a \text{ و } b \\ k < 0 & \text{موازی و مختلف جهت } a \text{ و } b \end{cases}$$

مثال ۱۳ : دو بردار $\vec{a} = i + nj + k$ و $\vec{b} = 2i + 5j + mk$ موازی باشند، m و n را بیابید.

مثال ۱۴ : دو بردار $\vec{a}(2, 2, n)$ و $\vec{b}(3, m+1, 3)$ موازی باشند، m و n را بیابید.

مثال ۱۵ : دو بردار $\vec{a}(m+1, 2, 0)$ و $\vec{b}(1, -4, n-1)$ موازی باشند، m و n را بیابید.

مثال ۱۶ : بردار $\vec{b}$ را چنان بیابید که با $\vec{a} = i + j - k$ موازی باشد و $|\vec{b}| = \sqrt{6}$ باشد.



چون هر بردار با مختصات انتهای آن مشخص می شود، پس برای تصویر و قرینه کردن یک بردار کافی است نقطه انتها را تصویر یا قرینه کنیم به عنوان مثال :

تصویر $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ روی محور x ها $\vec{a}'(a_1, 0, 0)$

تصویر $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ روی صفحه xy $\vec{a}'(a_1, a_2, 0)$

قرینه $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ نسبت به محور x ها $\vec{a}''(a_1, -a_2, -a_3)$

قرینه $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ نسبت به صفحه xy $\vec{a}''(a_1, a_2, -a_3)$

مثال ۱۷ : بردار $\vec{a}(-1, 2, -3)$ مفروض است :

۱. تصویر بردار روی محور OX :

۲. اندازه تصویر بردار روی محور OX :

۳. قرینه بردار نسبت به محور OZ :

۴. تصویر بردار روی صفحه XOZ :

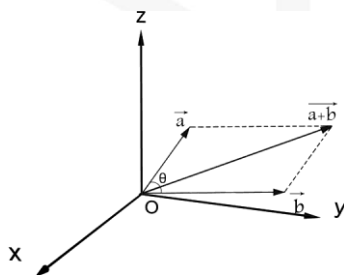
۵. اندازه تصویر بردار روی صفحه XOZ :

توجه : در بردار $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ به a_1 و a_2 و a_3 به ترتیب تصویر $\vec{a}$ روی محورهای x و y و z گوئیم و به $|a_1|$ و $|a_2|$ و $|a_3|$ اندازه تصویر $\vec{a}$ روی محورهای x و y و z گوئیم.

جمع برداری :

اگر $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ باشد مجموع دو بردار، برداری است مانند $\vec{c}$ که

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$



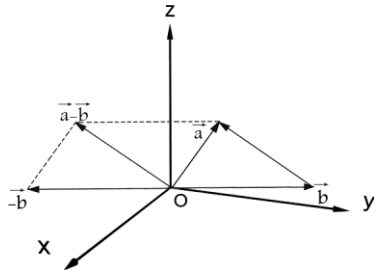
جمع متوازی الاضلاعی :



تفاضل دو بردار

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

حاصل تفاضل دو بردار $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ برابر است با



مثال ۱۸: اگر $\vec{a}(1, 2, -1)$ و $\vec{b}(2, -1, 1)$ باشند،

الف) حاصل $\vec{a} + \vec{b}$ و $2\vec{a} - 3\vec{b}$ را بیابید.

ب) حاصل $|a+b|$ را بیابید.

چند نکته مهم:

۱- اگر $a \perp b$ متوازی الاضلاع بنا شده، روی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مستطیل خواهد بود قطرهای مستطیل $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$

$$a \perp b \Leftrightarrow |a+b| = |a-b|$$

برابر خواهد بود.

۲- اگر قطرها بر هم عمود باشند متوازی الاضلاع بنا شده روی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ لوزی خواهد پس طول ضلع ها برابر

$$\text{است. } (a+b) \perp (a-b) \Leftrightarrow |a| = |b|$$

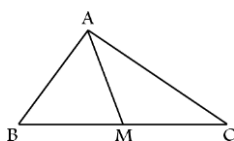
$$|a+b| > |a-b| \quad \alpha < 90^\circ \quad 3-$$

$$|a+b| = |a-b| \quad \alpha = 90^\circ \quad \text{اگر}$$

$$|a+b| < |a-b| \quad \alpha > 90^\circ \quad \text{اگر}$$

مثال ۱۹: اگر بردار $a(m, 2, -1)$ و $|b| = \sqrt{41}$ ، دو بردار $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ عمود بر هم باشند مقدار مثبت m

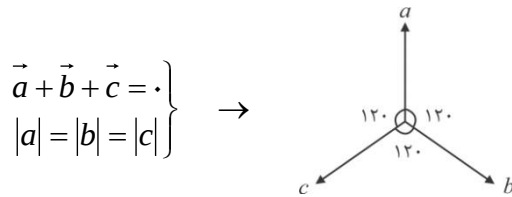
کدام است؟



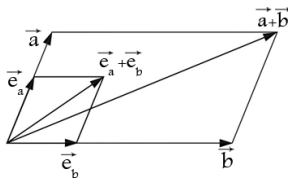
$$\vec{AM} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2} \quad \text{نکته: در مثلث ABC اگر AM میانه وارد بر ضلع BC باشد آنگاه}$$



نکته : اگر برآیند سه بردار هم اندازه صفر باشد. سه بردار دویبدو با هم زاویه 120° می سازند. (قاعده بنز)



نیمساز دو بردار



برای بدست آوردن برداری که زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را نصف می کند نمی توان دو بردار را جمع کرد مگر $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ باشد (در متوازی الاضلاع قطر نیمساز نیست ولی در لوزی قطر نیمساز است). پس باید ابتدا یک بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را حساب کنیم سپس هم جمع کنیم.

توجه : هر ضریبی از بردار $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ نیز می تواند بردار نیمساز باشد. اگر بردار مفروض را در $|\vec{a}| |\vec{b}|$ ضرب کنیم

بردار $|\vec{b}| \vec{a} + |\vec{a}| \vec{b}$ حاصل می شود.

$$b, a \quad \text{نیمساز} = |\vec{b}| \vec{a} + |\vec{a}| \vec{b}$$

مثال ۲۰: نیمساز دو بردار $\vec{a} = (1, 2, 2)$ و $\vec{b} = (3, 0, 4)$ را بیابید.

مثال ۲۱: بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با اندازه ای ۲ و ۵ با هم زاویه 60° می سازند. بردار $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ با $2\vec{a}$ چه زاویه ای می سازد؟



ضرب داخلی دو بردار (نقطه ای و اسکالر)

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \alpha$$

عددی است که برابر حاصل ضرب اندازه های آن دو بردار در کسینوس زاویه بین آن دو می باشد.

اثبات :

صورت تحلیلی ضرب داخلی :

اگر $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ داریم



$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

حاصل ضرب داخلی دو بردار یک عدد حقیقی است که میتواند مثبت منفی یا صفر باشد.

اگر زاویه بین دو بردار حاده باشد $a \cdot b$ عدد مثبت و اگر زاویه بین دو بردار منفرجه باشد $a \cdot b$ عدد منفی است و اگر دو بردار بر هم عمود باشند $a \cdot b$ برابر صفر است. اگر مؤلفه های بردار معلوم بود از $a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ و اگر

اندازه و زاویه بین دو بردار معلوم باشد

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \alpha$$

مثال ۲۲ : اگر $\vec{a}(3, -1, 1)$ و $\vec{b}(2, 1, 1)$ و $\vec{c}(1, 2, 4)$ مطلوب است :

(۴) $a \cdot a$

(۳) $a \cdot (b+c)$

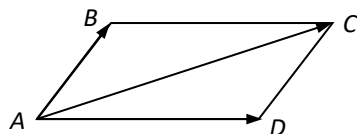
(۲) $b \cdot a$

(۱) $a \cdot b$

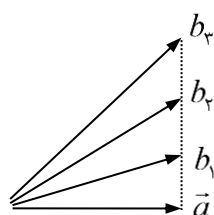
مثال ۲۳ : اگر $|\vec{a}| = 2$ و $|\vec{b}| = 30$ و زاویه بین دو بردار 30° باشد حاصل $a \cdot b$ را بیابید.



مثال ۲۴: در شکل مقابل، $ABCD$ متوازی الاضلاع است. حاصل عددی کدام گزینه بزرگتر است؟



- (۱) $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ (۲) $\vec{AC} \cdot \vec{AD}$
(۳) $\vec{AD} \cdot \vec{AD}$ (۴) هر سه یکسان



مثال ۲۵: با توجه به شکل مقابل حاصل عددی کدام گزینه بزرگتر است؟
(۱) $a \cdot b_1$ (۲) $a \cdot b_2$ (۳) $a \cdot b_3$ (۴) هر سه یکسان

ویژگی ضرب نقطه‌ای

۱) $a \cdot a = |a|^2$

۲) $a \cdot b = b \cdot a$

۳) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

۴) $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a \perp b$

شرط عمود بودن دو بردار غیر صفر

(۵) طرفین هر تساوی برداری را می‌توان در یک بردار دلخواه ضرب داخلی کرد:

$$a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$$

$$a \cdot c = b \cdot c \nRightarrow a = b$$

(۶) در ضرب داخلی بردارها، قانون حذف همواره برقرار نیست:





تذکره! از $a.c = b.c \Rightarrow a = b$ می توان سه نتیجه گرفت که یکی از آن ها $a = b$ است و کلاً به شرح زیر است :

$$a.c = b.c \Rightarrow a.c - b.c = 0 \Rightarrow (a-b).c = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-b = \vec{0} \Rightarrow a = b \\ (a-b) \perp c \\ c = \vec{0} \end{cases}$$

$$\wedge) i.i = 1 \quad j.j = 1 \quad k.k = 1$$

$$i.j = 0 \quad k.j = 0 \quad i.k = 0$$

توجه : تمام اتحادهای جبری شامل توان ۲ در ضرب داخلی نیز قابل استفاده است.

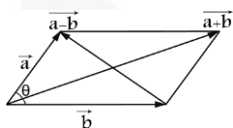
$$(a-b).(b+a) = a.a + a.b - b.a - b.b = |a|^2 - |b|^2$$

$$|a+b+c|^2 = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2a.b + 2a.c + 2b.c$$

$$|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2a.b$$

$$|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2a.b$$

نکته : در متوازی الاضلاع مجموع مربعات اقطار با مجموع مربعات اضلاع برابر است.



$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2$$

مثال ۲۶ : اگر $\vec{a} = (-1, 2, 1)$ و $\vec{b} = \vec{j} + 3\vec{k}$ باشد، حاصل $(\vec{a} - \vec{b}).(\vec{a} + \vec{b})$ را بیابید.

مثال ۲۷ : اگر $|a| = 3$ و $|b| = 2$ و زاویه بین دو بردار 60° باشد حاصل $(a+b).(a-3b)$ را بیابید.



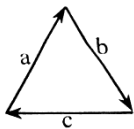
مثال ۲۸: اگر $|a|=3$ و $|b|=2$ و زاویه بین دو بردار 60° باشد حاصل $|a+2b|$ را بیابید.

مثال ۲۹: دو بردار $\vec{a}(m+1, -1, 2)$ و $\vec{b}(1, -m, 1)$ بر هم عمودند، m را بیابید.

مثال ۳۰: به ازای کدام مقدار m دو بردار $-2i + j + m\vec{k}$ و $-2j$ بر هم عمودند؟

مثال ۳۱: اگر $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ باشد و $|a|=1$ و $|b|=2$ و $|c|=3$ باشد الف) حاصل $a.b + a.c + b.c$ را بیابید.
ب) حاصل $a.b$ را بیابید.

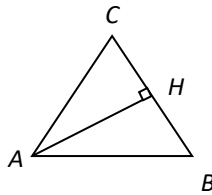
مثال ۳۲: در شکل مقابل اندازه بردارهای a, b, c به ترتیب ۳ و ۵ و ۶ است. حاصل ضرب داخلی دو بردار a, b کدام است؟



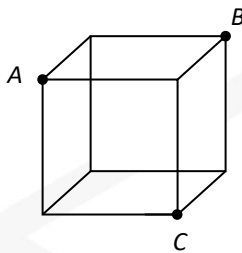


مثال ۳۳: اگر $a+b+c=\vec{0}$ و اندازه‌ی هر سه بردار a و b و c برابر ۲ باشد، حاصل $|a-2c|$ کدام است؟

مثال ۳۴: در مثلث متساوی‌الاضلاع شکل زیر به ضلع ۲ حاصل $\vec{AH} \cdot \vec{AH} + \vec{AH} \cdot \vec{AB} + \vec{AH} \cdot \vec{AC}$ چه قدر است؟



مثال ۳۵: در مکعب شکل مقابل به ضلع ۳ حاصل $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ را بیابید.

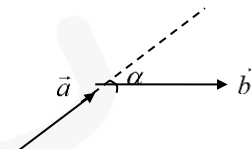
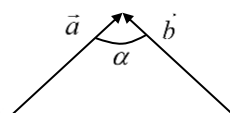
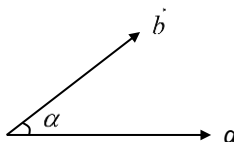


$$a \cdot b = |a| |b| \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$$

زاویه بین دو بردار



از لحاظ تعبیر هندسی در شکل های زیر α زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.





مثال ۳۶: زاویه بین دو بردار $\vec{a}(1, 1, 0)$ و $\vec{b}(0, -1, 1)$ را بیابید.

مثال ۳۷: اگر $a = j - 2k$ و $b = 2i + j$ زاویه بین دو بردار $a + b$ و $a - b$ کدام است؟

مثال ۳۸: سه نقطه $A(2, 1, 0)$ ، $B(3, -1, 2)$ و $C(-1, 1, 3)$ ، رأس‌های مثلثی هستند. $\cos A$ کدام است؟
(سراسری ۹۳)

مثال ۳۹: بر روی دو بردار $a = 3i + 3j$ و $b = i - j - 2k$ متوازی الاضلاعی ساخته شده است. کسینوس زاویه بین دو قطر این متوازی‌الاضلاع کدام است؟ (خارج از کشور - ۹۲)

$$|a \cdot b| \leq |a| |b|$$

نامساوی کوشی شوارتز

مثال ۴۰: اگر $a \cdot b = -9$ و $b = (-2, 1, 2)$ باشد، حداقل $|a|$ برابر است با:



مثال ۴۱: اگر $2x + y + 2z = 10$ باشد کمترین مقدار $x^2 + y^2 + z^2$ چقدر است؟

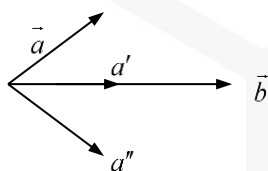
نکته: اگر $ax + by + cz = k$ باشد، می‌نیمم مقدار $x^2 + y^2 + z^2$ برابر با $\frac{k^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

تصویر بردار $\vec{a}$ روی $\vec{b}$



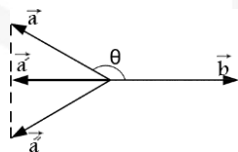
$$\rightarrow k = \frac{|\vec{a}| \cos \alpha}{|\vec{b}|} \times \frac{|\vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \rightarrow \vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

$$\vec{a}' \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a}' = k\vec{b} \rightarrow |\vec{a}'| = k|\vec{b}| \rightarrow k = \frac{|\vec{a}'|}{|\vec{b}|}$$



$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

پس تصویر $\vec{a}$ روی $\vec{b}$ برابر:



$$|\vec{a}'| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

اندازه تصویر $\vec{a}$ روی $\vec{b}$ برابر:

$$|\vec{a}'| = |\vec{a}| \cos \alpha \rightarrow$$

قرینه $\vec{a}$ نسبت به $\vec{b}$:

$$\vec{a}'' = 2\vec{a}' - \vec{a}$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} + \vec{a}''}{2} \rightarrow$$

توجه: همواره $|\vec{a}| = |\vec{a}''|$ و $|\vec{a}'| \leq |\vec{a}|$ می‌باشد.



مثال ۴۲: تصویر و قرینه $\vec{a}(3, -1, 1)$ روی بردار $b(1, 2, 2)$ را بیابید.

مثال ۴۳: اگر $a = (2, 0, -1)$ و $b = (2, 0, 1)$ باشد تصویر بردار $a + 2b$ در امتداد بردار b را بیابید.؟

مثال ۴۴: قرینه‌ی بردار $a = i - j$ نسبت به بردار $b = 2i - j + 2k$ را c می نامیم. ضرب داخلی دو بردار a و c کدام است؟ (سراسری ۹۰- خارج از کشور)

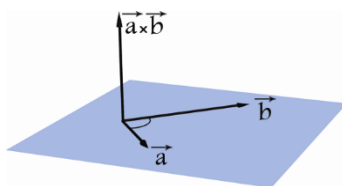
$$(1) \quad 2 - \frac{1}{3} \quad \text{صفر}$$

$$(3) \quad \frac{2}{3} \quad (4) \quad 1$$

ضرب خارجی دو بردار



ضرب خارجی دو بردار، برداری است که بر هر دو بردار عمود است به عبارت دیگر بر صفحه شامل دو بردار عمود است. جهت حاصل ضرب خارجی از قانون دست راست مشخص می شود.



$$|a \times b| = |a||b|\sin \alpha$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}$$



مثال ۴۵: اگر $\vec{a}(1,2,1)$ و $\vec{b}(3,2,1)$ و $\vec{c}(2,1,1)$ باشد مطلوب است:

(۱) $\vec{a} \times \vec{b}$ (۲) $\vec{b} \times \vec{a}$ (۳) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$ (۴) $\vec{a} \times \vec{a}$

مثال ۴۶: اگر $a = i - j + k$ و $b = 2j - k$ باشد، تصویر بردار $a \times b$ بر روی محور z ها کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۱

(۳) ۲ (۴) ۳

ویژگی ضرب خارجی



۱) $a \times a = \vec{0}$

۲) $a \times b = -b \times a$

۳) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

۴) $a \times b = a \times c \Rightarrow b = c$

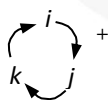
$a \times b = a \times c \rightarrow a \times b - a \times c = \vec{0} \rightarrow a \times (b - c) = \vec{0} \rightarrow a \parallel (b - c)$

۵) $a \times b = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

۶) $i \times j = k$

$j \times k = i$

$k \times i = j$



$j \times i = -k$

$k \times j = -i$

$i \times k = -j$

$i \times i = \vec{0}$

$j \times j = \vec{0}$

$k \times k = \vec{0}$



مثال ۴۷: اگر i و j و k بردارهای واحد باشند حاصل $(\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j})) \times \vec{k}$ کدام است؟ (سراسری ۹۱)

(۱) صفر (۲) $-i$

(۳) j (۴) $-k$

مثال ۴۸: اگر $a \times b = a \cdot b$ باشد و $|a| = |b| = 2$ باشد حاصل $|(a+b) \times (a-2b)|$ را بیابید.

مثال ۴۹: اگر $\vec{a}(1, -1, 1)$ و $\vec{b}(2, 1, -1)$ باشد برداری بیابید که بر بردارهای a و b عمود است.

مثال ۵۰: اگر $\vec{a}(1, -1, 1)$ و $\vec{b}(2, 1, -1)$ باشد برداری بیابید که بر بردارهای $a-b$ و $a+2b$ عمود است را بیابید.

نکته مهم: بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ بر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و بر صفحه بردار a و b عمود است پس به تمام بردارهای واقع در این صفحه نیز عمود است. $a \times b$ بر تمام ترکیب های a و b $(m\vec{a} + n\vec{b})$ نیز عمود است.



مثال ۵۱: دو بردار با تساوی $a = (1, 2, -1)$ و $b = (2, 4, m)$ مفروض اند. به ازای کدام مقادیر m ، حاصل

$(a+b) \cdot (a \times b)$ برابر صفر است؟

(۱) فقط $m = \pm 2$ (۲) فقط $m = -2$

(۳) هیچ مقدار m (۴) هر عدد حقیقی m

مثال ۵۲: بردارهای $a = 3i - j + 2k$ و $b = 2i + j + k$ مفروضند. کدام بردار بر بردارهای $8a + 7b$ و

$11a - 9b$ عمود است؟

(۱) $(3, 1, 6)$ (۲) $(6, -2, -10)$

(۳) $(-2, -6, 12)$ (۴) $(3, -1, 5)$

مثال ۵۳: اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کمتر از 90° باشد $|a| = 6$ و $|b| = 5$ و $|a \times (a+b)| = 18$ ، حاصل

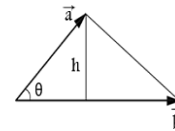
$a \cdot (a+b)$ را بیابید. (سراسری ۸۵)

مثال ۵۴: اگر $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ باشد ثابت کنید $a \times b = b \times c = c \times a$.



مساحت ساخته شده با دو بردار

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |b| h \\ \sin \theta &= \frac{h}{|a|} \rightarrow h = |a| \sin \theta \end{aligned} \right\} \rightarrow S = \frac{1}{2} |b| |a| \sin \theta = \frac{1}{2} |a \times b|$$

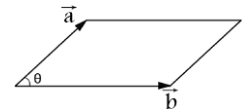


$$S = \frac{1}{2} |a \times b|$$

مساحت مثلث ساخته شده با دو بردار

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

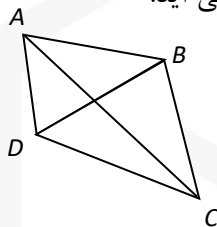
مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده با دو بردار



$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

مساحت مثلث با داشتن مختصات رئوس

نکته: مساحت هر چهار ضلعی دلخواه برابر نصف اندازه حاصل ضرب خارجی دو قطر بدست می آید.



$$S = \frac{1}{2} |\vec{AC} \times \vec{BD}|$$

مثال ۵۵: مساحت مثلث و متوازی الاضلاع ساخته شده با دو بردار $\vec{a}(2, 1, -1)$ و $\vec{b}(1, 3, 1)$ را بیابید.

مثال ۵۶: اگر $A(1, 2, 1)$ ، $B(3, 2, -1)$ و $C(2, 2, 3)$ باشد مساحت مثلث ABC را بیابید.



مثال ۵۷: اگر $a = (1, -2, 3)$ و $b = (2, 0, 1)$ ، مساحت متوازی الاضلاع تولید شده توسط دو بردار $a + 3b$ و $2a + 5b$

، کدام است؟ (سراسری ۸۷)

(۱) $2\sqrt{3}$ (۳) $3\sqrt{2}$

(۳) $3\sqrt{5}$ (۴) $5\sqrt{3}$

مثال ۵۸: دو بردار a و b به طولهای ۳ و ۴ واحد با یکدیگر زاویه ۳۰ درجه می‌سازند. مساحت مثلثی که بروی دو

بردار $a - 2b$ و $3a + 2b$ تولید شود کدام است؟

مثال ۵۹: اگر $d' = (2, -6, 2)$ و $d = (2, -4, 0)$ قطره‌های متوازی الاضلاع باشد مساحت متوازی الاضلاع بیابید.

چند نکته تکمیلی

۱) $|a \times b|^2 + (a \cdot b)^2 = |a|^2 |b|^2$

۲) $\operatorname{tg} \theta = \frac{|a \times b|}{a \cdot b}$

۳) $a \cdot (a \times b) = b \cdot (a \times b) = 0$

مثال ۶۰: اگر a و b دو بردار غیر صفر باشند و $|a \times b| = 2a \cdot (a \times b + b) - b \cdot (a \times b + a)$ ، آن گاه زاویه‌ی بین دو

بردار a و b کدام است؟



حاصل ضرب مختلط سه بردار

$$a.(b \times c)$$

حاصل ضرب مختلط ۳ بردار عددی است که برابر

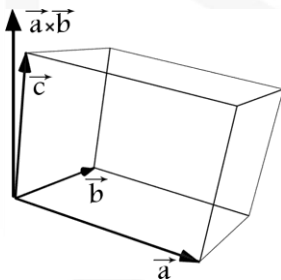
مثال ۶۱: اگر $\vec{a} = (1, 2, 3)$ و $\vec{b} = (2, 1, 1)$ و $\vec{c} = (0, 1, 2)$ باشد مطلوب است $a.(b \times c)$ و $c.(a \times b)$ و $b.(a \times c)$.

نکته:

$$a.(b \times c) = b.(c \times a) = c.(a \times b) \quad \vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c} \quad +$$

$$a.(b \times c) = -b.(a \times c)$$

اگر a, b, c هم رأس باشند مقدار عدد ضرب مختلط سه بردار برابر حجم متوازی السطوح است. که سه بردار تشکیل می دهند



$$|a.(b \times c)| = \text{حجم متوازی السطوح}$$

نکته: شرط لازم و کافی برای این که سه بردار a و b و c در یک صفحه باشند، این است که حجم متوازی السطوح بنا شده بر آن ها صفر شود. یعنی به عبارت دیگر:

$$a.(b \times c) = 0$$

مثال ۶۲: اگر a و b و c سه بردار غیر صفر و غیرواقع در یک صفحه باشند، مقدار کدام گزینه با سایرین فرق دارد؟

(سراسری ۸۴)

$$a.(b \times c) \quad (۲)$$

$$a.(c \times b) \quad (۱)$$

$$(a \times c).b \quad (۴)$$

$$b.(a \times c) \quad (۳)$$



مثال ۶۳: اگر a و b و c سه بردار غیر صفر باشند خلاصه شده $((b+c) \times (c-a)) \cdot (2a-b)$ کدام است؟ (سراسری ۹۰)

- (۱) $a \cdot (b \times c)$ (۲) $2a(b \times c)$
(۳) $3a \cdot (b \times c)$ (۴) صفر

مثال ۶۴: مقدار m را چنان بیابید که سه بردار $\vec{a}(2, 1, m)$ ، $b(0, 1, 3)$ و $\vec{c}(1, 0, 1)$ در یک صفحه قرار گیرند.

مثال ۶۵: اگر $\vec{a} = (m, 2, -1)$ و $\vec{b} = (2, 1, 1)$ و $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ باشد m چقدر باشد تا سه بردار در یک صفحه قرار گیرد؟

مثال ۶۶: دو بردار با تساوی $a = (1, -2, 3)$ و $b = (2, 1, -1)$ مفروض هستند. حجم متوازی السطوح که بر روی سه بردار a ، b و $a \times b$ ساخته شود، کدام است؟ (سراسری ۹۳)

- (۱) ۵۴ (۲) ۷۲
(۳) ۷۵ (۴) ۸۰

مثال ۶۷: اگر $a \times b + b \times c + c \times a = 0$ باشد ثابت کنید سه بردار در یک صفحه قرار دارند؟



تمرینات مهم کتاب درسی فصل ۳

۲- وجه‌های مکعب مستطیل مشخص شده در شکل قسمت‌هایی از صفحات به معادلات $x=1, x=3, y=1, y=4, z=-2, z=2$ هستند.

(الف) مختصات سه نقطه را مشخص کنید که دقیقاً بر دو تا از وجه‌ها قرار دارند.
(ب) معادلات مربوط به هر یک از یال‌های این مکعب مستطیل را بنویسید. (دقت کنید که یال‌ها پاره خط‌اند و نه خط)

(پ) مختصات رأس‌های این مکعب مستطیل را بنویسید.

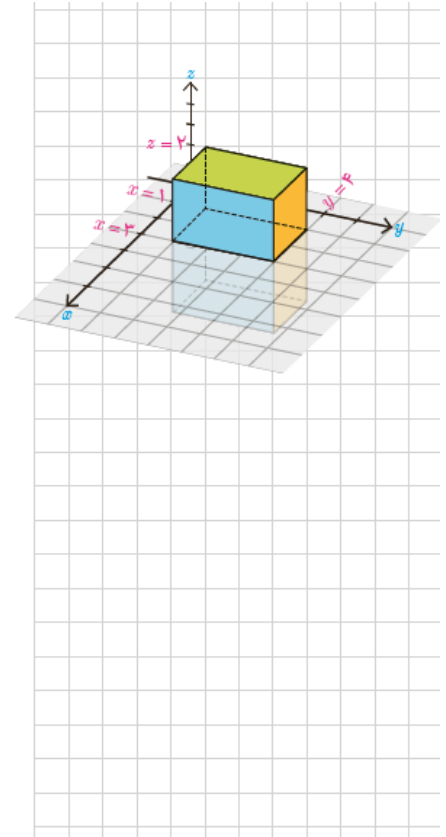
(ت) روابط مشخص‌کننده یکی از وجه‌های مکعب را نوشته‌ایم. روابط مشخص‌کننده پنج وجه دیگر را شما مشخص کنید.

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

(ث) مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که درون مکعب باشد و سپس مختصات نقطه‌ای را بیابید که روی یکی از وجه‌های آن و غیر واقع بر یال‌ها باشد.

(ج) شرط اینکه نقطه‌ای درون یا روی یکی از وجه‌های این مکعب باشد چیست؟

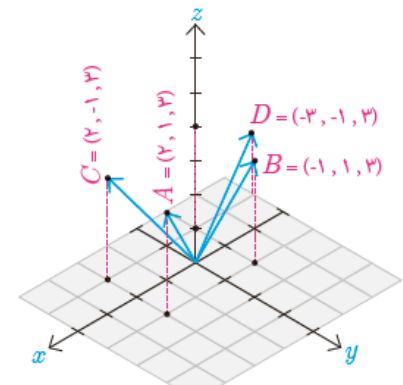
(چ) روابطی را بنویسید که مشخص‌کننده حجم محدود شده به وجه‌های مکعب داده شده باشند.



۱- چهار نقطه در دستگاه مختصات مقابل مشخص شده‌اند.

(الف) معادلات مشخص‌کننده سطح محدود شده به چهارضلعی $ABCD$ را بنویسید.

(ب) معادلات یکی از سطوحی که با سطح $ABCD$ هم‌مساحت و موازی هستند را بنویسید.



۲- فرض کنید $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند به ترتیب به طول‌های ۱ و ۲ و ۳ با این خاصیت که $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. مقدار $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ را محاسبه کنید.



۳- سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ولی $\vec{b} \neq \vec{c}$.

۶- سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ ولی $\vec{b} \neq \vec{c}$. آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟ در این باره در کلاس بحث کنید.

۸- مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $A = (3, 5, 7)$ ، $B = (5, 5, 0)$ ، $C = (-4, 0, 4)$ داده شده است را بیابید.

